$L(2,1)$-colorações: algoritmos e limites superiores em classes de grafos*

Márcia R. Cerioli[1 2], **Daniel F. D. Posner**[1]

[1]COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal 68.511 – 21931-972 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

[2]Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal 68.530 – 21931-972 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

{cerioli,posner}@cos.ufrj.br

Abstract. *The $L(2,1)$-coloring problem is a variant of the vertex coloring problem where adjacent vertices get colors (represented by natural numbers) which differ by at least two and non-adjacent vertices having a common neighbor get different colors. The aim is to minimize the span, that is, the greatest assigned color. This master's thesis not only presents a detailed survey on the main known results on this problem, but also a linear-time algorithm for P_4-tidy graphs, upper bounds on the span of weakly chordal graphs, line graphs, and chordal bipartite graphs, and improvements on the known upper bounds on the span of split graphs, permutation graphs, and cographs, among others.*

Resumo. *O problema da $L(2,1)$-coloração é uma variação do problema da coloração de vértices de um grafo, onde vértices adjacentes recebem cores (representadas por números naturais) com diferença de pelo menos dois e vértices não adjacentes, mas que tenham um vizinho em comum, recebem cores diferentes. O objetivo é minimizar o span, ou seja, a maior cor utilizada. Esta dissertação, além de conter uma coletânea detalhada dos principais resultados já conhecidos, também apresenta um algoritmo linear para a classe dos grafos P_4-tidy, o estabelecimento de limites superiores do span em grafos fracamente cordais, linha e bipartidos cordais, a melhoria dos limites superiores conhecidos do span em grafos split, permutação e cografos, entre outros.*

1. Introdução

Em um grafo $G = (V, E)$, onde $|V| = n$ e $|E| = m$, denota-se por $G[S]$ o subgrafo induzido pelos vértices de um conjunto $S \subseteq V$, ou seja, $G[S] = (S, E')$, onde $uv \in E'$ se $uv \in E$ e $\{u, v\} \subseteq S$. Um conjunto $I \subseteq V$ é *independente* se $G[I] = (I, \emptyset)$. Um *partner* de um subgrafo induzido $G[A] = P_4$ é um vértice $v \in V \backslash A$ tal que $G[A \cup \{v\}]$ tenha pelo menos dois subgrafos P_4 induzidos. A distância entre dois vértices u e v, denotada por $dist(u, v)$, é o número mínimo de arestas em um caminho entre u e v. Um grafo $G = (V, E)$ é: **(i)** *árvore* se é conexo e acíclico; **(ii)** *caminho*, denotado por P_n, se é

*Esta dissertação foi orientada pela professora Márcia R. Cerioli e apresentada em Setembro de 2009 ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ para a obtenção do grau de M. Sc., com financiamento do CNPq (bolsa de mestrado).
Versão completa: http://www.cos.ufrj.br/∼posner/dissertacao.pdf

uma árvore onde o grau máximo de todo vértice é 2; **(iii)** *ciclo* se $\forall v \in V$, $G[V \setminus \{v\}]$ for um grafo caminho; **(iv)** *completo* se existem todas as arestas possíveis entre seus vértices; **(v)** *split* se V pode ser particionado em dois conjuntos I e K, onde I é um conjunto independente, e $G[K]$ é um grafo completo; **(vi)** P_4-*tidy* se todo subgrafo P_4 induzido tem no máximo um *partner*; **(vii)** *linha* se é o grafo de interseção das arestas de um grafo; **(viii)** *cordal* se todo ciclo induzido tem tamanho no máximo 3; **(ix)** *fracamente cordal* se todo ciclo induzido tem tamanho no máximo 4; **(x)** *cografo* se não tem caminho induzido de tamanho 4; **(xi)** *bipartido* se V pode ser particionado em dois conjuntos independentes; **(xii)** *bipartido cordal* se é bipartido e fracamente cordal; **(xiii)** *permutação* se é o grafo de interseção de um modelo de segmentos de retas entre duas retas paralelas.

Uma $L(2,1)$-*coloração* em grafos, proposta em [Griggs e Yeh 1992], é uma função f que associa a cada vértice de um grafo G um inteiro não negativo de forma que, se dois vértices u e v de G são adjacentes, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$ e se estão à distância 2, então $f(u) \neq f(v)$. O *problema da* $L(2,1)$-*coloração* tem como objetivo encontrar uma tal coloração minimizando a maior cor utilizada. Neste caso, esta menor cor é chamada de *span*, denotada por λ, e a atribuição de cores em $\{0, 1, \ldots, \lambda\}$ é uma $L(2,1)$-*coloração ótima*. Na Figura 1 temos $L(2,1)$-colorações ótimas dos grafos de Hajós, Petersen e garra estendida, respectivamente.

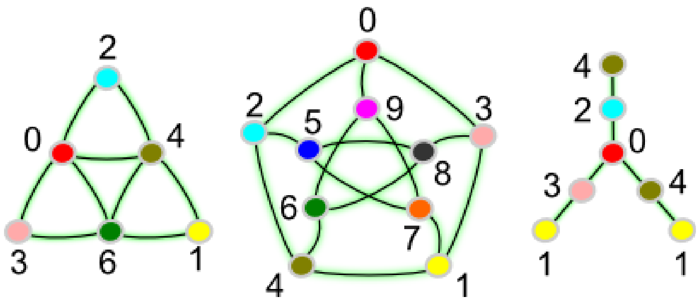

Figura 1. $L(2,1)$**-colorações ótimas**

A motivação para este problema veio da modelagem de problemas de atribuição de frequências em redes de transmissão de rádio. Buscava-se uma forma mais realista de tratar o problema do que a até então utilizada, que consistia na coloração usual de vértices em grafos. Modelando o problema de atribuição de frequências em teoria dos grafos, cada antena, transmissora e receptora, é representada por um vértice, enquanto que a possibilidade de interferências diretas entre antenas são representadas por arestas.

Ao modelar o problema por uma $L(2,1)$-coloração várias características reais interessantes são preservadas, como a de que antenas próximas devem enviar informações utilizando frequências diferentes e a de que antenas muito próximas operam em frequências bastante diferentes. Na Figura 2 é apresentada uma rede hipotética de transmissão de rádio via sua modelagem em grafos. Observe em (a) que, com uma coloração em grafos, o resultado não é satisfatório, já que uma antena pode receber dados de antenas próximas em uma mesma frequência, o que acarreta em interferência na recepção dos dados. Já em (b), temos uma $L(2,1)$-coloração e este problema é contornado.

O assunto mais estudado sobre $L(2,1)$-colorações é a conjectura de Griggs e Yeh

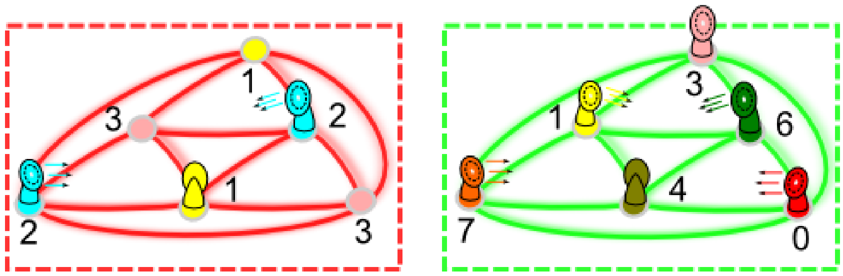

Figura 2. (a) Modelo com coloração (b) Modelo com $L(2, 1)$-coloração

(1992), de que em qualquer grafo, sempre é possível encontrar uma $L(2, 1)$-coloração com *span* no máximo Δ^2, onde Δ é o número máximo de arestas incidentes a um mesmo vértice do grafo. O grafo de Petersen (Figura 1) é um dos poucos exemplos conhecidos que atingem o limite proposto. Esta conjectura está em aberto há quase duas décadas, até mesmo quando restrita a classe dos grafos bipartidos. Desde então, o problema vem sendo muito estudado e pesquisadores obtiveram limites superiores para o *span* de $L(2, 1)$-colorações ótimas em classes específicas de grafos, como a dos grafos cordais [Sakai 1994] e a dos grafos cúbicos hamiltonianos [Kang 2004], entre outras [Bodlaender et al. 2004, Calamoneri 2009].

O problema da $L(2, 1)$-coloração em grafos é $\mathcal{NP}$-completo mesmo quando restrito a grafos com diâmetro 2 [Griggs e Yeh 1992]. E, continua $\mathcal{NP}$-completo mesmo se o valor do *span* for fixado em um valor maior ou igual a 4 [Fiala et al. 2001], ou ainda se o problema for restrito a classe dos grafos *split* [Bodlaender et al. 2004]. Por outro lado, são poucos os algoritmos eficientes (não-exponenciais) conhecidos para determinar o *span* de $L(2, 1)$-colorações ótimas em classes de grafos. A Tabela 1 apresenta todos os resultados conhecidos, antes desta dissertação, sobre a complexidade dos algoritmos para o problema da $L(2, 1)$-coloração em classes de grafos, exceto aqueles obtidos em [Griggs e Yeh 1992] para classes simples como grafos caminhos, ciclos, rodas, estrelas e completos.

2. Resumo da dissertação e resultados obtidos

A coletânea dos principais resultados relacionados ao problema da $L(2, 1)$-coloração, apresentada na parte inicial da dissertação, é interessante e útil para todos os que queiram ter um primeiro contato com o assunto. Além disso, fornece propriedades estruturais sobre diversas classes de grafos que foram desenvolvidas para o estudo de $L(2, 1)$-colorações mas que podem ser utilizadas por pesquisadores de qualquer área.

O primeiro capítulo da dissertação fornece noções gerais do problema da $L(2, 1)$-coloração e definições necessárias para o seu bom entendimento. Incluindo motivações para o estudo deste problema, histórico sobre as pesquisas pioneiras e definições detalhadas sobre os principais conceitos de teoria dos grafos utilizados na dissertação.

A seguir, no Capítulo 2, são dados métodos já conhecidos para obtenção do *span* de $L(2, 1)$-colorações ótimas de classes simples de grafos; a relação do valor do *span* com outros invariantes, tais como coloração de vértices; e duas provas de que o problema da $L(2, 1)$-coloração é $\mathcal{NP}$-completo, a primeira quando restrito a grafos com diâmetro 2, e a segunda quando restrito a grafos com *span* fixo em um valor maior ou igual a 4.

Tabela 1. Complexidade para determinar o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima

Classe	Complexidade	
bipartido *chain*	$O(n+m)$ [Araki 2009]	
cografos	$O(n+m)$ [Chang e Kuo 1996]	
t-quase árvores	$O(n2^t)$ [Fiala et al. 2001]	
grades regulares	$O(n)$ [Calamoneri e Petreschi 2001]	
árvores	$O(n)$ [Hasunuma et al. 2009]	
k-$L(2,1)$-coloriveis	$O(n4^n)$ [Král 2005b]	$\mathcal{NP}$-completo [Griggs e Yeh 1992]
4-$L(2,1)$-coloriveis	$O(1.3161^n)$ [Kratochvíl et al. 2007]	$\mathcal{NP}$-completo [Fiala et al. 2001]

O Capítulo 3 é dedicado a apresentar as provas dos limites superiores conhecidos para o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima em grafos. Desde o primeiro limite de $\Delta^2 + 2\Delta$ [Griggs e Yeh 1992], passando pelo limite superior de $\Delta^2 + \Delta$ [Chang e Kuo 1996], o de $\Delta^2 + \Delta - 1$ [Král e Skrekovski 2003], até chegar ao melhor limite conhecido até hoje, dado por $\Delta^2 + \Delta - 2$ [Gonçalves 2005]. Ao final do capítulo, estão descritos os resultados obtidos em [Havet et al. 2008] na prova da conjectura de Griggs e Yeh para grafos com $\Delta \geq 10^{93}$ e o limite superior do tipo Nordhaus-Gaddun (para coloração de grafos e seus complementos) para o *span* ótimo [Balakrishnan e Deo 2003] .

Devido ao fato de que o problema da $L(2,1)$-coloração é $\mathcal{NP}$-completo, mesmo restrito a classe dos grafos bipartidos e *split* [Bodlaender et al. 2004], fica clara a dificuldade de obter algoritmos eficientes para a resolução deste problema mesmo para classes específicas de grafos. O Capítulo 4 é dedicado a apresentar todos os algoritmos polinomiais conhecidos e as provas de suas corretudes para a determinação do *span* de $L(2,1)$-colorações ótimas. Estes são dados para as árvores [Hasunuma et al. 2009], p-quase árvores [Fiala et al. 2001], bipartidos *chain* [Araki 2009], cografos [Chang e Kuo 1996] e grades regulares [Calamoneri e Petreschi 2001]. Além da obtenção do *span* ótimo, estes métodos também fornecem atribuições de cores que são $L(2,1)$-colorações com este *span*.

Por outro lado, pesquisadores buscam resolver o problema para grafos em geral, utilizando algoritmos com complexidades exponenciais relativamente baixas. O Capítulo 5 contém os melhores algoritmos exponenciais conhecidos para a determinação do valor do *span* de $L(2,1)$-colorações ótimas. Em particular, as provas da corretude e os algoritmos com complexidade de tempo $O(1.3161^n)$ para grafos com *span* 4 [Kratochvíl et al. 2007] e o com complexidade de tempo $O(n4^n)$ para qualquer grafo [Král 2005b]. Ao fim, foi definida uma variação por nós desenvolvida do algoritmo de Zykov, que originalmente tem o propósito de encontrar uma coloração ótima de um grafo, para encontrar uma $L(2,1)$-coloração ótima. Apesar de ter complexidade de tempo um pouco maior do que a de [Král 2005b], nosso método é interessante pois tem complexidade de espaço polinomial, enquanto que a do método de Král é exponencial.

No sexto capítulo, são apresentados os resultados novos obtidos durante a elaboração da dissertação. Em sua maior parte, estes resultados são relacionados a limites superiores para o *span* de $L(2,1)$-colorações ótimas em classes de grafos. Estes resultados foram obtidos através de extensos estudos sobre estas classes, a partir dos quais características estruturais foram obtidas e utilizadas para encontrar os novos limites. A partir destas provas, a conjectura de Griggs e Yeh foi estabelecida como verdadeira para as classes estudadas. A Tabela 2 resume estes resultados.

Tabela 2. Limites superiores novos para o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima

Classes	Limite conhecido	Limite obtido neste trabalho
bipartidos cordais		$\lambda \leq \Delta^2 - \Delta + 2$
fracamente cordais		$\lambda \leq \Delta^2$
grafos linha		$\lambda \leq \min\{\frac{\Delta^2+4\Delta-2}{2}, \Delta^2\}$
grafos quase linha		$\lambda \leq \Delta^2$
split	$\lambda \leq \frac{\Delta^{1.5}}{\sqrt{6}} + O(\Delta)$ [Král 2005a]	$\lambda \leq \frac{2\Delta^{1.5}}{3\sqrt{3}} + 2\Delta + \Delta^{0.5} - 2$
permutação	$\lambda \leq 5\Delta + 2$ [Bodlaender et al. 2004]	$\lambda \leq 4\Delta - 3$
cografos	$\lambda = n + pv(G^c) - 2$ [Chang e Kuo 1996]	$\lambda \leq 2\Delta$
componentes p-cografos		$\lambda \leq p(2\Delta + 2) - 2$

Para a classe dos grafos linha foram exibidos exemplos de grafos que tem *span* da mesma ordem do limite superior obtido, isto é, sua $L(2,1)$-coloração ótima é da mesma ordem do *span* determinado, mostrando que o limite encontrado só pode ser melhorado por termos constantes. Também fornecemos uma família infinita da classe dos cografos em que os grafos atingem o limite superior obtido, isto é, sua $L(2,1)$-coloração ótima tem exatamente o *span* determinado, mostrando que o limite encontrado não pode ser melhorado. As classes dos grafos quase-linha e componente p-cografos são extensões por nós definidas das classes dos grafos linha e cografos, respectivamente, para as quais a conjectura de Griggs e Yeh também é verdadeira. Além disso, provamos que a conjectura proposta em [Král 2005a], que sugere um limite superior de $\frac{2\Delta^{1.5}}{3\sqrt{3}} + O(\Delta)$ para o *span* de $L(2,1)$-colorações ótimas em grafos cordais, é verdadeira quando restrita a subclasse dos grafos *split*. Esperamos conseguir estender esse resultado para a classe dos grafos cordais, já que diversas provas em grafos cordais são feitas por restrição à classe dos grafos split.

Ao fim do Capítulo 6, são apresentados os algoritmos lineares para encontrar tanto o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima quanto uma atribuição de cores com este *span* para grafos P_4-tidy. Estes resultados são de grande interesse, já que existem poucos algoritmos eficientes (não exponenciais) para a resolução deste problema restrito a classes de grafos, sendo conhecidos, até hoje, para as classes simples como caminhos, ciclos, rodas, completos e para cografos, árvores, t-quase árvores (para alguns valores limitados de t), bipartidos *chain* e grades regulares. Estes algoritmos sobrepõem o algoritmo exato para determinar o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima para os cografos [Chang e Kuo 1996] e o algoritmo aproximativo para encontrar uma $L(2,1)$-coloração ótima em grafos matrogênicos [Calamoneri e Petreschi 2006], já que a classe dos grafos P_4-tidy é uma superclasse das anteriores. Com isto, resolvemos também uma questão em aberto deixada em [Calamoneri e Petreschi 2006] sobre a complexidade de tempo para encontrar o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima em grafos matrogênicos.

A dissertação termina com uma discussão sobre o impacto dos resultados por nós obtidos, bem como uma lista de problemas em aberto relacionados aos temas tratados. A lista de referências bibliográficas é completa e contém trabalhos recentes, o que mostra a atualidade, o interesse e a importância dos temas abordados.

3. Publicações

As versões completas dos trabalhos formam quatro artigos que estão sendo finalizados para submissão a periódicos conceituados de circulação internacional. Com esses artigos, tive oportunidade de participar apresentando trabalhos tanto em congresso nacional quanto internacional.

1) CERIOLI, M. R. E POSNER, D. F. D., On $L(2,1)$-coloring of P_4-tidy graphs. Aceito para ser apresentado no *8th French Combinatorial Conference, Université de Paris XI, Orsay, France*. Versão completa a ser submetida para *Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.cos.ufrj.br/~posner/cerioliposner-p4tidy.pdf
2) CERIOLI, M. R. E POSNER, D. F. D., On $L(2,1)$-coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graphs. LAGOS 2009, Gramado, RS. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 35, p. 299-304, 2009. Versão completa submetida para *Discrete Applied Mathematics*. Disponível em http://www.cos.ufrj.br/~posner/cerioliposner-lagos2009.pdf
3) CERIOLI, M. R. E POSNER, D. F. D., Limites superiores em $L(2,1)$-coloração de cografos, grafos de permutação e grafos linha. CNMAC 2009, Cuiabá, MT. *Anais do 32º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, v. 2, p. 489-495, 2009. Disponível em http://www.cos.ufrj.br/~posner/cerioliposner-cnmac2009.pdf
4) CERIOLI, M. R. E POSNER, D. F. D., Limite superior para $L(2,1)$-coloração de grafos bipartidos cordais. SBPO 2008, João Pessoa, PB. *Anais do XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, v. 1, p. 2571-2580, 2008. Disponível em http://www.cos.ufrj.br/~posner/cerioliposner-sbpo2008.pdf

4. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo principal contribuir para o estado da arte da solução do problema da $L(2,1)$-coloração, no que concerne a elaboração de algoritmos eficientes para a determinação do *span* ótimo e, quando isto não é possível, de limites superiores justos para o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima, em conexão com a prova da conjectura de Griggs e Yeh, em classes específicas de grafos. Para isto, foram apresentados uma coletânea dos resultados relevantes já existentes, desde os limites mais simples até os mais complexos e um vasto estudo de classes específicas de grafos de modo a viabilizar o desenvolvimento de novos limites superiores. O texto produzido inclui uma revisão de provas já conhecidas, relacionadas às provas dos nossos próprios resultados, sendo que essas foram reescritas, simplificadas e comentadas com o objetivo de fornecer um texto autocontido e em notação uniforme.

Foram encontrados limites superiores para o *span* ótimo para as seguintes classes: grafos bipartidos cordais, grafos fracamente cordais, grafos linha, grafos quase-linha e grafos componentes p-cografos. E, foram melhorados os limites superiores para as seguintes classes: grafos *split*, grafos de permutação e cografos. Como consequência, foi estabelecida a veracidade da conjectura de Griggs e Yeh para todas estas classes. A Figura 3 apresenta um diagrama de inclusão das classes de grafos consideradas que, junto com a Tabela 2, ilustra sucintamente os resultados obtidos. Uma outra contribuição foi a prova da conjectura de Král para grafos cordais, restrita a classe dos grafos *split*.

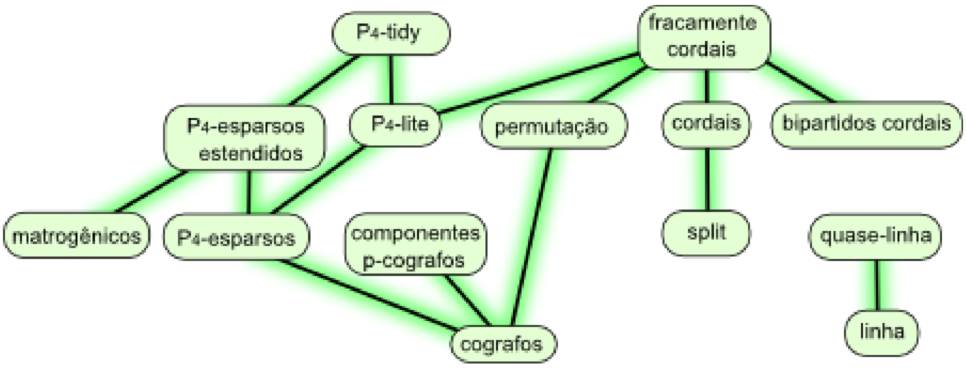

Figura 3. Classes em que foram obtidos resultados novos

Além disso, foi elaborado um algoritmo que determina o *span* ótimo e também um que encontra uma $L(2,1)$-coloração com este *span* para grafos P_4-*tidy*, ambos lineares. Com estes resultados a classe dos grafos P_4-*tidy* foi adicionada a lista das classes de grafos nas quais o problema da $L(2,1)$-coloração é resolvido de forma eficiente e para as quais a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira. Estes resultados englobam os já existentes para cografos e resolvem definitivamente o problema para grafos matrogênicos, que tinha apenas uma solução aproximada.

A prova da conjectura de Griggs e Yeh é o principal problema ainda em aberto. Apesar de alguns avanços terem sido feitos em relação a classes específicas de grafos, para grafos em geral, e mesmo para grafos bipartidos, a questão permanece. Além disso, exemplos de grafos que atingem o limite superior estabelecido para o *span* de uma $L(2,1)$-coloração ótima nas classe dos grafos bipartidos cordais, grafos fracamente cordais e dos grafos de permutação ainda não foram encontrados. Ainda motivados pelos resultados obtidos neste trabalho, também ficam em aberto o estabelecimento da complexidade do problema da $L(2,1)$-coloração para as classes dos grafos bipartidos cordais, grafos de permutação e grafos linha. Existem grafos bipartidos para os quais $\lambda \geq \Delta^2 - \Delta + 1$, para qualquer Δ [Calamoneri 2009] e o problema da $L(2,1)$-coloração restrito a grafos bipartidos planares é $\mathcal{NP}$-completo [Bodlaender et al. 2004]. Infelizmente, estas abordagens não se adaptam diretamente para a classe dos grafos bipartidos cordais.

O estudo iniciado neste trabalho continua no curso de doutorado, que já teve início na mesma instituição, com financiamento do CNPq.

Referências

Araki, T. (2009). Labeling bipartite permutation graphs with a condition at distance two. *Discrete Applied Mathematics*, 157(8):1677–1686.

Balakrishnan, H. e Deo, N. (2003). Parallel algorithm for radiocoloring a graph. *Congressus Numerantium*, 160(1):192–205.

Bodlaender, H. L., Kloks, T., Tan, R. B. e van Leeuwen, J. (2004). Approximations for λ-coloring of graphs. *The Computer Journal*, 47:193–204.

Calamoneri, T. (2009). The $L(h, k)$-labelling problem: A survey and annotated bibliography. `http://www.dsi.uniroma1.it/~calamo/survey.html`.

Calamoneri, T. e Petreschi, R. (2001). λ-coloring of regular tiling. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 8:18–21.

Calamoneri, T. e Petreschi, R. (2006). λ-coloring matrogenic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 154(17):2445 – 2457.

Chang, G. J. e Kuo, D. (1996). The $L(2, 1)$-labeling problem on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9(2):309–316.

Fiala, J., Kloks, T. e Kratochvíl, J. (2001). Fixed-parameter complexity of λ-labelings. *Discrete Applied Mathematics*, 113(1):59–72.

Gonçalves, D. (2005). On the $L(p, 1)$-labeling of graphs. *Proceedings of European conference on Combinatorics Graph Theory and Applications (EuroComb 05)*, 5(9):81–86.

Griggs, J. R. e Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4):586–595.

Hasunuma, T., Ishii, T., Ono, H. e Uno, Y. (2009). A linear algorithm for $L(2, 1)$-labeling of trees. *pre-print*.

Havet, F., Reed, B. e Sereni, J. (2008). $L(2, 1)$-labelling of graphs. In *SODA 2008: Proceedings of annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 621–630. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Kang, J. (2004). *$L(2, 1)$-labelling of 3-regular hamiltonian graphs*. Ph.D. thesis, University of Illinois.

Kratochvíl, J., Kratsch, D. e Liedloff, M. (2007). Exact algorithms for $L(2, 1)$-labelings of graphs. *Proceedings of 32nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 07)*, 4(1):513–524.

Král, D. (2005a). Coloring powers of chordal graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 18(3):451–461.

Král, D. (2005b). An exact algorithm for the channel assignment problem. *Discrete Applied Mathematics*, 145(1):326–331.

Král, D. e Skrekovski, R. (2003). A theorem about the channel assignment problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16(1):426–437.

Sakai, D. (1994). Labeling chordal graphs: distance two condition. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7:133–140.