Caminhos mais longos em grafos

Susanna F. de Rezende[1*]
Orientadora: Yoshiko Wakabayashi[2]

[1] School of Computer Science and Communication
KTH Royal Institute of Technology – Estocolmo, Suécia

[2]Departamento de Ciência da Computação – IME-USP
Rua do Matão, 1010 – Cidade Universitária – CEP 05508-090
São Paulo, Brasil

`sfdr@kth.se, yw@ime.usp.br`

Abstract. *The central theme of this paper is the study of problems related to longest paths in graphs, both from a structural and an algorithmic point of view. The first part focuses on the study of problems motivated by the following question raised by T. Gallai in 1966: does every connected graph have a vertex common to all its longest paths? We briefly discuss known results and present our contributions. In the second part, we investigate the problem of finding a longest path in a graph, which is* **NP***-hard for arbitrary graphs. A full account of the results presented in this paper can be found in [de Rezende 2014].*

Resumo. *Neste trabalho, estudamos problemas sobre caminhos mais longos em grafos tanto do ponto de vista estrutural quanto algorítmico. A primeira parte tem como foco o estudo de problemas motivados pela seguinte questão levantada por T. Gallai em 1966: todo grafo conexo contém um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos? Discutimos brevemente alguns resultados da literatura acerca desses problemas e apresentamos nossas contribuições. Na segunda parte, investigamos o problema de encontrar um caminho mais longo em um grafo, o qual é* **NP***-difícil para grafos arbitrários. Uma versão completa dos resultados apresentados neste resumo pode ser encontrada em [de Rezende 2014].*

1. Introdução

Problemas envolvendo caminhos são uns dos mais fundamentais na área de teoria dos grafos. Dentre esses, destaca-se o problema da existência e busca de caminhos de certos comprimentos. Neste trabalho, estudamos problemas sobre caminhos mais longos em grafos tanto do ponto de vista estrutural quanto algorítmico. Apresentamos um resumo de resultados da literatura bem como os resultados que obtivemos e que se encontram descritos em [de Rezende 2014].

*Durante a elaboração da dissertação de mestrado à qual este trabalho se refere, a autora encontrava-se no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. O trabalho foi financiado pela FAPESP (Proc. 2011/16348-0).

Neste artigo todos os grafos são simples, ou seja, não possuem arestas paralelas e nem laços. Seja G um grafo simples. A seguir, definimos os conceitos básicos e notações que são utilizados ao longo do texto.

Denotamos por $|G|$ a quantidade de vértices em G. Dado um caminho P em G, P é um *caminho mais longo*, se P é um caminho de comprimento máximo em G. Se C é um circuito em G tal que $|C| = |G|$, então C é um *circuito hamiltoniano* e G é dito *hamiltoniano*.

Uma *componente* de G é um subgrafo conexo maximal. Um *bloco* de G é ou um subgrafo 2-conexo maximal, ou um par de vértices ligados por uma aresta que não faz parte de uma componente 2-conexa, ou um vértice isolado. Um *bloco não trivial* é um subgrafo 2-conexo maximal.

Dado um bloco não trivial B de G, dizemos que um caminho P em G de comprimento pelo menos 1 é um *caminho pendente* de B se P intersecta B precisamente na sua origem e é maximal na direção do seu término.

Um grafo é *exoplanar* se possui uma imersão planar na qual todos os vértices pertencem à fronteira da face externa.

Uma 2-*árvore* é definida recursivamente da seguinte maneira. Uma aresta é uma 2-árvore. Todo grafo obtido a partir de uma 2-árvore adicionando-se um vértice novo e fazendo-o adjacente às extremidades de uma aresta existente é também uma 2-árvore.

2. Resultados estruturais

Em 1966, num colóquio na área de grafos, Gallai [Erdős and Katona 1968] perguntou se todo grafo conexo tem um vértice que aparece em todos os caminhos mais longos. Hoje, sabe-se que esse não é sempre o caso. Entretanto, o fato de que intersecção não vazia de *todos* os caminhos mais longos não ser uma propriedade comum a *todos* os grafos motivou investigações em duas vertentes desse problema: (1) identificar classes de grafos para as quais a pergunta de Gallai tem resposta positiva e (2) considerar a intersecção de um número menor de caminhos mais longos.

Em [de Rezende 2014], investigamos outros problemas relacionados a caminhos mais longos. Especificamente, estudamos resultados referentes a uma conjectura [Grötschel 1984, Hippchen 2008] que afirma que, em todo grafo k-conexo, quaisquer dois caminhos mais longos têm ao menos k vértices em comum. Ademais, investigamos resultados motivados pela seguinte pergunta de Walther [Walther 1969]: "existe inteiro j tal que, para todo grafo G, existe um conjunto de j vértices cuja intersecção com qualquer caminho mais longo é não vazia?". Devido à limitação de espaço, não tratamos dessas questões neste artigo.

2.1. Intersecção de todos os caminhos mais longos

Em [Klavžar and Petkovšek 1990], os autores apresentam algumas classes de grafos cujos caminhos mais longos possuem intersecção não vazia. Nos últimos anos, identificamos vários progressos nessa linha [Balister et al. 2004, de Rezende et al. 2013, Joos 2013, Ehrenmüller et al. 2013, Rautenbach and Sereni 2014]. Apresentamos a seguir duas de nossas contruibuições. Nomeadamente, mostramos que, em grafos exoplanares e em 2-árvores, todos os caminhos mais longos possuem um vértice em comum. Embora as provas desses resultados não sejam reproduzidas neste resumo, apresentamos as ideias das demonstrações.

Antes, porém, mencionamos um teorema de Klavžar e Petkovšek que utilizamos em nossas demonstrações. Os autores apresentam uma caracterização para grafos que têm um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos em termos de uma condição restrita aos seus blocos. O seguinte resultado segue da prova do Teorema 3.3 em [Klavžar and Petkovšek 1990].

Teorema 1. *Seja G um grafo conexo e seja $\mathcal{P}$ um conjunto qualquer de caminhos mais longos. Se não existe um vértice comum a todos os caminhos de $\mathcal{P}$, então existe um bloco de G que contém ao menos uma aresta de cada caminho de $\mathcal{P}$.*

Em vista desse resultado, para mostrar que todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum, basta provar que, para cada bloco B de G, todos os caminhos mais longos que usam ao menos uma aresta de B têm um vértice em comum. Usamos essa estratégia nas provas dos Teoremas 2 e 4.

Teorema 2. *Para todo grafo exoplanar conexo G, existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G.*

Seja B um bloco não trivial de G e seja P um caminho pendente mais longo de G. Provamos que qualquer caminho que não contém a origem de P (o vértice em $P \cap B$) não é um caminho mais longo. Para isso, utilizamos a estrutura planar de G e o fato de que B é hamiltoniano.

Teorema 3. *Para toda 2-árvore G, existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G.*

Dizemos que uma 2-árvore é não trivial se contém ao menos três vértices. Note que toda aresta em uma 2-árvore não trivial pertence a um triângulo. Seja Δ um triângulo em G. Para cada aresta e em Δ, denotamos por v_e o vértice de Δ no qual e não incide.

Seja P um caminho em um grafo G e $e = xy$ uma aresta desse grafo. Dizemos que e confina P se $P - x - y$ está contido em uma única componente de $G - x - y$. Além disso, definimos $C_e(P)$ como sendo a união dos conjuntos de vértices das componentes de $G - x - y$ que contêm ao menos um vértice de P. Usamos a notação simplificada $C_e(v)$ em vez de $C_e(P)$ quando P consiste apenas do vértice v.

O conceito definido a seguir tem um papel importante na prova do Teorema 3. Um triângulo Δ em um grafo conexo G é dito *forte* se, para cada aresta e em Δ, existe um caminho mais longo P em G tal que e confina P, e $C_e(P) = C_e(v_e)$.

A ideia da prova é mostrar que existe um triângulo forte e que, para qualquer triângulo forte Δ, um dos vértices de Δ necessariamente está em todos os caminhos mais longos.

2.2. Intersecção de três caminhos mais longos

Embora seja fácil provar que quaisquer dois caminhos mais longos têm um vértice comum, não é sabido se quaisquer três caminhos mais longos também compartilham um vértice. Essa questão foi levantada explicitamente por T. Zamfirescu no anos 80.

Em [Axenovich 2009], Axenovich provou que quaisquer três caminhos mais longos em um grafo exoplanar têm um vértice em comum. Em [de Rezende 2014], respondemos afirmativamente à questão de Zamfirescu para grafos em que todo bloco não trivial é hamiltoniano. Note que esse último resultado e o Teorema 2 generalizam o resultado de Axenovich.

Teorema 4. *Se G é um grafo conexo em que todos os blocos não triviais são hamiltonianos, então quaisquer três caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.*

Seja $\mathcal{P}$ um conjunto de três caminhos mais longos de G e suponha, por contradição, que $\bigcap_{P\in\mathcal{P}} P = \emptyset$. Pelo Teorema 1, existe um bloco B de G que contém pelo menos uma aresta de cada caminho em $\mathcal{P}$. Vamos supor que esse bloco seja não trivial, caso contrário o resultado é imediato.

Seja C um circuito hamiltoniano de B. A ideia da prova é mostrar que

$$\sum_{P\in\mathcal{P}} |P \cap B| \geq 2|C|.$$

Note que, se provarmos que esta desigualdade vale, então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, podemos concluir que existe pelo menos um vértice comum aos três caminhos de $\mathcal{P}$.

É interessante notar que Skupień [Skupień 1996] obteve, para $n \geq 7$, um grafo conexo no qual existem n caminhos mais longos cuja intersecção é vazia, mas quaisquer $n-1$ caminhos mais longos têm um vértice em comum. Isso motiva a seguinte pergunta mais geral: qual o maior inteiro p tal que quaisquer p caminhos mais longos, em um grafo conexo, têm um vértice em comum? Até hoje, sabe-se apenas que $2 \leq p \leq 6$.

3. Resultados algorítmicos

Sob o ponto de vista algorítmico, temos o problema clássico, chamado o *problema do caminho mais longo*, que consiste em encontrar um caminho de comprimento máximo em um grafo. Sabe-se que esse problema é **NP**-difícil [Garey and Johnson 1979] mesmo quando restrito a certas classes de grafos. Esse resultado motiva investigações em duas vertentes. Pode-se investigar classes especiais de grafos para as quais existem algoritmos polinomiais, ou pode-se abrir mão da busca de um caminho mais longo e projetar um algoritmo eficiente que encontra um caminho cujo comprimento seja "próximo" do comprimento de um mais longo.

Existem classes de grafos para as quais já se conhece algoritmo polinomial para resolver o problema do caminho mais longo. O primeiro resultado nessa linha deve-se a Dijkstra, que em 1960 propôs um algoritmo linear bem simples para resolver o problema em árvores. Desde então, resultados semelhantes para outras classes de grafos foram obtidos. Em [de Rezende 2014] tratamos mais desse problema e apresentamos alguns dos algoritmos para certas classes de grafos.

Com relação a algoritmos de aproximação para o problema de encontrar um caminho mais longo, o primeiro resultado surgiu em 1985. Monien [Monien 1985] apresentou um modo mais eficiente (embora ainda exponencial) de encontrar um caminho mais longo, o que tornou possível encontrar, em tempo polinomial, caminhos de comprimento $\Omega(\log n/\log\log n)$, se tais caminhos existirem. Dez anos depois, Alon, Yuster e Zwick [Alon et al. 1995] desenvolveram o método de codificação por cor *(color-coding)* que permite encontrar, em tempo polinomial, um caminho de comprimento logarítmico no número de vértices do grafo, se tal caminho existir. Björklund e Husfeldt [Björklund and Husfeldt 2003] exibiram um algoritmo polinomial que encontra um caminho de comprimento $\Omega(\log^2 L/\log\log L)$, onde L é o comprimento de um caminho mais longo. A melhor razão de aproximação conhecida até hoje foi obtida por Gabow e Nie [Gabow and Nie 2008] em 2008. Eles mostraram que é possível encontrar um caminho de comprimento $2^{\Omega(\sqrt{\log L})}$. Esses resultados também são estudados em detalhes em [de Rezende 2014].

É natural perguntar se é possível melhorar esse resultado ou se uma razão de aproximação melhor implicaria $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Na realidade, falta ainda compreender melhor os aspectos relativos à inaproximabilidade do problema do caminho mais longo [Feder et al. 2002]. Sabemos que o problema não pode ser aproximado por uma razão constante em tempo polinomial a menos que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, nem por uma razão $2^{O(\log^{1-\epsilon} n)}$ para qualquer constante $\epsilon > 0$ a menos que $\mathbf{NP} \in DTIME(2^{\log^{1/\epsilon} n})$ [Karger et al. 1997].

Observe que os resultados de aproximação conhecidos estão bem distantes dos resultados de inaproximabilidade. Dessa forma, não sabemos se o problema é de fato tão difícil como aparenta ser, e, portanto, seria possível provar resultados mais fortes de inaproximabilidade, ou se existiriam algoritmos de aproximação muito melhores que os apresentados na literatura.

4. Conclusão

Neste trabalho, apresentamos de forma resumida os principais resultados da dissertação de mestrado da autora sobre problemas relacionados aos caminhos mais longos em grafos. Vale ressaltar que a autora apresentou parte dos resultados da dissertação no *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications* (Eurocomb 2011) com publicação de resumo estendido apresentado na conferência [de Rezende et al. 2011] e que um artigo completo foi publicado em periódico [de Rezende et al. 2013] (trabalho feito em conjunto com C. Fernandes, D. Martin e Y. Wakabayashi).

Referências

Alon, N., Yuster, R., and Zwick, U. (1995). Color-coding. *J. ACM*, 42(4):844–856.

Axenovich, M. (2009). When do three longest paths have a common vertex? *Discrete Math. Algorithms Appl.*, 1:115–120.

Balister, P. N., Győri, E., Lehel, J., and Schelp, R. H. (2004). Longest paths in circular arc graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 13(3):311–317.

Björklund, A. and Husfeldt, T. (2003). Finding a path of superlogarithmic length. *SIAM J. Comput.*, 32(6):1395–1402 (electronic).

de Rezende, S. F. (2014). Caminhos mais longos em grafos. Master's thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

de Rezende, S. F., Fernandes, C. G., Martin, D. M., and Wakabayashi, Y. (2011). Intersection of longest paths in a graph. *Electron. Notes Discrete Math.*, 38(0):743 – 748. The Sixth European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2011.

de Rezende, S. F., Fernandes, C. G., Martin, D. M., and Wakabayashi, Y. (2013). Intersecting longest paths. *Discrete Math.*, 313(12):1401 – 1408.

Ehrenmüller, J., Fernandes, C. G., and Heise, C. G. (2013). Nonempty intersection of longest paths in series-parallel graphs. arXiv:1310.1376, submitted.

Erdős, P. and Katona, G., editors (1968). *Theory of Graphs.* Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary, September 1966. Academic Press, New York. Problem 4 (T. Gallai), p. 362.

Feder, T., Motwani, R., and Subi, C. (2002). Approximating the longest cycle problem in sparse graphs. *SIAM J. Comput.*, 31(5):1596–1607.

Gabow, H. N. and Nie, S. (2008). Finding long paths, cycles and circuits. In *Algorithms and Computation*, volume 5369 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 752–763.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and intractability.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.

Grötschel, M. (1984). On Intersections of Longest Cycles. In *Graph Theory and Combinatorics*, pages 171–189. Academic Press.

Hippchen, T. (2008). Intersections of longest paths and cycles. *Mathematics Theses*, 80(Paper 53).

Joos, F. (2013). Longest paths in circular arc graphs. arXiv:1312.3075.

Karger, D., Motwani, R., and Ramkumar, G. D. S. (1997). On approximating the longest path in a graph. *Algorithmica*, 18(1):82–98.

Klavžar, S. and Petkovšek, M. (1990). Graphs with nonempty intersection of longest paths. *Ars Combin.*, 29:43–52.

Monien, B. (1985). How to find long paths efficiently. *Ann. Discrete Math.*, 25:239–254.

Rautenbach, D. and Sereni, J.-S. (2014). Transversals of longest paths and cycles. *SIAM J. Discrete Math.*, 28(1):335–341.

Skupień, Z. (1996). Smallest sets of longest paths with empty intersection. *Combin. Probab. Comput.*, 5(4):429–436.

Walther, H. (1969). Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen. *J. Combin. Theory*, 6:1–6.