Convexidades em Grafos: Intermediações, Parâmetros e Conversões

Vinícius Fernandes dos Santos[1], **Jayme Luiz Szwarcfiter**[1,2], **Dieter Rautenbach**[3]

[1]Programa de Engenharia de Sistemas e Computação - COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

[2]Instituto de Matemática e Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

[3]Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm, Ulm, Germany

vinicius.santos@gmail.com, jayme@nce.ufrj.br, dieter.rautenbach@uni-ulm.de

Abstract. *Motivated by the concept of convexity, from Euclidean geometry, much work has been done on abstract convexities recently. In this thesis, the particular case of graph convexity is considered, which can be used to model many applications, such as influence on social networks, distributed systems and cellular automata, among others.*
We address problems involving betweenesses, the hull number, the Radon number, the Carathéodory number and conversions with deadlines in graphs. The results shown in this thesis include characterizations, efficient algorithms for determining parameters, NP-completeness proofs, and upper and lower bounds.

Resumo. *Inspirados no conceito de convexidade da geometria euclideana, diversos trabalhos envolvendo convexidades abstratas vêm sendo feitos recentemente. Nesta tese consideramos o caso particular de convexidades em grafos, o qual pode ser utilizado para modelar diversas aplicações, como influência em redes sociais, sistemas distribuídos e automata celular, dentre outras.*
São abordados problemas envolvendo intermediações, o número de envoltória, o número de Radon, o número de Carathéodory e conversões com limite de tempo em grafos. Os resultados apresentados compreendem caracterizações, algoritmos eficientes para a determinação de parâmetros, provas de NP-completude e limites superiores e inferiores.

1. Introdução

Grafos estão entre as estruturas mais importantes dentro da ciência da computação e são utilizados, por exemplo, para representar conexões entre computadores de uma rede e modelar relações entre indivíduos em uma rede social. Em aplicações envolvendo grafos, muitas vezes estamos interessados em caminhos entre um par vértices e também em identificar quais os nós intermediários que podem fazer parte destes caminhos. Isso motiva uma conexão com os conceitos matemáticos de intervalo e convexidade.

Outros modelos matemáticos estão relacionados à ideia de um elemento ser um intermediário entre outros dois, ainda que não haja relações explícitas como em um grafo. A este tipo de modelo, dá-se o nome de intermediação.

Os problemas apresentados nesta tese são de diversas naturezas, como provas de NP-completude, algoritmos polinomiais, limites superiores e inferiores e caracterizações estruturais. Além disso, os conceitos abordados apresentam aplicações nas mais diversas áreas como difusão de informações e infecções, física estatística, marketing viral, sistemas financeiros, sistemas distribuídos, autômatas celulares, redes sociais, sistemas imunológicos, biologia molecular e psicometria.

A seguir apresentamos a lista de trabalhos desenvolvidos e publicados ao longo doutorado que apresentam resultados relacionados a esta tese.

- On subbetweennesses of trees: hardness, algorithms, and characterizations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011 [Rautenbach et al. 2011b];
- Characterization and representation problems for intersection betweennesses. *Discrete Applied Mathematics*, 2011 [Rautenbach et al. 2011a];
- On minimal and minimum hull sets. *Electronic Notes in Discrete Mathematics. Latin-American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium (LAGOS)*, 2013 [Barbosa et al. 2013];
- Irreversible conversion processes with deadlines. *Journal of Discrete Algorithms*, 2013 [Rautenbach et al. 2014];
- On the Carathéodory number of interval and graph convexities. *Theoretical Computer Science*, 2013 [Dourado et al. 2013a];
- Algorithmic and structural aspects of the P_3-Radon number. *Annals of Operations Research*, 2013 [Dourado et al. 2013b];
- An upper bound on the P_3-Radon number. *Discrete Mathematics*, 2012 [Dourado et al. 2012b];
- Characterization and recognition of Radon-independent sets in split graphs. *Information Processing Letters*, 2012 [Dourado et al. 2012c];
- On the Radon number for P_3-convexity. *Electronic Notes in Computer Science. Latin American Theoretical Informatics (LATIN)*, 2012 [Dourado et al. 2012a];

Além destes, outros trabalhos foram desenvolvidos ao longo do doutorado, em outros problemas relacionados a teoria de grafos:

- Characterizing Clique Graphs of Chordal Comparability Graphs. Aceito para publicação no periódico *Matematica Contemporanea*, 2014 [Habib et al. 2014];
- On total coloring and equitable total coloring of cubic graphs with large girth. *Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW)*, 2013 [Dantas et al. 2013].

Devido às restrições de espaço, as referências fornecidas são aquelas cujo autor da tese teve participação. No texto original da tese, apenas uma seleção dos resultados obtidos ao longo do doutorado foi apresentada. Resultados adicionais foram apresentados nos anexos da tese, contendo os artigos originais. Optamos por apresentar neste resumo a mesma seleção de resultados, deixando a cargo do leitor a consulta aos artigos originais disponíveis nos apêndices, de acordo com seu interesse. Além disso, todas as provas dos resultados obtidos serão omitidas, bem como diversas definições. Uma interpretação informal dos resultados será dada, para facilitar a compreensão de leitores de outras áreas. Definições detalhadas dos problemas estudados podem ser encontrada no texto da tese.

2. Intermediações

Formalmente, intermediações são conjuntos de triplas da forma (a, b, c), representando que o elemento b está entre os elementos a e c. Esta abstração não pressupõe uma estrutura subjacente como um grafo. Ainda assim, intermediações dão origem a problemas interessantes até mesmo em grafos de estrutura extremamente restrita, como caminhos. Um dos problemas que consideramos pode ser interpretado como: dada uma intermediação, existe uma árvore que satisfaça todas as triplas da intermediação? A complexidade deste problema e de uma outra versão do mesmo foi determinada.

Teorema 1 ([Rautenbach et al. 2011b]) SUBINTERMEDIAÇÃO DE UMA ÁRVORE *é NP-Completo.*

Teorema 2 ([Rautenbach et al. 2011b]) SUBINTERMEDIAÇÃO INDUZIDA DE UMA ÁRVORE *pode ser resolvido em tempo polinomial.*

Um resultado de caracterização, generalizando um resultado presente na literatura para árvore, foi tambem desenvolvido:

Teorema 3 ([Rautenbach et al. 2011b]) *Seja V um conjunto finito. Se $\mathcal{B} \subseteq V_s^3$ é um conjunto de triplas estritas, então existe uma floresta F tal que $\mathcal{B}_s(F) = \mathcal{B}$ se e somente se $\mathcal{B}$ satisfaz os axiomas (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) e (F_5).*

Foi também considerado um tipo particular de intermediação bastante interessante, denominado intermediação de interseção, no qual conjuntos são associados aos elementos do nosso conjunto principal (digamos, listas de interesses associadas a indivíduos) e um elemento está entre outros dois caso seu conjunto associado contenha a interseção dos conjuntos associados aos outros dois.

O resultado a seguir se refere a uma caracterização das intermediações de interseção e, em particular, dá um limite quadrático para o número de elementos necessários para a construção de uma intermediação dada. Este teorema se refere a intermediações não estritas, mas para o caso de intermediações estritas foi determinado resultado de natureza similar.

Teorema 4 ([Rautenbach et al. 2011a]) *Seja V um conjunto finito e $\mathcal{B} \subseteq V^3$.*

(i) Se existe uma família de subconjuntos $\mathcal{M} = (M_v)_{v \in V}$ com intermediação de interseção não estrita $\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ satisfaz os axiomas (I_1), (I_3) e (I_4).

(ii) Se $\mathcal{B}$ satisfaz os axiomas (I_1), (I_3) e (I_4), então existe uma família de conjuntos $\mathcal{M} = (M_v)_{v \in V}$ com intermediação de interseção não estrita $\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \mathcal{B}$ e $\left| \bigcup_{v \in V} M_v \right| \leq \binom{|V|}{2}$, que pode ser construída em tempo polinomial.

Em particular, mostramos que, quando a uma intermediação corresponde a uma intermediação de uma árvore, então é possível determinar uma família de subconjuntos de um conjunto de tamanho linear no tamanho da árvore tal que a intermediação de interseção associada a esta família é exatamente a intermediação da árvore.

Teorema 5 ([Rautenbach et al. 2011a]) *Seja T uma árvore com n vértices e l folhas. Existe uma família de conjuntos $\mathcal{M} = (M_v)_{v \in V(T)}$ tal que $\mathcal{B}_s(T) = \mathcal{B}_s(\mathcal{M})$ e $\left| \bigcup_{v \in V(T)} M_v \right| \leq 2n - l - 2$.*

3. Convexidade

A envoltória convexa, o número de Carathéodory e o número de Radon são parâmetros de convexidades abstratas que surgiram a partir de generalizações de resultados clássicos da geometria euclideana. Em grafos, conjuntos convexos podem ter diversas interpretações. As duas convexidades consideradas nesta tese são as convexidades P_3 e geodética. A convexidade P_3 é relacionada a problemas de conversão, onde nós são influenciados pelas escolhas dos nós vizinhos. Já a convexidade geodética é relacionada a problemas de caminhos mínimos em grafos. Em termos gerais, conjuntos convexos nestas convexidades corresponderiam a conjuntos onde nenhum indivíduo externo ao conjunto é influenciado por indivíduos de dentro do conjunto e a conjuntos onde qualquer caminho mínimo entre dois elementos não sai do conjunto, respectivamente.

3.1. Número de envoltória

O problema de decisão associado ao número de envoltória era sabidamente NP-completo na convexidade P_3. Demonstramos que o mesmo ocorre mesmo quando nos restringimos a grafos bipartidos.

Teorema 6 NÚMERO DE ENVOLTÓRIA *é NP-completo na convexidade P_3 mesmo para grafos bipartidos.*

Embora a determinação do número de envoltória, que corresponde ao tamanho de um conjunto de envoltória mínimo, seja NP-difícil, encontrar um conjunto de envoltória minimal não é computacionalmente difícil, podendo ser feito através de um algoritmo guloso. Isso nos motiva a determinar o quão longe um conjunto minimal pode estar do mínimo. A esse respeito, demonstramos os seguintes resultados para grafos gerais e tambem restritos a classes específicas.

Teorema 7 ([Barbosa et al. 2013]) *Se U é um conjunto de envoltória minimal na convexidade P_3, então $|U| \leq h(G)c(G)$, onde $h(G)$ é o número de envoltória e $c(G)$ é o número de Carathéodory.*

Teorema 8 ([Barbosa et al. 2013]) *Se G é um grafo cúbico de ordem n e U é um conjunto de envoltória minimal de G na convexidade P_3, então $\frac{n}{4} < |U| \leq \frac{n}{2}$.*

Teorema 9 ([Barbosa et al. 2013]) *Se G é cordal biconexo com $V(G) \geq 2$, então todo conjunto de envoltória minimal na convexidade P_3 tem tamanho 2.*

Teorema 10 ([Barbosa et al. 2013]) *Se G é cografo conexo e U é um conjunto de envoltória minimal na convexidade P_3, então U é mínimo.*

3.2. Número de Carathéodory

O número de Carathéodory pode ser interpretado como o grau interdependência entre os vértices de um grafo. Se o número de Carathéodory é grande, então existe algum vértice que depende de muitos outros para pertencer a um conjunto. Por outro lado, se o número de Carathéodory é pequeno, então qualquer vértice pode ser gerado a partir de poucos.

Os resultados obtidos a respeito do número de Carathéodory foram abrangentes, com aplicações não apenas em convexidades de caminhos, como as mencionadas convexidades P_3 e geodética, mas também em convexidades mais gerais, denominadas convexidades de r-intervalo. Estes resultados implicam em um limite superior justo para o número de Carathéodory de um grafo. Além disso, grafos satisfazendo a igualdade foram caracterizados.

Teorema 11 ([Dourado et al. 2013a]) *Se $(V, \mathcal{C})$ é uma convexidade de r-intervalo para algum $r \geq 2$ com número de Carathéodory c, então*

$$c \leq \frac{(r-1)|V|+1}{r}.$$

Para o caso mais restrito da convexidade geodética, obtivemos o seguinte resultado justo.

Teorema 12 ([Dourado et al. 2013a]) *O número de Carathéodory de grafos split na convexidade geodética é no máximo 3.*

Introduzimos ainda o seguinte problema, mais restrito que o problema original, mas que ainda assim é NP-completo.

Teorema 13 ([Dourado et al. 2013a]) NÚMERO DE CARATHÉODORY LOCAL *é NP-completo na convexidade P_3.*

3.3. Número de Radon

Como demonstramos em [Dourado et al. 2013b], a determinação do número de Radon é NP-difícil, até mesmo para grafos split, um classe de grafos bastante restrita. Assim, a busca por casos de resoluçao polinomial deveria se basear em classes bem estruturadas. Assim, obtivemos um algoritmo para árvores que, embora extremamente técnico e com diversos casos, pode ser implementado em tempo linear.

Teorema 14 ([Dourado et al. 2013b]) *O número de Radon de um grafo na convexidade P_3 pode ser determinado em tempo polinomial.*

4. Conversões com limite de tempo

Nesta tese foi introduzido o problema de conversões com limite de tempo generalizando o problema de conversões no qual um nó é infectado quando a quantidade de vizinhos infectados for maior que um limiar. Adicionamos um limite de tempo para cada vértice que representa o limite máximo de iterações que podem ocorrer antes de um vértice ser infectado. Esta restrição é necessária para a modelagem de situações onde queremos que uma disseminação ocorra em determinada janela de tempo. Este problema generaliza diversos problemas NP-difíceis, como os clássicos conjunto independente e número de dominação, além de variações do problema de dominação em grafos, dentre outros. Ainda assim, foram obtidos algoritmos polinomiais para algumas classes de grafos.

Teorema 15 ([Rautenbach et al. 2014]) *Existe um algoritmo que encontra um conjunto de conversão de tamanho mínimo em tempo polinomial para florestas.*

Muito embora diversos problemas sejam de solução trivial para grafos completos, isto não ocorre neste caso. Alem disso, quando os grafos considerados são completos, o problema se assemelha a alguns problemas de escalonamento de tarefas.

Teorema 16 ([Rautenbach et al. 2014]) *Existe um algoritmo que encontra um conjunto de conversão de tamanho mínimo em tempo polinomial para grafos completos.*

5. Conclusão

A riqueza do tema pode ser verificada pela diversidade e quantidade dos resultados obtidos bem como a quantidade de resultados relacionados presentes na literatura recente. Em particular, o próprio autor da tese continua trabalhando ativamente nos temas, com resultados recentes [Ramos et al. 2014, Araújo et al. 2014].

Referências

Araújo, R., Sampaio, R. M., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. (2014). The convexity of induced paths of order three and applications: complexity aspects. Submetido ao periódico *Discrete Applied Mathematics*.

Barbosa, R., Rautenbach, D., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. L. (2013). On minimal and minimum hull sets. In *Electronic Notes in Discrete Mathematics. Proceedings of the VII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS)*, volume 44, pages 207 – 212.

Dantas, S., de Figueiredo, C. M. H., Mazzuoccolo, G., Preissmann, M., dos Santos, V. F., and Sasaki, D. (2013). On total coloring and equitable total coloring of cubic graphs with large girth. In *Proceedings of 12th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2013)*, pages 79–83, Enschede.

Dourado, M. C., Rautenbach, D., dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., and Szwarcfiter, J. L. (2013a). On the Carathéodory number of interval and graph convexities. *Theoretical Computer Science*, 510(0):127 – 135.

Dourado, M. C., Rautenbach, D., dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., Szwarcfiter, J. L., and Toman, A. (2012a). On the Radon number for P_3-convexity. In *LATIN*, volume 7256 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 267–278. Springer.

Dourado, M. C., Rautenbach, D., dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., Szwarcfiter, J. L., and Toman, A. (2012b). An upper bound on the P_3-Radon number. *Discrete Mathematics*, 312(16):2433 – 2437.

Dourado, M. C., Rautenbach, D., dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., Szwarcfiter, J. L., and Toman, A. (2013b). Algorithmic and structural aspects of the P_3-Radon number. *Annals of Operations Research*, 206(1):75–91.

Dourado, M. C., Rautenbach, D., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. L. (2012c). Characterization and recognition of Radon-independent sets in split graphs. *Information Processing Letters*, 112(24):948 – 952.

Habib, M., Julien, D., McConnell, R., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. L. (2014). Characterizing clique graphs of chordal comparability graphs. Aceito para publição no periódico *Matematica Contemporanea*.

Ramos, I. d. F., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. L. (2014). Complexity aspects of the computation of the rank of a graph. Submetido ao periódico *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*.

Rautenbach, D., dos Santos, V. F., and Schäfer, P. M. (2014). Irreversible conversion processes with deadlines. *Journal of Discrete Algorithms*, 26:69 – 76.

Rautenbach, D., dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., and Szwarcfiter, J. L. (2011a). Characterization and representation problems for intersection betweennesses. *Discrete Applied Mathematics*, 159(5):389 – 395.

Rautenbach, D., dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., and Szwarcfiter, J. L. (2011b). On subbetweennesses of trees: Hardness, algorithms, and characterizations. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(12):4674 – 4681.