

Sobre Ordens e Grafos de Intervalo

Márcia R. Cerioli^{1,2}, Fabiano de S. Oliveira^{1*}, Jayme L. Szwarcfiter^{1,2,3}

¹COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal 68511 – 21941-972 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

²Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal 68530 – 21941-972 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

³Núcleo de Computação Eletrônica – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal: 2324 - 20010-974 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

{cerioli, fabsoliv}@cos.ufrj.br, jayme@nce.ufrj.br

Abstract. *The thesis summarized in this work has as focus the study of structural properties of interval graphs and orders and the complexity of recognizing them. In particular, (i) we provide characterizations of extreme cliques and homogeneously-clique representable graphs; (ii) we introduce a new order dimension named linear-interval dimension, showing the close existing relation to the recognition problem of PI graphs; (iii) we provide the state-of-the-art knowledge about the interval count problem, presenting the known results in literature; and (iv) we provide efficient algorithms for the computation of the interval count of generalizations of threshold graphs.*

Resumo. *A tese resumida neste trabalho tem como foco o estudo de propriedades estruturais de grafos e ordens de intervalo e a complexidade em reconhecê-las. Em particular, (i) fornecemos caracterizações de cliques extremas e grafos representáveis por cliques homogêneas; (ii) introduzimos uma nova dimensão de ordens chamada dimensão linear-intervalar, mostrando sua conexão com o problema de reconhecimento de grafos PI; (iii) provemos o estado-da-arte do problema de contagem de intervalos, apresentando os resultados existentes na literatura; e (iv) fornecemos algoritmos eficientes para a computação da contagem de intervalos de generalizações de grafos de limiar.*

1. Introdução

Um grafo G é um *grafo de interseção* se podemos associá-lo a uma família de conjuntos, cada vértice correspondendo a um conjunto, de forma que uv é uma aresta de G se e somente se os conjuntos correspondentes a u e v têm interseção não-vazia; tal família de conjuntos é chamada um *modelo de interseção* de G . Restringindo-se os modelos de interseção pela especificação de propriedades que os modelos devam atender, diferentes classes de grafos de interseção são definidas. Um *grafo de intervalos* é o grafo de interseção de uma família de intervalos da reta real, chamada de um *modelo de intervalos*. A Figura 1 exemplifica um grafo de intervalo e três de seus modelos de intervalos.

*Esta tese foi orientada por Márcia Cerioli e Jayme Szwarcfiter e apresentada em Mar/2011 à COPPE/UFRJ para a obtenção do grau de D. Sc., com financiamento do CNPq (bolsa de doutorado). Versão completa: http://www.cos.ufrj.br/~fabsoliv/TeseFabiano_v7.pdf

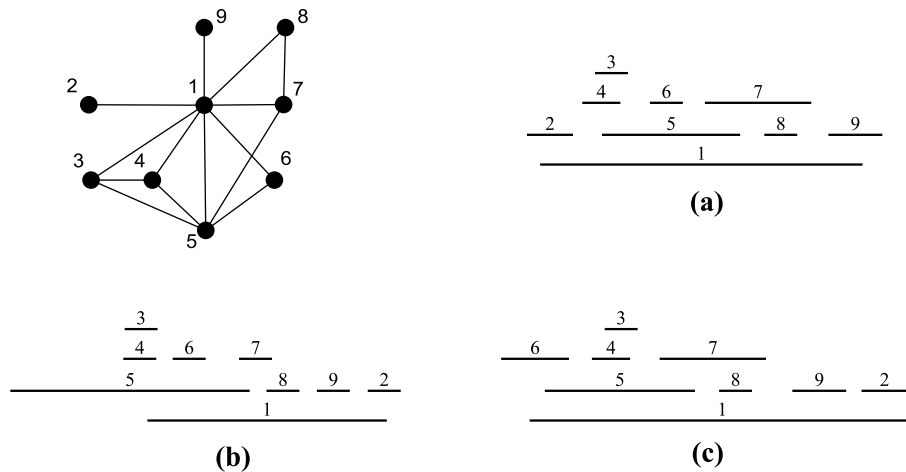


Figura 1. Grafo de intervalo e três de seus modelos de intervalos.

Existem muitos estudos sobre grafos e ordens de intervalo, tanto pelo interesse puramente teórico, quanto pelo papel central que desempenham em certas aplicações [Roberts 1976, Fishburn 1985, Golumbic and Trenk 2003]. Eles surgem em muitas aplicações práticas que requerem a construção de uma linha do tempo onde, a cada evento relacionado ao problema, corresponde um intervalo representando a sua duração. Conforme [Pe'er and Shamir 1997], dentre tais aplicações, estão aquelas relacionadas a planejamento, alocação de tarefas, arqueologia, lógica temporal, diagnóstico médico e desenho de circuitos integrados. Há também aplicações não relacionadas com eventos numa linha de tempo. Nesta categoria, estão aplicações na área de genética, problema do mapeamento físico de DNA e psicologia comportamental.

Um *grafo PI* é o grafo de interseção de uma família de triângulos ABC entre duas retas paralelas distintas L_1 e L_2 tal que A pertence a L_1 e \overline{BC} pertence a L_2 ; tal modelo é chamado um *modelo PI*. A Figura 2 ilustra um grafo PI e um de seus modelos PI.

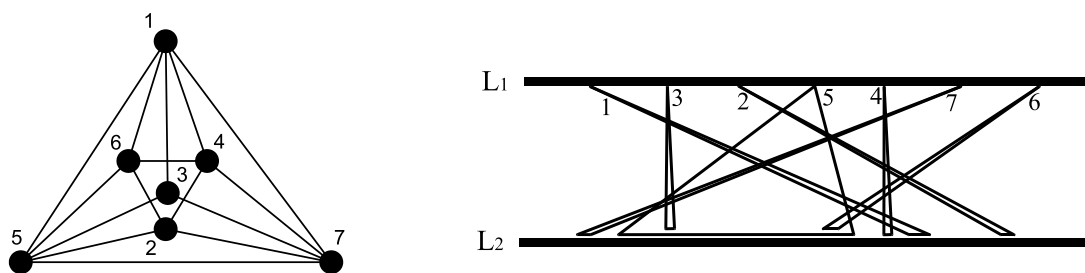


Figura 2. Um grafo PI e um modelo PI.

Os grafos PI foram definidos por Corneil e Kamula em 1987 e, desde então, o problema do reconhecimento desta classe está em aberto, apesar do esforço no intuito de resolvê-lo [Lin 2002, Spinrad 2003, Oliveira 2006]. É fácil ver que a classe dos grafos PI contém a classe dos grafos de intervalos, pois restringindo-se $A \in [B; C]$ para todo triângulo, tornamos modelos PI equivalentes a modelos de intervalos, dado que dois triângulos se interceptam em modelos com tal restrição se e somente se os intervalos correspondentes às suas bases se interceptam.

O objetivo da tese é o de estudar problemas relacionados a grafos e ordens de intervalo. A saber, estudamos o problema das cliques extremas, a dimensão linear-intervalar de ordens em geral (que consiste da busca de realizadores intervalares de ordens com certas propriedades) e a contagem de intervalos de grafos e ordens, que serão devidamente introduzidos na próxima seção. A motivação para o estudo destes problemas estruturais e de difícil abordagem é essencialmente a obtenção de um entendimento maior acerca destas classes de grafos e ordens. Este estudo teórico se justifica portanto devido à grande aplicabilidade dos grafos e ordens de intervalo em problemas do mundo real. Objetivos desta natureza – o de gerar conhecimento de novas propriedades estruturais – são necessários para uma melhor elaboração e avaliação de algoritmos para tais problemas.

2. Resumo da Tese e Resultados Obtidos

Nesta seção apresentamos um resumo dos problemas abordados e das principais contribuições da tese.

O primeiro problema abordado é o de cliques extremas. Considere um modelo de intervalo de um grafo e uma reta vertical cortando perpendicularmente um conjunto de intervalos deste modelo. Os vértices correspondentes aos intervalos que são cortados por tal reta, por construção, são adjacentes entre si no grafo e, portanto, constituem um clique deste grafo. Por outro lado, é fácil mostrar que dado um modelo de intervalo, a cada clique pode-se fazer corresponder uma reta vertical que corta precisamente os intervalos associados a vértices desta clique. A *ordenação de cliques* de um dado modelo é a ordem linear sobre o conjunto de cliques do grafo tal que a clique C_i precede a clique C_j na ordem se e somente se a linha vertical correspondente a C_i está à esquerda no modelo daquela correspondente a C_j .

Uma clique C é uma *clique extrema* de um grafo de intervalo se existir um modelo de intervalo tal que C é a primeira clique (clique mínima) da ordem de cliques deste modelo. Por exemplo, no modelo (a) da Figura 1 mostra que a clique $\{1, 2\}$ é uma clique extrema, enquanto o modelo (c) prova que a clique $\{1, 5, 6\}$ também é extrema. Contudo, nem toda clique é extrema. É fácil mostrar que não há uma ordenação de cliques de G na qual $\{1, 5, 7\}$ seja a primeira.

O problema de reconhecer uma clique extrema está relacionado a aplicações que constroem gradativamente da esquerda para a direita um modelo de intervalo de um grafo que modela um objeto de interesse desta aplicação. Naturalmente, tais aplicações devem proceder escolhendo como primeira clique da representação em construção uma clique extrema (caso contrário, não será possível gerar um modelo de intervalo completo). Como resultado da tese, caracterizamos condições necessárias e suficientes para uma clique ser extrema num grafo de intervalo através de subgrafos proibidos. Em seguida, caracterizamos os grafos cujas cliques são todas extremas, mostrando que tal classe é precisamente aquela dos grafos trivialmente perfeitos, definida em [Golombic and Trenk 2003] com motivação relacionada a coloração e grafos perfeitos.

O próximo problema que a tese trata é da dimensão linear-intervalar de ordens. Uma *ordem* $P = (X, \prec)$ consiste de uma relação binária \prec irreflexiva e transitiva sobre um conjunto X . Se $x \prec y$ ou $y \prec x$, dizemos que x e y são *comparáveis* e, caso contrário, que são *incomparáveis*. Uma ordem é uma *ordem linear* se quaisquer dois elementos distintos são comparáveis. Uma ordem (X, \prec) é uma *ordem intervalar* se é

possível associar um modelo de intervalos $\{I_x \mid x \in X\}$ tal que $x \prec y$ se e somente se I_x está totalmente à esquerda de I_y . Uma ordem $P' = (X, \prec')$ é uma *extensão* de uma ordem $P = (X, \prec)$ se $x \prec y \implies x \prec' y$, e é uma *extensão linear* se P' for uma ordem linear. Similarmente, se a extensão P' for uma ordem intervalar, ela é dita ser uma *extensão intervalar*. A interseção de ordens $P \cap Q$ é a ordem R tal que $x \prec y$ em R se e somente se $x \prec y$ em P e Q . Seja L um conjunto $\{P_1, \dots, P_k\}$ de extensões de uma ordem P . Dizemos que L é um *realizador* de P se $P = \bigcap_{i=1}^k P_i$. A *dimensão linear* de P é o menor k para o qual existe um realizador de P contendo exatamente k extensões lineares. Analogamente, a *dimensão intervalar* de P é o menor k para o qual existe um realizador de P que contém precisamente k extensões intervalares.

Introduzimos o conceito de dimensão linear-intervalar de uma ordem P (notação: $lidim(P)$) como sendo o par ordenado (p, q) tal que: (i) a dimensão intervalar de P é p e (ii) dentre todos os realizadores intervalares mínimos de P , no mínimo q ordens de cada realizador são não-lineares. Provamos que o reconhecimento de um grafo PI (problema em aberto) é polinomialmente equivalente a reconhecer se $lidim(P) = (2, 1)$, para uma dada ordem P associada ao grafo. Provamos também que, para todo par ordenado (p, q) , existe um ordem P tal que $lidim(P) = (p, q)$.

Finalmente, abordamos o problema da contagem de intervalos. O *problema da contagem de intervalos* é aquele de determinar o menor número necessário de comprimentos de intervalo para representar um modelo de intervalo de um dado grafo ou ordem de intervalo. Por exemplo, os modelos (a) e (c) da Figura 1 mostram que 3 tamanhos distintos de intervalo são suficientes para representar o grafo da figura. Contudo, o modelo (b) ilustra que é possível representá-lo com 2 tamanhos apenas. Além disso, é fácil notar que este é o mínimo necessário, ou seja, não se pode representá-lo com um único tamanho. Logo, a contagem de intervalo deste grafo é igual a 2.

É fácil imaginar aplicações em que os modelos de interesse devem possuir o menor número de tamanhos distintos. Por exemplo, é conveniente que aplicações que representem intervalos de duração de eventos num congresso utilizem o menor número possível de durações distintas.

Apesar do caráter básico do problema da contagem de intervalos, surpreendentemente existem poucos resultados sobre ele. Parte da contribuição da tese sobre este tema é, portanto, o de fornecer uma visão abrangente e compreensiva dos resultados existentes na literatura e outros relacionados. Em seguida, apresentamos diversos resultados originais envolvendo a contagem de intervalos.

Mostramos que pode se assumir que os modelos de intervalo possuem extremos inteiros distintos sem afetar a contagem de intervalos da ordem ou grafo correspondente. Tal premissa é, em geral, bem natural a problemas relacionados a grafos e ordens de intervalo, mas não é direta para o problema da contagem de intervalos. Com efeito, movendo-se os extremos de intervalo, na tentativa de transformar um dado modelo de intervalo com extremos não-inteiros ou não-distintos em um outro com extremos inteiros distintos, potencialmente modifica-se o número de tamanhos de intervalo distintos se nenhum cuidado é tomado neste sentido. Na tese, descrevemos então quais são tais cuidados e mostramos que esta premissa pode ser de fato assumida, o que acarreta em uma potencial simplificação na solução de outros problemas envolvendo contagem de intervalos.

O próximo tema relacionado é o aspecto combinatorial deste problema. Algoritmos de força-bruta com complexidades de tempo exponenciais são em geral evidentes para problemas combinatoriais. No entanto, mesmo de posse do resultado anterior, ainda não fica claro como utilizar um algoritmo força-bruta para resolver o problema da contagem de intervalo. Mesmo sob a premissa de que os extremos dos intervalos são números inteiros, como não se sabe um limite superior para o tamanho de tais modelos, ignora-se até quando é necessário enumerar possíveis soluções numa abordagem de força-bruta. Evidenciamos a natureza combinatorial do problema então através de uma decomposição do problema em uma série finita, embora exponencial, de programações lineares.

Por fim, trabalhamos no problema de contagem de intervalo quando restringe-se o grafo a pertencer a certas classes. Na literatura, sabia-se que as árvores, os grafos quase livres de garras, e os grafos de limiares são todos de contagem de intervalo no máximo 2. Estendemos este resultado para a classe dos grafos generalizados de limiar. Além disso, mostramos que as classes de grafos dos trivialmente perfeitos e os livres de touro-estendido possuem exemplos de grafos com contagem arbitrária de intervalo e descrevemos procedimentos eficientes de reconhecimento para tais classes.

3. Conclusão

A classe dos grafos de intervalo tem atraído o interesse de diversos pesquisadores há décadas por sua riqueza estrutural e ao seu emprego em diversas aplicações, resultando em diversos estudos teóricos sobre suas propriedades [Roberts 1976, Fishburn 1985, Golombic and Trenk 2003, Papadimitriou and Yannakakis 1979, Karp 1993].

Primeiramente, a tese trata do problema de cliques extremas em grafos de intervalo, onde estabelecemos mais uma propriedade estrutural desta classe. Neste estudo, caracterizamos as clique extremas de um grafo de intervalo por subgrafos induzidos proibidos. Além disso, caracterizamos a classe dos grafos cujas cliques são todas extremas. Os resultados desta pesquisa deram origem ao artigo *Extreme cliques in interval graphs* [Cerioli et al. 2010a], publicado pela *Ars Combinatoria* em 2010. Resultados parciais foram apresentados no *Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, na cidade de La Plata, Argentina, em 2006, constando em seus anais.

Em seguida, apresentamos o problema de reconhecimento dos grafos PI e o caracterizamos por meio da noção de dimensão linear-intervalar. Tal caracterização faz corresponder o problema de reconhecer um grafo PI ao de reconhecer se uma ordem que concorda com tal grafo possui determinada dimensão linear-intervalar. Mostramos que este novo conceito de dimensão não cria “buracos” (isto é, para todo valor de dimensão existe uma ordem exatamente com aquela dimensão). Estes últimos resultados foram recentemente compilados em um artigo, ainda sem submissão. Os resultados parciais deste artigo foram apresentados no *LAGOS (Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium)* em 2007, na cidade de Puerto Varas, Chile, e no *Workshop on Graph Theory and Applications* em 2006, na cidade de Porto Alegre, Brasil, constando nos respectivos anais. Uma publicação com resultados preliminares foi feita na *Electronic Notes in Discrete Mathematics* [Cerioli et al. 2008].

Por fim, apresentamos um resumo (*survey*) sobre o problema de contagem de intervalos, mostramos de maneira independente a relação que existe entre a contagem de intervalo de um grafo e o seu número de cliques. O artigo *On Representing an Interval*

Graph Using the Minimum Number of Interval Lengths [Cerioli et al. 2010b], publicado pela Matemática Contemporânea em 2010, representa esta parte do trabalho. Estes resultados foram apresentados no *Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, na cidade de Guanajuato, Mexico, em 2008, constando em seus anais.

Apresentamos também resultados originais sobre o tema de contagem de intervalo, em particular descrevemos uma computação eficiente da contagem de intervalo de grafos e ordens livres de touros estendidos [Cerioli et al. 2011]. Mostramos que podemos assumir, sem afetar a contagem de intervalo de uma ordem ou grafo de intervalo, que os modelos devem possuir os extremos distintos e inteiros. Além disso, evidenciamos a natureza combinatória do problema. Tais resultados foram publicados no artigo *On counting interval lengths of interval graphs* [Cerioli et al. 2011] publicado pela *Discrete Applied Mathematics* em 2011 e apresentados no *Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, na cidade de Itaipava, Brasil, em 2010.

Referências

- Cerioli, M. R., Oliveira, F. d. S., and Szwarcfiter, J. L. (2008). Linear-interval dimension and pi orders. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:111–116.
- Cerioli, M. R., Oliveira, F. d. S., and Szwarcfiter, J. L. (2010a). Extreme cliques in interval graphs. *Ars Combinatoria*, 94:103–114.
- Cerioli, M. R., Oliveira, F. d. S., and Szwarcfiter, J. L. (2010b). On representing an interval graph using the minimum number of interval lengths. *Matemática Contemporânea*, 39:59–67.
- Cerioli, M. R., Oliveira, F. d. S., and Szwarcfiter, J. L. (2011). On counting interval lengths of interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 159(7):532–543.
- Fishburn, P. C. (1985). *Interval Orders and Interval Graphs*. John Wiley & Sons.
- Golumbic, M. and Trenk, A. (2003). *Tolerance Graphs*. Cambridge University Press.
- Karp, R. M. (1993). Mapping the genome: some combinatorial problems arising in molecular biology. In *STOC '93: Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 278–285, New York. ACM.
- Lin, Y.-L. (2002). Triangle graphs and simple trapezoid graphs. *Journal of Information Science and Engineering*, 18(3):467–473.
- Oliveira, F. d. S. (2006). Caracterizações de grafos de interseção de triângulos. Master's thesis, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- Papadimitriou, C. H. and Yannakakis, M. (1979). Scheduling interval-ordered tasks. *SIAM Journal on Computing*, 8(3):405–409.
- Pe'er, I. and Shamir, R. (1997). Realizing interval graphs with size and distance constraints. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 10(4):662–687.
- Roberts, F. (1976). *Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems*. Prentice Hall.
- Spinrad, J. P. (2003). *Efficient Graph Representations*, volume 19 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society.