Grafos Pfaffianos e Problemas Relacionados

Alberto Alexandre Assis Miranda[1] ,
orientador: Cláudio Leonardo Lucchesi[1]
Doutorado em Ciência da Computação pelo
Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Caixa Postal 6176 – Cep 13.083-852 – Campinas – SP – Brasil

{alberto.miranda,lucchesi}@ic.unicamp.br

Abstract. *The area of Pfaffian graphs contains many open problems. In the thesis described here, we solve two problems related to Pfaffian graphs. The first result is a polynomial time algorithm to recognize near-bipartite Pfaffian graphs. Moreover, we extend this algorithm and the characterization of near-bipartite Pfaffian graphs to the class of half-bipartite graphs. The second result is obtaining several basic structural results concerning k-Pfaffian graphs. Using these results, we obtained a counter-example to Norine's conjecture, which states that the Pfaffian number of a graph is always a power of four: we present a graph whose Pfaffian number is 6.*

Resumo. *A área de grafos Pfaffianos apresenta muitos problemas em aberto. Na tese descrita aqui resolvemos dois problemas sobre grafos Pfaffianos. O primeiro problema resolvido é a obtenção de um algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos. Além disso, estendemos tanto o algoritmo como a caracterização de grafos quase-bipartidos Pfaffianos para a classe dos grafos meio-bipartidos. O segundo resultado é a obtenção de vários resultados estruturais básicos sobre grafos k-Pfaffianos. Utilizando esses resultados, obtivemos um contra-exemplo para a conjectura de Norine, que afirma que o número Pfaffiano de todo grafo é uma potência de quatro: apresentamos um grafo cujo número Pfaffiano é 6.*

A tese [Miranda 2009] a que este artigo se refere está disponível no endereço `http://www.ic.unicamp.br/˜miranda/tese.pdf`.

1. Grafos Pfaffianos

A definição de grafo Pfaffiano deriva da ideia de Tutte de usar o conceito de Pfaffiano na Teoria de Emparelhamentos. Em seu livro "Graph Theory As I Have Known It" [Tutte 1998], ele descreve como chegou à ideia de usar os Pfaffianos para determinar uma fórmula para o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo. Apesar de não ter sido bem sucedido em encontrar essa fórmula, Tutte conseguiu utilizar identidades envolvendo Pfaffianos para demonstrar o seu teorema famoso que caracteriza grafos que têm emparelhamentos perfeitos [Tutte 1947].

Seja D um grafo orientado. Se u e v são vértices de D, então uv representa a aresta que liga u e v, com origem u e destino v. Fixe uma enumeração $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ de

$V(D)$. Seja $M := \{v_1w_1, v_2w_2, \ldots, v_nw_n\}$ um emparelhamento perfeito de D. Então, o ***sinal*** $\mathrm{sgn}(M, D)$ de M em D é o sinal da permutação:

$$\pi(M, D) := \left(\begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ v_1 & w_1 & v_2 & w_2 & \ldots & v_n & w_n \end{array} \right),$$

onde o sinal $\mathrm{sgn}(\pi(M, D))$ de $\pi(M, D)$ é igual a $(-1)^t$, e t é o número de inversões da permutação. Podemos ver que o sinal de M é independente da ordem em que as arestas de M são listadas. Denotamos o conjunto dos emparelhamentos perfeitos de G por $\mathcal{M}(G)$, ou simplesmente $\mathcal{M}$ se G está subentendido. Dizemos que um grafo orientado D é ***Pfaffiano*** se todos os emparelhamentos perfeitos de D têm o mesmo sinal em D. Note que segue da definição de grafo Pfaffiano que todo grafo orientado D sem emparelhamento perfeito é Pfaffiano, dado que $\mathrm{sgn}(M, D)$ é vacuosamente constante para o conjunto vazio $\mathcal{M}(D)$ de emparelhamentos perfeitos M de D. A adoção de outra enumeração de $V(D)$ ou preserva o sinal de todos os emparelhamentos ou troca o sinal de todos os emparelhamentos. Portanto, a propriedade de ser Pfaffiano não depende da enumeração de vértices adotada. Seja G o grafo simples subjacente de um grafo orientado Pfaffiano D. Então dizemos que D é uma ***orientação Pfaffiana*** de G. Um grafo não-orientado é ***Pfaffiano*** se admite uma orientação Pfaffiana. Como exemplo de um grafo Pfaffiano, podemos citar o cubo. Como exemplo de grafo não-Pfaffiano, podemos citar o grafo $K_{3,3}$.

1.1. Matrizes Antissimétricas e Pfaffiano

A seguir mostraremos como o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo Pfaffiano se relaciona com o Pfaffiano de uma matriz. Seja $A := (a_{ij})_{2n\times 2n}$ uma matriz $2n\times 2n$. A matriz A é ***antissimétrica*** se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo par de índices i, j, com $1 \leq i, j \leq n$. Suponha que A seja antissimétrica. Seja $Q := \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \ldots, \{i_n, j_n\}\}$ uma partição em pares dos inteiros de 1 a $2n$. Seja

$$\begin{aligned} \pi_Q &:= \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \ldots & i_n & j_n \end{array} \right) \\ \langle a_Q \rangle &:= a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\ldots a_{i_nj_n} \\ a_Q &:= \mathrm{sgn}(\pi_Q)\langle a_Q \rangle. \end{aligned}$$

Observe que π_Q e $\langle a_Q \rangle$ não estão unicamente definidos, pois eles dependem da ordem em que os elementos de cada par de Q são enumerados em π_Q em $\langle a_Q \rangle$. Além disso, π_Q depende da ordem em que os pares de Q são enumerados. No entanto, afirmamos que a_Q é bem definido. O valor de a_Q não depende da ordem em que os pares de Q são enumerados, pois a troca de posição de dois pares na enumeração altera o número de inversões de π_Q de um número par, e também mantém o valor de $\langle a_Q \rangle$. O valor de a_Q também não depende da ordem de enumeração de dois elementos de um par, pois sua troca altera o sinal de π_Q, mas como A é antissimétrica, o sinal de $\langle a_Q \rangle$ também é trocado. O ***Pfaffiano*** da matriz antissimétrica A é definido como:

$$\mathrm{P}(A) := \sum_Q a_Q,$$

onde a soma é feita sobre todas as partições Q de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ em pares. O seguinte resultado é conhecido desde o século 19, como pode ser visto no livro escrito por Muir [Muir 1882] em 1882. Uma prova alternativa para este resultado pode ser encontrada no relatório técnico “Pfaffian Graphs” [Miranda and Lucchesi 2004, Teorema 1.2].

TEOREMA 1.1
Seja A uma matriz antissimétrica. Então

$$\textit{det}(A) = (\mathrm{P}(A))^2.$$

Como o cálculo do determinante toma tempo polinomial, é possível calcular o módulo do Pfaffiano de uma matriz antissimétrica em tempo polinomial.

Veremos agora a relação do Pfaffiano com o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo Pfaffiano. Seja D um grafo orientado simples com $2n$ vértices. Seja $A(D) = (a_{ij})_{2n\times 2n}$ uma matriz antissimétrica tal que:

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j) \in E(D) \\ -1, & \text{se } (j,i) \in E(D) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, dizemos que $A(D)$ é a *matriz antissimétrica de adjacência* de D. Seja $M := \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)\}$ um emparelhamento perfeito de D. O emparelhamento M induz naturalmente uma partição $Q(M)$ de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ em pares. Sendo assim, podemos definir $a_{Q(M)}$, $\pi_{Q(M)}$ e $\langle a_{Q(M)} \rangle$. Além disso, como D é um grafo orientado, M induz uma enumeração específica dos elementos de um par de $Q(M)$. Adotando esta enumeração, temos que $\langle a_{Q(M)} \rangle$ é sempre igual a 1. Portanto, $a_{Q(M)} = \mathrm{sgn}(\pi_{Q(M)}) = \mathrm{sgn}(\pi(M, D)) = \mathrm{sgn}(M, D)$. Então,

$$\mathrm{P}(A(D)) = \sum_{M\in\mathcal{M}} \mathrm{sgn}(M, D).$$

No caso de grafos Pfaffianos, temos que $\mathrm{sgn}(M, D)$ é constante, para todo emparelhamento perfeito M, e pertence a $\{-1, 1\}$. Sendo assim, se D é um grafo orientado Pfaffiano, $|\mathrm{P}(A(D))|$ é igual ao número de emparelhamentos perfeitos de D. Além disso, vimos anteriormente que é possível calcular $|\mathrm{P}(A(D))|$ em tempo polinomial. De fato, podemos calcular o número de emparelhamentos de um grafo orientado Pfaffiano em tempo polinomial.

1.2. Permanentes e Emparelhamentos Perfeitos

A seguir veremos que o problema de contar emparelhamentos perfeitos de um grafo é #P-completo. Seja $A := (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz quadrada $n \times n$. Para cada permutação π dos inteiros de 1 a n, seja $a_\pi := a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$. O *permanente* $\mathrm{prm}(A)$ de A é definido da seguinte forma:

$$\mathrm{prm}(A) := \sum_{\pi} a_\pi,$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações π dos inteiros de 1 a n. Note que a definição de a_π difere da definição de $\langle a_Q \rangle$ utilizada anteriormente na definição do Pfaffiano, sendo que a_π tem o dobro de fatores que $\langle a_Q \rangle$, para uma mesma matriz A.

Em 1979, Valiant [Valiant 1979] obteve o seguinte resultado. Uma prova alternativa pode ser encontrada no artigo de Ben-Dor e Halevi [Ben-Dor and Halevi 1995].

TEOREMA 1.2
Calcular o permanente de uma matriz de zeros e uns é $\#\mathrm{P}$*-completo.*

Reduzimos agora o permanente de uma matriz de zeros e uns à contagem de emparelhamentos perfeitos.

COROLÁRIO 1.3
Contar os emparelhamentos perfeitos de um grafo é #P*-completo.*

Demonstração: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ de zeros e uns. Defina o grafo G como sendo o grafo com bipartição $\{B', B''\}$, tal que $B' := \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\}$ e $B'' := \{b''_1, b''_2, \ldots, b''_n\}$ e para cada par i, j, com $1 \leq i, j, \leq n$, b'_i é ligado a b''_j por uma aresta se e somente se $a_{ij} = 1$. Pela definição de permanente, o número de emparelhamentos perfeitos de G é igual ao permanente de A. $\square$

Sendo assim, temos que o problema de contar emparelhamentos perfeitos de um grafo é #P-completo. No entanto, existe solução polinomial para este problema quando restrito aos grafos Pfaffianos. Além disso, até hoje não se conhece algoritmo de tempo polinomial para decidir se um grafo qualquer é Pfaffiano, nem se sabe se tal problema é NP-completo. Isso motivou nosso interesse em grafos Pfaffianos.

1.3. Grafos k-Pfaffianos

Grafos k-Pfaffianos são uma generalização de grafos Pfaffianos. Seja $\boldsymbol{D} := (D_1, D_2, \ldots, D_k)$ uma k-tupla de orientações de G. Dizemos que $\boldsymbol{D}$ é uma *k-orientação* de G. Para cada emparelhamento perfeito M de G, a k-tupla

$$\mathbf{sgn}(M, \boldsymbol{D}) := (\mathrm{sgn}(M, D_1), \mathrm{sgn}(M, D_2), \ldots, \mathrm{sgn}(M, D_k))$$

é chamada de *vetor assinatura de M relativo a $\boldsymbol{D}$*. A *matriz assinatura de $\mathcal{M}$ relativa a $\boldsymbol{D}$* é a matriz $\mathbf{sgn}(\mathcal{M}, \boldsymbol{D})$ cujas linhas são $\mathbf{sgn}(M, \boldsymbol{D})$, para $M \in \mathcal{M}$. Se o sistema $\mathbf{sgn}(\mathcal{M}, \boldsymbol{D})\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ tem uma solução, então dizemos que $\boldsymbol{D}$ é *Pfaffiana* e, para qualquer solução $\boldsymbol{\alpha}$ deste sistema, dizemos que $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{\alpha})$ é uma *k-dupla Pfaffiana*. Dizemos que G é *k-Pfaffiano* se ele tem uma k-orientação Pfaffiana. Note que G é 1-Pfaffiano se e somente se G é Pfaffiano.

Se $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{\alpha})$ é uma k-dupla Pfaffiana, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{sgn}(M, D_i) = 1$, para todo emparelhamento M. Então, temos:

$$|\mathcal{M}| = \sum_{M \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{sgn}(M, D_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{sgn}(M, D_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{P}(A(D_i))$$

Nesse caso, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{P}(A(D_i))$ é o número de emparelhamentos perfeitos do grafo. Vimos anteriormente que podemos determinar o módulo do Pfaffiano da matriz antissimétrica de adjacência de um grafo em tempo polinomial. No entanto, dada uma k-dupla Pfaffiana de um grafo, para contarmos os emparelhamentos perfeitos dele, precisamos também do sinal do Pfaffiano, não só de seu módulo. É possível obter o valor exato do Pfaffiano da matriz antissimétrica de adjacência de um grafo em tempo polinomial. Vide o artigo de Galluccio e Loebl [Galluccio and Loebl 1999, Teorema 4.1, pág. 16]. Dessa forma, se k é limitado por um polinômio em $|V(G)|$, então, dada uma k-dupla Pfaffiana de um grafo G, podemos contar o número de emparelhamentos perfeitos de G em tempo polinomial. Novamente, temos um grande contraste com o caso geral, no qual contar emparelhamentos perfeitos é #P-completo.

Definimos o *número Pfaffiano* de um grafo G, denotado por $\mathrm{pf}(G)$, como o menor k tal que G é k-Pfaffiano. É interessante estudar o número Pfaffiano de grafos para analisar a complexidade de resolução do problema de se encontrar uma k-dupla Pfaffiana de um grafo. Suponha que exista um polinômio q, tal que $\mathrm{pf}(G) \leq q(|V(G)|)$, para todo grafo G. Nesse caso, o problema de se encontrar uma k-dupla Pfaffiana de um grafo que se sabe que é k-Pfaffiano seria NP-difícil. Isso se deve ao fato de que poderíamos resolver o problema da contagem do número de emparelhamentos perfeitos de um grafo, uma vez obtida tal k-dupla. Outro motivo interessante para estudar o número Pfaffiano de grafos é o fato de que até hoje não se sabe quais são os possíveis números Pfaffianos de um grafo.

2. Grafos Quase-Bipartidos

Uma aresta e de um grafo G é *admissível* se G tem emparelhamento perfeito contendo e. Um grafo G é *coberto por emparelhamentos* se é conexo, tem pelo menos uma aresta e toda aresta de G é admissível. Dizemos que um grafo G é *quase-bipartido* se ele é não-bipartido, coberto por emparelhamentos e tem duas arestas e e f tais que $G - e - f$ é bipartido e coberto por emparelhamentos. Seja G um grafo coberto por emparelhamentos, H um subgrafo com bipartição $\{U, W\}$, gerador de G, contendo todas as arestas de G com um extremo em U e outro em W, e coberto por emparelhamentos. Se $G[U]$ tem precisamente uma aresta, dizemos que G é *meio-bipartido*. Note que esta definição implica que $G[W]$ tem pelo menos uma aresta. Além disso, se $G[W]$ também tiver precisamente uma aresta, então G é quase-bipartido. De fato, os grafos quase-bipartidos são meio-bipartidos. A definição de grafos meio-bipartidos foi feita durante o desenvolvimento da pesquisa que levou à tese descrita aqui.

Fischer e Little [Fischer and Little 2001] caracterizaram grafos quase-bipartidos Pfaffianos. O reconhecimento eficiente de grafos quase-bipartidos Pfaffianos estava em aberto. Nossa principal contribuição nesse tema na tese descrita é um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos [Miranda and Lucchesi 2009b]. O mesmo princípio utilizado nesse algoritmo pode ser usado em qualquer grafo, mas fornecendo um algoritmo pseudo-polinomial. Além disso, estendemos a caracterização de Fischer e Little para uma classe mais ampla de grafos que abrange os quase-bipartidos: os grafos meio-bipartidos. Estes resultados dependem do seguinte resultado básico (Corolário 1.23) demonstrado na tese descrita:

LEMA 2.1
Seja D um grafo orientado, $e := xy$ uma aresta de D, e Q um ciclo conforme de D que contém e. Então, D é Pfaffiano se e somente se as três seguintes propriedades são verdadeiras: (i) o grafo $D - e$ é Pfaffiano; (ii) o grafo $D - x - y$ é Pfaffiano; (iii) o ciclo Q tem orientação ímpar.

Apresentamos a seguir o resultado de demonstração mais simples dentre os três resultados descritos nessa seção. Este resultado usa o resultado anteriormente obtido por McCuaig [McCuaig 2004] e independentemente por Robertson, Seymour e Thomas [Robertson et al. 1999] que dá um algoritmo de tempo polinomial para o reconhecimento de grafos bipartidos Pfaffianos.

TEOREMA 2.2
Existe algoritmo polinomial para decidir se um grafo orientado quase-bipartido é Pfaffiano.

Demonstração: Seja D um grafo orientado quase-bipartido, sejam $e := x_1x_2$ e $f := y_1y_2$ arestas de G tais que $G - e - f$ é bipartido e coberto por emparelhamentos. Seja (U, W) uma bipartição de $G - e - f$. Por definição, G não é bipartido mas é coberto por emparelhamentos. Logo, uma das arestas e e f tem ambos os extremos em U, a outra tem ambos os extremos em W. Portanto, para todo emparelhamento perfeito M de D, $e \in M$ se e somente se $f \in M$.

Seja M um emparelhamento perfeito de D contendo e e f, e N um emparelhamento perfeito de D que não contém nem e nem f. Sendo assim, um dos ciclos induzidos por $M \triangle N$, digamos Q, contém tanto e como f. Pelo Lema 2.1, D é Pfaffiano se e somente se Q tem orientação ímpar e $D - e$ e $D - x_1 - x_2$ são ambos Pfaffianos. A aresta f não é admissível em $D - e$. Assim, $D - e$ é Pfaffiano se e somente se $D - e - f$ é Pfaffiano. Por outro lado, f pertence a todos os emparelhamentos perfeitos de $D - x_1 - x_2$. Logo, $D - x_1 - x_2$ é Pfaffiano se e somente se $D - x_1 - x_2 - y_1 - y_2$ é Pfaffiano. Portanto, D é Pfaffiano se e somente se Q tem orientação ímpar e $D - e - f$ e $D - x_1 - x_2 - y_1 - y_2$ são ambos Pfaffianos. Esses dois grafos são bipartidos. Portanto, podemos resolver este problema em tempo polinomial, como visto anteriormente. $\square$

O seguinte resultado pode ser encontrado na tese (Teorema 2.3), e implica um algoritmo de tempo polinomial para reconhecimento de grafos meio-bipartidos Pfaffianos. Seja G um grafo meio-bipartido, e H seu subgrafo gerador com bipartição $\{U, W\}$ como descrito na definição de meio-bipartidos. Para cada aresta f de $E(G[W])$, seja $G(f) := G - (E(G[W]) - f)$.

TEOREMA 2.3
Para toda aresta f de E_W, o grafo $G(f)$ é quase-bipartido. Além disso, G é Pfaffiano se e somente se $G(f)$ é Pfaffiano, para cada aresta f de E_W.

3. Grafos k-Pfaffianos

Na tese, apresentamos novos resultados estruturais sobre grafos k-Pfaffianos. Com eles obtivemos um contra-exemplo para a conjectura de Norine sobre o número Pfaffiano.

Galluccio e Loebl [Galluccio and Loebl 1999] e, independentemente, Tesler [Tesler 2000] provaram o seguinte resultado fundamental:

TEOREMA 3.1
Se G é imersível em uma superfície orientável de genus g então $\mathrm{pf}(G) \leq 4^g$.

Em 2006, Norine [Norine 2009] apresentou a seguinte conjectura:

CONJETURA 3.2
O número Pfaffiano de um grafo é sempre uma potência de quatro.

Na verdade, em 1967, Kasteleyn [Harary 1967, pág. 99] afirmou uma crença similar: "If the genus of the graph is g the number of Pfaffians required is 4^g". Adicionando resultados favoráveis à conjectura, Norine provou o seguinte resultado:

TEOREMA 3.3
Todo grafo 3-Pfaffiano é Pfaffiano e todo grafo 5-Pfaffiano é 4-Pfaffiano.

Pelo Teorema 3.3, é imediato que um contra-exemplo para a Conjectura 3.2, se existente, teria número Pfaffiano pelo menos seis. Na tese descrita, mostramos que o grafo chamado de G_{19} é 6-Pfaffiano, mas não 4-Pfaffiano. O grafo G_{19} pode ser obtido de um $K_{5,5}$ pela remoção de um quadrilátero e de um caminho com duas arestas, desde que estes subgrafos sejam disjuntos nos vértices.

Seja G um grafo. Um corte C é *justo em* G se todo emparelhamento perfeito de G tem precisamente uma aresta em C. Suponha que as seguintes condições são válidas para um grafo G:

- G é coberto por emparelhamentos;
- G tem um corte justo C (possivelmente trivial);
- existe uma partição $\{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$ das arestas de C;
- $G_i := G - (C - C_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, r$.

Então dizemos que $G_1, G_2, \ldots, G_r$ é uma r-*decomposição* de G. Na tese demonstramos:

TEOREMA 3.4
Se um grafo tem uma r-decomposição em grafos Pfaffianos então é $2r$-Pfaffiano.

Na tese, obtemos uma 3-decomposição do grafo G_{19} em três grafos Pfaffianos. Obtemos dessa forma que este grafo é 6-Pfaffiano. Em seguida, provamos o seguinte teorema que foi usado para demonstrarmos que o grafo G_{19} não é 4-Pfaffiano. Denotamos por $\boldsymbol{J}$ a matriz quadrada com todas as entradas iguais a 1. Denotamos por $\boldsymbol{I}$ a matriz identidade. Esse teorema fecha a demonstração de que G_{19} é contra-exemplo para a Conjectura 3.2.

TEOREMA 3.5
Seja G um grafo não-Pfaffiano, $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{\alpha})$ uma 4-dupla Pfaffiana normal de G. Então, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1/2}$. Ademais, a menos de linhas múltiplas, $\mathbf{sgn}(\mathcal{M}, \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{J} - 2\boldsymbol{I}$.

4. Produção Científica Associada à Tese

Foi publicado um artigo com a demonstração do algoritmo de reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos no simpósio Lagos 2007, cujos anais foram publicados no Eletronic Notes in Discrete Mathematics [Miranda and Lucchesi 2008]. O conjunto completo dos resultados sobre grafos quase-bipartidos – o algoritmo de reconhecimento de grafos quase-bipartidos e meio-bipartidos Pfaffianos e a caracterização de grafos meio-bipartidos Pfaffianos – foi publicado na revista "Discrete Applied Mathematics" [Miranda and Lucchesi 2009b]. O resultado completo da demonstração de que o grafo G_{19} tem número Pfaffiano igual a 6 foi submetido para publicação, ainda sem resposta sobre aprovação. Um artigo provando que G_{19} tem número Pfaffiano no máximo 10 com métodos alternativos, e que portanto apresenta por método alternativo um contra-exemplo para a Conjectura 3.2, foi publicado no Simpósio Lagos 2009 [Miranda and Lucchesi 2009a].

Referências

Ben-Dor, A. and Halevi, S. (1995). Zero-one permanent is #P-complete, a simpler proof. In *Proc. 2nd Israel Symposium on Theory of Computing and Systems (ISTCS93), IEEE*. press.

Fischer, I. and Little, C. H. C. (2001). A characterisation of Pfaffian near bipartite graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 82:175–222.

Galluccio, A. and Loebl, M. (1999). On the theory of Pfaffian orientations. I. Perfect matchings and permanents. *Eletron. J. Combin.* , 6.

Harary, F., editor (1967). *Graph Theory and Theoretical Physics*. Academic Press Inc.

McCuaig, W. (2004). Pólya's permanent problem. *The Electronic J. of Combin.*, 11.

Miranda, A. A. A. (2009). *Grafos Pfaffianos e Problemas Relacionados*. PhD thesis, Instituto de Computação - UNICAMP.

Miranda, A. A. A. and Lucchesi, C. L. (2004). Pfaffian graphs. Technical report, Institute of Computing - University of Campinas - UNICAMP.

Miranda, A. A. A. and Lucchesi, C. L. (2008). A polynomial time algorithm for recognizing near-bipartite Pfaffian graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:171–176. IV Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium - LAGOS 2007, Chile.

Miranda, A. A. A. and Lucchesi, C. L. (2009a). On the pfaffian number of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 35:145 – 150. LAGOS'09 - V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.

Miranda, A. A. A. and Lucchesi, C. L. (2009b). Recognizing near-bipartite Pfaffian graphs in polynomial time. *Discrete Applied Mathematics*.

Muir, T. (1882). *A Treatise on the Theory of Determinants*. MacMillian and Co., London.

Norine, S. (2009). Drawing 4-Pfaffian graphs on the torus. *Combinatorica*, 29(1):109 – 119.

Robertson, N., Seymour, P. D., and Thomas, R. (1999). Permanents, Pfaffian orientations and even directed circuits. *Ann. of Math. (2)*, 150:929–975.

Tesler, G. (2000). Matchings in graphs on non-orientable surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 78:198–231.

Tutte, W. T. (1947). The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111.

Tutte, W. T. (1998). *Graph Theory as I Have Known It*. Number 11 in Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Clarendon Press, Oxford.

Valiant, L. G. (1979). The complexity of computing the permanent. *Theoretical Computer Science*.