

Multistage, Multiswarm Particle Swarm Optimization for Investment Portfolio Selection

Thales F. Dal Molim¹, Francisco Carlos M. Souza¹

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Dois Vizinhos - PR - Brasil

Abstract. *This study proposes a new metaheuristic-based approach, identified in the literature as MS2PSO, to solve the problem of investment portfolio selection in the Brazilian stock market. The study was divided into two experiments that evaluated the quality of the solutions obtained by the algorithm and the effectiveness of the recommended portfolios in different time windows and risk profiles. The results indicated that MS2PSO presented slower convergence but offered more satisfactory results compared to PSO. In addition, the portfolios recommended by the proposed method showed positive and negative performances according to the risk profile, and all of them outperformed the benchmark in terms of the overall highest gain obtained during the period. This study contributes to the development of the area of finance and economics by providing a sophisticated and efficient solution for investment portfolio selection.*

Keywords: *Portfolio selection problem, Mean-variance, Metaheuristic, Brazilian stock market.*

1. Introdução

A seleção de carteiras de investimentos é um problema clássico de otimização na área de economia e finanças. Seu objetivo é construir um portfólio eficiente que maximize o retorno e minimize o risco [Silva et al. 2019]. Desde os trabalhos pioneiros de Harry M. Markowitz [Markowitz 1952], que formaram a base da Teoria Moderna do Portfólio, diversas abordagens têm sido propostas para resolver o problema, incluindo a introdução de restrições adicionais para aproximar o problema da realidade, o que aumenta significativamente sua complexidade. Consequentemente, as meta-heurísticas têm sido apontadas como as técnicas mais utilizadas para resolver o problema [Kalayci et al. 2020]. Embora não possam garantir a melhor solução, essas técnicas são eficientes e oferecem soluções igualmente satisfatórias.

Meta-heurísticas são algoritmos de Inteligência Artificial que operam em um conjunto de soluções, utilizando mecanismos de melhoria local e estratégias de nível global para produzir um processo capaz de realizar uma busca robusta e encontrar a melhor solução para um problema [Wong and Ming 2019]. No decorrer dos anos, os algoritmos de busca e meta-heurísticas têm sido amplamente utilizados em diferentes áreas, como engenharia de produção, biologia, ciência da computação e também na economia. Na maioria das aplicações, foi possível alcançar resultados factíveis principalmente em problemas que envolvem a incerteza.

Embora este assunto tenha sido bastante discutido na literatura, os estudos e soluções propostas ainda não são maduras o suficiente para serem aplicadas no contexto

real. Portanto, além de propor algoritmos e técnicas para a recomendação de carteiras de investimentos, é necessário realizar um estudo experimental abrangente que envolva a análise do perfil do investidor, os ativos financeiros recomendados e os possíveis ganhos para garantir a confiabilidade da solução.

Sendo assim, este artigo tem como objetivo apresentar uma abordagem baseada em meta-heurística para resolver o problema de seleção de carteiras de investimentos em ativos do mercado brasileiro. Para tanto, foi selecionado um algoritmo cuja eficácia foi verificada em comparação com um algoritmo estado-da-arte na resolução desse problema, utilizando os *benchmarks* mais comumente utilizados na literatura. Além disso, o estudo não se restringiu apenas à análise do algoritmo em si, mas também validou o desempenho das carteiras geradas por meio de *backtests* em diversas janelas de tempo.

Como principais contribuições do estudo, destacam-se a: *i*) uma proposta baseada em meta-heurísticas para recomendação de carteiras de investimentos; *ii*) o uso de uma nova meta-heurística identificada na literatura como *Multistage, Multiswarm Particle Swarm Optimization* (MS2PSO) para o problema de seleção de carteiras; *iii*) um estudo comparativo com base de dados utilizada em outras pesquisas; e *iv*) um estudo experimental para simulação de investimentos reais com as carteiras recomendadas, que também é um dos diferenciais do estudo em relação à literatura.

Os resultados obtidos confirmam a eficiência do algoritmo MS2PSO na resolução do problema e indicam que as carteiras recomendadas pelo método proposto apresentaram desempenhos variados de acordo com o perfil de risco escolhido. Destaca-se, em particular, a carteira gerada para o perfil conservador, que obteve um desempenho superior ao *benchmark* em todos os aspectos avaliados.

2. Fundamentação Teórica

2.1. Problema de Seleção de Carteiras de Investimentos

Uma carteira de investimentos consiste em uma coleção de diferentes ativos financeiros mantidos por um investidor. O estudo de carteiras de ativos tem como principal objetivo construir um portfólio eficiente, isto é, selecionando uma composição de ativos que maximize o retorno para um determinado nível de risco e minimize o risco para um determinado nível de retorno esperado. Desta forma, temos um problema de otimização que envolve dois objetivos: a maximização do retorno e a minimização do risco. O problema pode ser modelado de diferentes maneiras. No modelo proposto por [Markowitz 1952], denominado média-variância (MV), o risco da carteira é calculado a partir da variância e covariância entre os ativos que a compõem, de modo que o risco total da carteira pode ser reduzido através da seleção de ativos que possuam relação inversa entre si [Silva et al. 2019].

O modelo MV transforma o problema de seleção de carteiras em um problema mono-objetivo, no qual a minimização do risco é o objetivo (Equação 1). Enquanto isso, o retorno esperado é tratado como uma restrição do problema (Equação 2). Para garantir a viabilidade da solução, restrições adicionais são impostas: a porcentagem total de investimento não pode ultrapassar 100% e a porcentagem individual em cada ativo deve estar entre 0% e 100% (Equação 3) [Chang et al. 2000].

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

Sujeita a:

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i = R^* \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad , \quad 0 \leq w_i \leq 1 ; i = 1, \dots, N \quad (3)$$

A representação acima (Equações 1-3) considera N como o número de ativos disponíveis, w_i como o peso ou proporção de um determinado ativo i na carteira, σ_{ij} como a covariância entre os ativos i e j , μ_i como o retorno médio do ativo i , e R^* como o retorno esperado a ser alcançado. Ao resolver o problema para diferentes valores de R^* , é possível traçar uma curva que representa o conjunto de portfólios com a melhor relação risco-retorno, conhecida como fronteira eficiente [Chang et al. 2000].

Segundo [Silva et al. 2019], uma abordagem alternativa para transformar o problema em um problema mono-objetivo consiste em adicionar um coeficiente $\lambda \in [0, 1]$ que representa a aversão ao risco do investidor. Neste caso, quando $\lambda = 0$, apenas maximiza-se o retorno esperado, ignorando o risco. De forma contrária, quando $\lambda = 1$, apenas minimiza-se o risco, ignorando o retorno. Dessa forma, tanto o retorno esperado quanto o risco são combinados em uma única função (Equação 4), também sujeita às restrições representadas pela Equação 3. Além disso, ao resolver a função para diferentes valores de λ , é possível obter a fronteira eficiente desta abordagem [Chang et al. 2000].

$$\min \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \right] \quad (4)$$

Embora o modelo proposto por [Markowitz 1952] seja amplamente utilizado e bem definido, é importante destacar que este modelo aborda os investimentos de maneira simplificada, não levando em consideração diversas restrições presentes no mercado que tornam o problema muito mais complexo. Diante disso, [Chang et al. 2000] propôs uma extensão ao modelo MV que inclui restrições adicionais, visando melhorar sua aplicabilidade em contextos mais realistas.

As restrições de cardinalidade (Equação 5) impõem limites ao número mínimo e máximo de ativos que compõem a carteira, podendo ser expressas tanto como uma igualdade, onde K representa o número exato de ativos para compor a carteira, quanto como uma desigualdade, que estabelece um limite inferior K_{min} e um limite superior K_{max} . Para modelar essas restrições, é introduzida uma variável binária $k_i \in \{0, 1\}$ que indica se um ativo i está presente ou não na carteira [Chang et al. 2000].

$$\sum_{i=1}^N k_i = K \quad , \quad K_{min} \leq \sum_{i=1}^N k_i \leq K_{max} \quad (5)$$

$$0 \leq \varepsilon_i k_i \leq w_i \leq \delta_i k_i \leq 1 \quad (6)$$

As restrições de piso e teto de proporção de investimento (Equação 6) representam as proporções mínima ε_i e máxima δ_i que um determinado ativo poderá ter na carteira e caracterizam, segundo [Silva et al. 2019], a preferência do investidor por determinados ativos ou setores econômicos. Tais restrições, de acordo com [Dhaini and Mansour 2021], também auxiliam o investidor ao restringir exposição excessiva e podem ser utilizadas em conjunto com as restrições de cardinalidade.

2.2. Otimização por Enxame de Partículas

Proposto por [Kennedy and Eberhart 1995], o algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO) é uma meta-heurística baseada em população, inspirada no comportamento de bandos de pássaros. Neste algoritmo, cada solução potencial do problema de otimização é representada por um indivíduo chamado de partícula. As partículas movem-se no espaço de busca, tentando melhorar suas posições com base nas informações coletadas por si mesmas e pelas demais partículas do grupo [Li and Clerc 2019].

A cada iteração t , a posição x_i^t de cada partícula i na população é atualizada somando sua velocidade v_i^t à sua posição anterior x_i^{t-1} , obtendo-se assim a posição para a próxima iteração. A velocidade v_i^t é obtida por meio da Equação 7, na qual o componente cognitivo é calculado com base na melhor posição já ocupada pela partícula i , representada por p_i , enquanto o fator social é calculado a partir da melhor posição global, indicada por p_g [Silva et al. 2019].

$$v_i^t = wv_i^{t-1} + c_1r_1(p_i - x_i^{t-1}) + c_2r_2(p_g - x_i^{t-1}) \quad (7)$$

Além disso, w representa o peso inercial que pondera a influência da velocidade anterior v_i^{t-1} na nova velocidade. Já os coeficientes c_1 e c_2 correspondem aos pesos dos componentes cognitivos e sociais, respectivamente, e são multiplicados pelos valores aleatórios r_1 e r_2 , que são obtidos a partir de uma distribuição uniforme entre 0 e 1, representando o fator estocástico do algoritmo. Dessa forma, a combinação desses parâmetros ajustáveis permite controlar a exploração e a exploração do espaço de busca e afeta diretamente o desempenho do algoritmo [Silva et al. 2019].

Ao longo dos anos, diversas modificações foram propostas no algoritmo PSO para lidar com problemas de convergência prematura e falta de diversidade. Uma abordagem comum é diminuir linearmente o valor de w ao longo das iterações do algoritmo, conforme sugerido em [Shi and Eberhart 1998]. Para implementar a redução linear do peso inercial, pode-se utilizar a Equação 8, na qual t representa a iteração atual, t_{max} é o número máximo de iterações, e w_{max} e w_{min} são os valores máximo e mínimo de w , respectivamente [Kumar 2021].

$$w = w_{max} - \frac{t}{t_{max}}(w_{max} - w_{min}) \quad (8)$$

Outra abordagem é a variação dos coeficientes de aceleração c_1 e c_2 ao longo da execução, conforme proposto por [Ratnaweera et al. 2004]. Para tanto, decrementa-se c_1

e incrementa-se c_2 ao longo das iterações do algoritmo (Equação 9). Nestas equações, c_1^{max} e c_1^{min} representam os valores máximo e mínimo, respectivamente, para o componente cognitivo, enquanto c_2^{max} e c_2^{min} correspondem aos valores máximo e mínimo, respectivamente, para o componente social [Kumar 2021].

$$c_1 = c_1^{max} - \frac{t}{t_{max}}(c_1^{max} - c_1^{min}) \quad , \quad c_2 = c_2^{min} + \frac{t}{t_{max}}(c_2^{max} - c_2^{min}) \quad (9)$$

Essas modificações permitem uma maior exploração do espaço de busca no início e uma maior exploração das soluções encontradas no final do processo. Para aprimorar ainda mais esses aspectos do algoritmo, [Kumar 2021] propôs uma adaptação chamada *Multistage, Multiswarm* PSO (MS2PSO), que utiliza as técnicas de variação do peso inercial e dos coeficientes de aceleração, além de dividir o PSO em múltiplos estágios e enxames. Inicialmente, o algoritmo é composto por oito enxames e, ao atingir 20% das iterações, esses oito enxames são agrupados em quatro. Ao chegar a 40% das iterações, os quatro enxames restantes são agrupados em dois, que se unem em um único enxame ao atingir 60% das iterações.

3. Trabalhos Relacionados

No que se refere ao problema abordado, um dos trabalhos mais relevantes é o de [Chang et al. 2000]. Neste estudo, é apresentada uma extensão ao modelo média-variância, acrescentando restrições adicionais de cardinalidade e de limites de investimento. Os autores aplicaram as técnicas Algoritmo Genético (GA), Busca Tabu (TS) e *Simulated Annealing* (SA) na resolução do problema, disponibilizando um conjunto de dados e métricas de desempenho para comparação, que foram amplamente utilizadas como base em diversos trabalhos subsequentes.

Em [Silva et al. 2019], os autores propuseram uma abordagem baseada em PSO multi-objetivo para resolver diferentes formulações do problema. Essa pesquisa é considerada um dos primeiros trabalhos a abordar diferentes formulações do problema dentro de um mesmo *framework*. O algoritmo proposto emprega um procedimento de elitismo, que visa ranquear as partículas a cada iteração, determinando a melhor posição global, e selecionar as partículas que serão excluídas caso o número limite de partículas seja ultrapassado.

No estudo conduzido por [Kalayci et al. 2020], uma meta-heurística híbrida baseada em *Continuous Ant Colony Optimization* (CACO), GA e *Artificial Bee Colony* (ABC) foi utilizada para abordar o problema. O estudo empregou um procedimento de tolerância à inviabilidade das soluções e mecanismos de reparo adaptados. Os resultados mostraram que a meta-heurística híbrida apresentou boa convergência e se mostrou uma abordagem eficiente ao mesclar aspectos de cada um dos algoritmos.

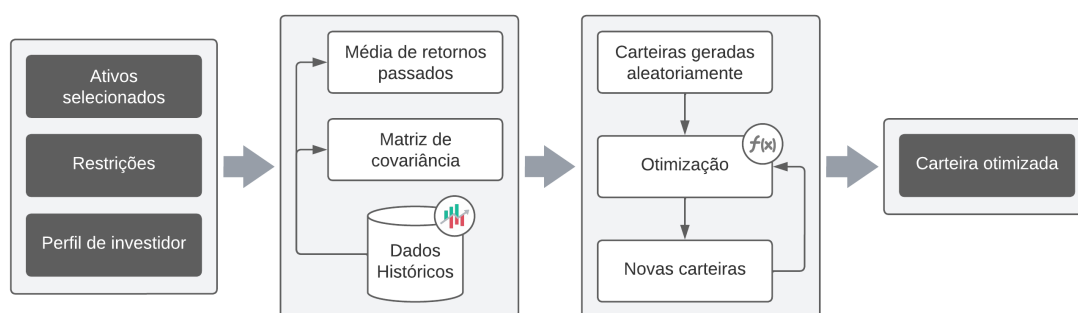
Em [Cura 2021], o autor afirma que devido ao grande número de abordagens eficientes já aplicadas na resolução do problema, considera-se que este encontra-se completo no que diz respeito à qualidade das soluções. No entanto, o autor destaca que o tempo computacional ainda é um fator limitante para muitas dessas técnicas. Desta forma, a pesquisa concentra-se em resolver o problema de maneira eficaz com um tempo computacional significativamente reduzido. Para tanto, o autor propõe um algoritmo ABC com

um método diferenciado para viabilizar as soluções encontradas. Os resultados obtidos demonstram a eficiência do algoritmo proposto.

4. Proposta

Nesta Seção, é apresentada uma abordagem para resolver o problema de seleção de carteiras de investimentos aplicado ao mercado brasileiro. A fim de avaliar a eficácia da abordagem e o desempenho das carteiras obtidas em diferentes janelas de tempo, este trabalho propõe a aplicação do algoritmo MS2PSO, cuja eficácia foi comprovada em comparação ao PSO convencional e outras variantes do PSO, conforme demonstrado por [Kumar 2021]. O processo proposto para obtenção de carteiras eficientes é ilustrado na Figura 1.

Figura 1. Processo de otimização de carteiras de investimentos



Fonte: Autoria própria

A entrada do problema inclui o perfil do investidor, representado pelo parâmetro de aversão ao risco $\lambda \in [0, 1]$, onde 0 indica nenhuma aversão e 1 total aversão ao risco. Além disso, também fazem parte da entrada a quantidade desejada de ativos na carteira, definida pelos parâmetros K_{min} e K_{max} , e o conjunto de ativos que serão considerados na elaboração da carteira, juntamente com seus limites inferior e superior, representados por ε_i e δ_i , respectivamente, para cada ativo i .

A partir do conjunto de ativos delimitados, são obtidos os dados históricos das cotações desses ativos, que correspondem ao preço diário de cada ativo em um período pré-determinado. A partir desses dados, é calculada a média dos retornos passados e a matriz de covariância entre os ativos. Essas informações são utilizadas posteriormente em conjunto com os pesos atribuídos a cada ativo e o valor de λ para calcular a função objetivo (Equação 4), a qual permite obter o valor de adequação (*fitness*) de cada solução. Inicialmente, são geradas carteiras de investimentos com ativos selecionados aleatoriamente do conjunto de ativos de entrada, e com pesos aleatórios atribuídos a cada ativo selecionado. Para garantir que as soluções sejam viáveis, toda vez que uma carteira é gerada ou atualizada, é aplicado um procedimento de reparo, que garante que ela respeite todas as restrições definidas.

No processo de otimização, tanto no PSO quanto no MS2PSO, cada partícula representa uma única carteira de investimentos. As soluções são modeladas utilizando dois vetores com a mesma dimensão do conjunto de ativos de entrada. O primeiro vetor, K , é binário e representa a presença ou ausência de um ativo na carteira, onde $K_i = 0$

indica a ausência do ativo i e $K_i = 1$ indica a presença. O segundo vetor, W , indica os pesos atribuídos a cada ativo na carteira, onde W_i representa o peso do ativo i .

Para cada partícula, é mantida a informação da melhor composição de ativos encontrada até o momento (p_i), enquanto o enxame mantém a informação da melhor composição de ativos já encontrada entre todas as suas partículas (p_g). No caso do MS2PSO, é necessário ainda manter informações sobre a melhor composição de ativos já encontrada entre todos os enxames (p_u). Assim, a cada iteração do processo de otimização, as partículas movem-se de acordo com a Equação 7, e são avaliadas em relação ao seu valor de *fitness*. Ao término da execução do algoritmo, a melhor composição de ativos encontrada é fornecida como saída. Nesse sentido, os vetores K e W referentes à partícula com o melhor valor de *fitness* registrado durante a execução são retornados.

5. Estudo Experimental

Foi realizado um estudo composto por dois experimentos para avaliar a eficácia da abordagem proposta. No primeiro experimento, foi avaliada a qualidade das soluções obtidas pelo algoritmo, comparando-as com *benchmarks* utilizados em outros estudos. Em seguida, no segundo experimento, foram simulados investimentos a partir das carteiras obtidas em diferentes janelas de tempo, com o objetivo de aferir o lucro ou prejuízo. Ambos os experimentos foram realizados em uma máquina equipada com processador Intel Core i5-8300H, 8GB de memória RAM e sistema operacional Pop!_OS 22.04.

A base de dados utilizada para avaliar o desempenho do algoritmo foi obtida da OR-Library¹ [Chang et al. 2000] e é amplamente utilizada na literatura para testes de problemas de seleção de carteiras. Os dados históricos compreendem o período de março de 1992 a março de 1997 e incluem as cotações dos índices Hang Seng, DAX 100, FTSE 100, S&P 100 e Nikkei 225. O uso dessa base de dados comum permite a comparação dos resultados obtidos nesta pesquisa com outros estudos. Neste trabalho, foram utilizados os índices Hang Seng, DAX 100 e S&P 100.

Foram implementados em Python o PSO convencional e o MS2PSO, tendo sido realizada uma etapa de ajuste de parâmetros. Para definir os valores iniciais dos parâmetros do PSO convencional, foram adotados os parâmetros utilizados por [Silva et al. 2019], sendo $w = 0.95$, $c_1 = 2.05$, $c_2 = 1.95$. Para melhor calibrar os parâmetros, o algoritmo foi testado diversas vezes em relação aos valores ótimos apresentados por [Cura 2021] para diferentes valores de λ em dados de índices obtidos da OR-Library. Os valores finais selecionados para os parâmetros do PSO convencional foram $w = 0.95$, $c_1 = 1.95$, $c_2 = 1.85$. Em seguida, com base nesses valores, foram calibrados os parâmetros para o MS2PSO, onde os valores finais escolhidos foram $w_{min} = 0.45$, $w_{max} = 1.05$, $c_1^{min} = 1.95$, $c_1^{max} = 2.10$, $c_2^{min} = 1.85$ e $c_2^{max} = 2.00$.

A configuração adotada para avaliar o desempenho dos algoritmos seguiu o padrão comumente utilizado na literatura para o problema de seleção de carteiras de investimentos com restrições de cardinalidade, onde os valores dos parâmetros foram estabelecidos em $k_{min} = 10$, $k_{max} = 10$, $\varepsilon_i = 0.01$ e $\delta_i = 1.00$. Adicionalmente, o tamanho da população foi fixado a um total de 80 partículas e o número máximo de iterações foi limitado a $t_{max} = 1000$.

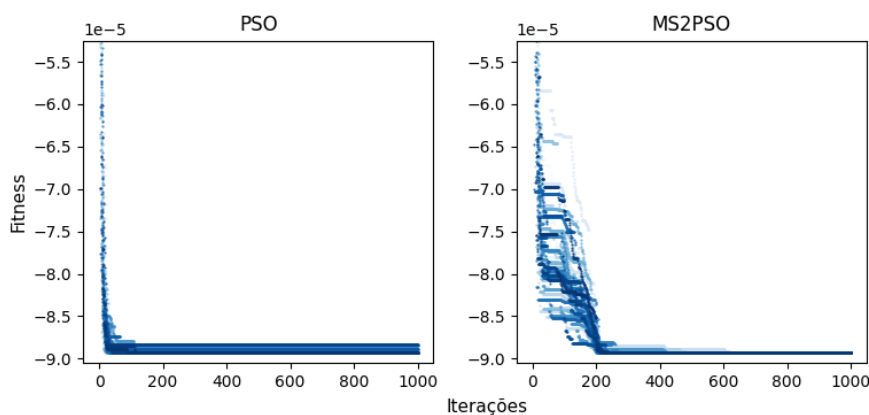
¹<http://people.brunel.ac.uk/%7Emastjjb/jeb/orlib/portinfo.html>

Para avaliar e comparar o desempenho dos algoritmos PSO e MS2PSO, cada algoritmo foi executado 50 vezes para determinados valores de λ em diferentes *datasets*. Em cada execução, foram registrados o menor e o maior valor de *fitness* obtidos pelos algoritmos, assim como a média. Vale ressaltar que, no contexto deste estudo, a qualidade do resultado é medida por meio da minimização do valor de *fitness*. Além disso, os resultados foram comparados com os obtidos pelo algoritmo ABC proposto por [Cura 2021], que se encontra no estado da arte. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1 e na Figura 2 é possível visualizar a convergência dos algoritmos para $\lambda = 0.86$ no índice Hang Seng.

Tabela 1. Estudo comparativo do desempenho dos algoritmos

<i>Dataset</i>		ABC ²	PSO	MS2PSO
Hang Seng $\lambda = 0,86$	Min	-8,924E-05	-8,924E-05	-8,924E-05
	Max	-8,924E-05	-8,830E-05	-8,924E-05
	Média	-8,924E-05	-8,910E-05	-8,924E-05
DAX 100 $\lambda = 0,32$	Min	-0,0057811	-0,0057777	-0,0057811
	Max	-0,0057811	-0,0057269	-0,0057727
	Média	-0,0057811	-0,0057606	-0,0057800
S&P 100 $\lambda = 0,44$	Min	-0,0041845	-0,0041845	-0,0041845
	Max	-0,0041845	-0,0041592	-0,0041829
	Média	-0,0041845	-0,0041750	-0,0041844

Figura 2. Convergência dos algoritmos - Hang Seng $\lambda = 0.86$



Fonte: Autoria própria

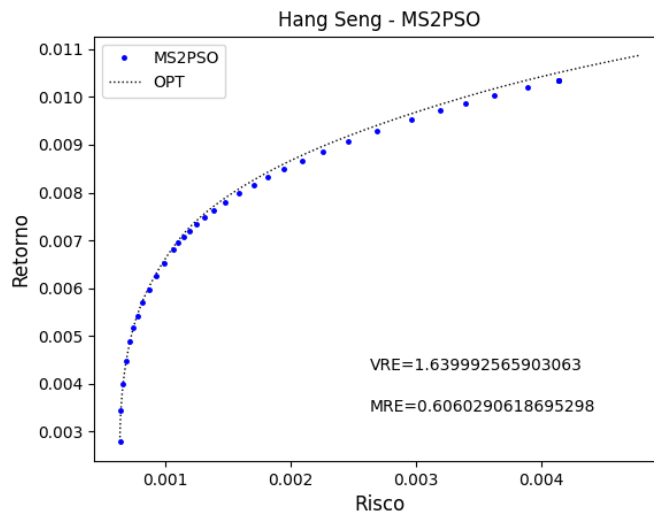
Com base nos resultados obtidos, conforme pode ser observado na Figura 2, verificou-se que o PSO apresenta convergência prematura, enquanto o MS2PSO tem uma convergência mais lenta, porém oferece resultados mais satisfatórios. Isso se deve, principalmente, aos mecanismos de estímulo à exploração no início do processo e à exploração no final, conforme descrito na Seção 2.2.

Para avaliar a fronteira eficiente gerada pelos algoritmos, foi seguido o padrão adotado em outros estudos. Inicialmente, o parâmetro λ foi fixado em 0 e incrementado

²Resultados obtidos em [Cura 2021].

em 0,02 até atingir o valor de 1, obtendo-se uma única solução para cada um dos 51 valores diferentes do parâmetro λ . Esse procedimento resultou em um conjunto de soluções não dominadas que compõem a fronteira eficiente. Na Figura 3 é possível visualizar a fronteira eficiente obtida pelo algoritmo MS2PSO no índice Hang Seng.

Figura 3. Fronteira eficiente obtida pelo algoritmo MS2PSO no índice Hang Seng



Fonte: Autoria própria

A Tabela 2 apresenta os resultados do estudo das fronteiras eficientes geradas pelo algoritmo MS2PSO em relação aos índices Hang Seng, DAX 100 e S&P 100. Neste estudo, foram utilizadas as métricas *Variance of Return Error* (VRE) e *Mean Return Error* (MRE), que são comumente empregadas na avaliação da fronteira eficiente no problema de seleção de carteiras de investimentos. Tais métricas permitem analisar a proximidade das soluções encontradas em relação à fronteira ótima, o que permite avaliar a qualidade dos resultados obtidos, sendo que valores menores indicam maior qualidade das soluções.

Tabela 2. Estudo comparativo das fronteiras eficientes geradas pelo MS2PSO

<i>Dataset</i>	Ativos	Métrica	ABC-HP³	ABC-LP³	MS2PSO
Hang Seng	31	VRE	1.6342	1.6367	1.6399
		MRE	0.5964	0.5981	0.6060
DAX 100	85	VRE	6.8326	6.8794	6.7934
		MRE	1.2357	1.2639	1.2767
S&P 100	98	VRE	2.5364	2.6034	2.6178
		MRE	0.8858	0.9040	0.7405

O segundo experimento teve como objetivo avaliar o desempenho do algoritmo MS2PSO na recomendação de carteiras de investimentos no mercado brasileiro, considerando diferentes perfis de risco e janelas de tempo. Para compor o conjunto de dados, foram selecionados os ativos que compuseram a carteira teórica do índice IBrX 50 no primeiro quadrimestre de 2021 e obtidos os dados históricos desses ativos no período

³Resultados obtidos em [Cura 2021].

de janeiro de 2018 a janeiro de 2021. Assim, foi simulado o investimento de um valor não especificado em 1º de janeiro de 2021, a fim de verificar o desempenho das carteiras recomendadas pelo algoritmo.

Para garantir a viabilidade da análise, foram excluídos do conjunto de dados os ativos que foram deslistados ou sofreram alteração no *ticker* desde o início do período avaliado até o ano do presente estudo, 2023. Além disso, também foram excluídos da análise ativos representativos de uma mesma empresa, porém com diferentes tipos, mantendo apenas o ativo com maior liquidez. Dessa forma, o conjunto de dados final contou com 42 ativos.

Com o objetivo de representar uma carteira simples para um pequeno investidor, foram definidas restrições de cardinalidade de forma arbitrária, com um mínimo de 10 e um máximo de 15 ativos na carteira. Além disso, como restrição de proporção de investimento, foi definido um limite mínimo de 1,5% para evitar investimentos pouco significativos, bem como um limite máximo de 10% para viabilizar carteiras com 10 ativos. Os resultados do experimento para cada perfil de risco e janela de tempo estão apresentados na Tabela 3, juntamente com a quantidade de ativos em cada carteira e o maior ganho e a maior perda registrados durante um período de 2 anos. Para avaliar o desempenho das carteiras, foi realizada uma comparação com o desempenho do índice Ibovespa no mesmo período. A Figura 4 ilustra o resultado das carteiras geradas para os perfis conservador e agressivo em relação ao Ibovespa.

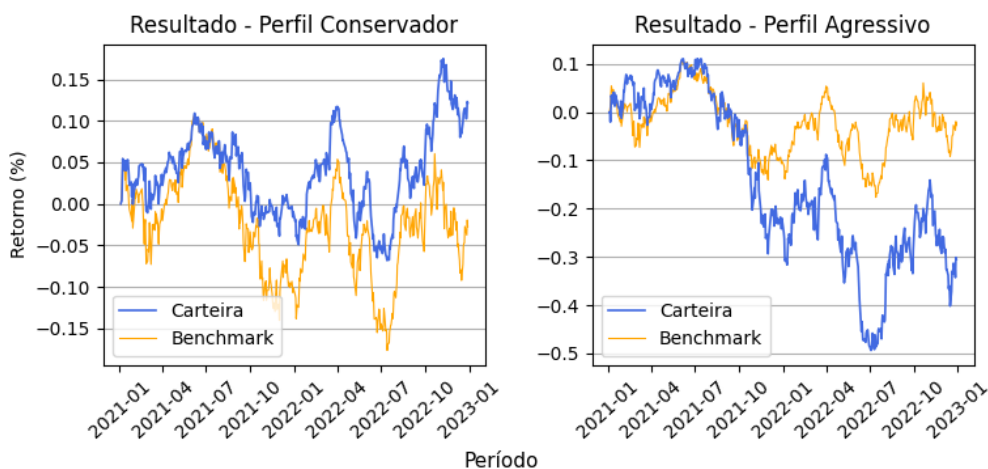
Tabela 3. Resultado obtido pelas carteiras recomendadas pelo algoritmo

Perfil	Ativos	6 meses	2 anos	Maior ganho	Maior perda
Conservador $\lambda = 1,00$	12	7,76%	12,15%	17,49%	-6,82%
Moderado-conservador $\lambda = 0,75$	14	14,06%	-0,09%	16,60%	-22,90%
Moderado $\lambda = 0,50$	11	11,32%	-4,99%	14,95%	-26,84%
Moderado-agressivo $\lambda = 0,25$	10	9,37%	-20,79%	14,76%	-42,51%
Aggressivo $\lambda = 0,00$	10	8,49%	-30,60%	11,09%	-49,44%
<i>Benchmark</i> (BOVA11)	-	7,08%	-2,74%	10,75%	-17,64%

A partir da análise dos resultados obtidos, constatou-se que as carteiras recomendadas pelo método proposto apresentaram desempenhos positivos e negativos, de acordo com o perfil de risco escolhido. As carteiras para o perfil conservador tenderam a possuir um número maior de ativos, sugerindo uma maior diversificação, enquanto as carteiras para o perfil mais agressivo atingiram a quantidade mínima permitida de ativos.

Em relação à janela de curto prazo de 6 meses, todas as carteiras recomendadas apresentaram resultados superiores ao *benchmark*, com destaque para a carteira de perfil moderado-conservador. Já em relação à janela de médio prazo de 2 anos, somente as carteiras de perfil conservador apresentaram desempenho superior ao do Ibovespa, enquanto

Figura 4. Resultado das carteiras geradas com perfil conservador e agressivo



Fonte: Autoria própria

a carteira mais agressiva registrou uma perda de -30,60% no período. Quanto ao maior ganho geral obtido durante o período, todas as carteiras superaram o *benchmark*, com uma tendência de maior ganho quanto mais conservadora a carteira. Em relação à maior perda, apenas a carteira conservadora obteve melhor desempenho que o Ibovespa, apresentando um *drawdown* máximo de -6,82% em comparação com -17,64% do Ibovespa.

Uma possível explicação para o desempenho superior das carteiras com perfil conservador reside no fato de que o período de análise abrangeu uma fase marcada por volatilidade e queda nos preços das ações, especialmente em relação às ações de maior risco. Essas ações costumam ser preferidas por investidores com perfis mais agressivos, pois oferecem ganhos potencialmente significativos durante períodos de mercado favorável. No entanto, elas também são mais suscetíveis a quedas expressivas em momentos de baixa no mercado.

6. Conclusão

Este estudo propôs uma abordagem baseada em meta-heurística para resolver o problema de seleção de carteiras de investimentos em ativos do mercado brasileiro. Para isso, utilizou-se a meta-heurística MS2PSO, comparando seus resultados com benchmarks comuns e validando o desempenho das carteiras geradas por meio de backtests em diferentes janelas de tempo. O estudo foi dividido em dois experimentos, nos quais o MS2PSO apresentou convergência mais lenta, mas resultados mais satisfatórios em relação ao PSO. Além disso, as carteiras recomendadas pelo método proposto apresentaram desempenhos positivos e negativos de acordo com o perfil de risco, superando o benchmark em relação ao maior ganho geral obtido durante o período em todas as carteiras.

Em termos de contribuições, este estudo propõe uma abordagem baseada em meta-heurística para a recomendação de carteiras de investimentos que se mostrou eficaz na resolução do problema de seleção de carteiras de investimentos no mercado brasileiro. Além disso, foram realizados estudos comparativos com base em dados utilizados em outras pesquisas e experimentos para simulação de investimentos reais com as carteiras recomendadas. Portanto, este estudo contribui para o desenvolvimento da área de finanças

e economia, fornecendo uma solução sofisticada e eficiente para a seleção de carteiras de investimentos.

Por fim, como possíveis trabalhos futuros, sugere-se que seja avaliado o desempenho da abordagem proposta em diferentes mercados financeiros, bem como a inclusão de novos ativos e outros critérios de seleção de carteiras. Além disso, é importante realizar mais estudos experimentais que levem em consideração diferentes janelas de tempo e perfis de investidores para avaliar a eficácia do método proposto em diferentes situações.

Referências

- Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J. E., and Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. Computers and Operations Research, 27:1271–1302.
- Cura, T. (2021). A rapidly converging artificial bee colony algorithm for portfolio optimization. Knowledge-Based Systems, 233(107505).
- Dhaini, M. and Mansour, N. (2021). Squirrel search algorithm for portfolio optimization. Expert Systems with Applications, 178:114968.
- Kalayci, C. B., Polat, O., and Akbay, M. A. (2020). An efficient hybrid metaheuristic algorithm for cardinality constrained portfolio optimization. Swarm and Evolutionary Computation, 54(100662).
- Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks, volume 4, pages 1942–1948, Perth. IEEE.
- Kumar, A. (2021). Multi-stage, multi-swarm pso for joint optimization of well placement and control.
- Li, X. and Clerc, M. (2019). Swarm intelligence. In Gendreau, M. and Potvin, J.-Y., editors, Handbook of Metaheuristics, volume 272 of International Series in Operations Research and Management Science, chapter 11, pages 353–384. Springer, Cham, 3 edition.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, 7(1):77–91.
- Ratnaweera, A., Halgamuge, S., and Watson, H. (2004). Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time-varying acceleration coefficients. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 8(3):240–255.
- Shi, Y. and Eberhart, R. C. (1998). Parameter selection in particle swarm optimization. In Porto, V. W., Saravanan, N., Waagen, D., and Eiben, A. E., editors, Evolutionary Programming VII, pages 591–600, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Silva, Y. L. T., Herthel, A. B., and Subramanian, A. (2019). A multi-objective evolutionary algorithm for a class of mean-variance portfolio selection problems. Expert Systems with Applications, 133:225–241.
- Wong, W. and Ming, C. I. (2019). A review on metaheuristic algorithms: Recent trends, benchmarking and applications. In 2019 7th International Conference on Smart Computing Communications (ICSCC), pages 1–5.