Algoritmos para Problemas de Empacotamento

E. C. Xavier[1], F. K. Miyazawa[1]

[1]Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas (IC-UNICAMP)
São Paulo – SP – Brazil

{eduardo.xavier,fkm}@ic.unicamp.br

Abstract. *We study several packing problems that are NP-hard. We assume the hypothesis that* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ *and in this case there are no efficient (polynomial time complexity) exact algorithms to solve these problems. Given that, we present several approximation algorithms (efficient algorithms that produces solutions with quality guarantee) for some packing problems that have practical applications. These algorithms are the best known for the corresponding problems. We also present linear programming based heuristics using a column generation technique for some two dimensional packing problems. The computational experiments indicate that these algorithms obtain very good solutions and are suitable for solving real-world instances.*

Resumo. *Estudamos diversos problemas de empacotamento considerados NP-difíceis. Assumimos a hipótese de que* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ *e deste modo não existem algoritmos eficientes (complexidade de tempo polinomial) exatos para resolver tais problemas. Desta forma, apresentamos algoritmos aproximados (algoritmos eficientes e que geram soluções com garantia de qualidade) para problemas de empacotamento com aplicações práticas. Alguns dos fatores de aproximação apresentados são os melhores conhecidos para os problemas correspondentes. Também apresentamos heurísticas baseadas em programação linear usando a técnica de geração de colunas para problemas de empacotamento bidimensional. Os resultados computacionais sugerem que tais heurísticas obtêm soluções de muito boa qualidade para instâncias reais.*

1. Introdução

Neste trabalho apresentamos os principais resultados do trabalho de doutorado de Eduardo Candido Xavier [Xavier 2006]. Foram desenvolvidos algoritmos voltados para problemas de empacotamento com uma ou duas dimensões que pertencem à classe NP-difícil. Quando nos referimos a problemas de empacotamento, estamos tratando de uma grande classe de problemas onde temos um ou mais objetos grandes d-dimensionais, os quais chamamos de recipientes, e vários objetos menores também d-dimensionais os quais chamamos de itens. O nosso objetivo é empacotar itens dentro de recipientes maximizando ou minimizando uma dada função objetivo. Estes problemas possuem aplicações em diversas áreas da Computação e da Pesquisa Operacional. Provavelmente os dois problemas de empacotamento mais conhecidos sejam o problema de empacotamento unidimensional em recipientes (*Bin Packing Problem*) e o problema da mochila (*Knapsack Problem*). Para os problemas em duas dimensões, restringiremos os objetos à retângulos. Além disso, todos os problemas considerados neste trabalho são NP-difíceis com importantes aplicações práticas. Desta forma, não são esperados algoritmos eficientes exatos para resolvê-los.

Consideramos duas classes de algoritmos para problemas de empacotamento, a classe *online* e a classe *offline*. Os algoritmos chamados *offline*, são aqueles onde todos os dados da instância são conhecidos pelo algoritmo de antemão e já na classe de algoritmos chamados *online*, os dados não são conhecidos.

O foco do trabalho de doutorado está no desenvolvimento de heurísticas para problemas de empacotamento, principalmente aquelas em que conseguimos estabelecer uma razão, no pior caso, entre a solução devolvida pela heurística e a solução ótima. Tais heurísticas são comumente chamadas de algoritmos de aproximação.

Dado um algoritmo $\mathcal{A}$ e uma instância I para um problema de minimização, denotamos por $\mathcal{A}(I)$ o valor da solução devolvida pelo algoritmo $\mathcal{A}$ aplicado à instância I e denotamos por $\mathrm{OPT}(I)$ o correspondente valor para uma solução ótima de I. Dizemos que um algoritmo $\mathcal{A}$ tem um *fator de aproximação absoluto* α, ou é α*-aproximado*, se $\mathcal{A}(I)/\mathrm{OPT}(I) \leq \alpha$, para toda instância I. Definição análoga pode ser feita para problemas de maximização. Em problemas de empacotamento é comum também considerar aproximações *assintóticas*. Neste caso dizemos que um algoritmo $\mathcal{A}$ tem fator de aproximação assintótico α se $\lim_{OPT(I)\to\infty} \mathcal{A}(I)/\mathrm{OPT}(I) \leq \alpha$. É importante ressaltar que algoritmos de aproximação considerados neste trabalho têm complexidade de tempo polinomial. No texto quando nos referirmos a algum resultado de aproximação, assumimos que estamos nos referindo à aproximação assintótica. Quando estivermos falando de aproximação absoluta deixaremos claro no texto.

Dado um valor constante $\epsilon > 0$, é possível mostrar para certos problemas, que estes admitem algoritmos com fatores de aproximação $(1+\epsilon)$, no caso de problemas de minimização, e $(1-\epsilon)$, no caso de problemas de maximização, onde ϵ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira. Chamamos estes algoritmos de *esquemas de aproximação polinomial* ou PTAS (*Polynomial Time Approximation Scheme*) se apresentarem tais fatores de aproximação e tempo de execução polinomial na entrada. Chamamos de FPTAS (*Fully Polynomial Time Approximation Scheme*) o esquema de aproximação que tem tempo de execução polinomial na entrada e em $\frac{1}{\epsilon}$. Sob a hipótese que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, estes são os melhores fatores de aproximação esperados para um problema NP-difícil, pois levam a algoritmos eficientes que obtêm soluções tão próximas de uma ótima quanto se queira. Em problemas de empacotamento é também comum considerar esquemas de aproximação assintóticos. A definição é parecida com a que demos anteriormente para aproximação assintótica, mas neste caso deve valer a desigualdade $\lim_{OPT(I)\to\infty} \mathcal{A}(I)/\mathrm{OPT}(I) \leq (1+\epsilon)$. Denotamos por APTAS (*Asymptotic Polynomial Time Approximation Scheme*) os algoritmos que apresentarem tais fatores de aproximação e tempo de execução polinomial na entrada. Denotamos por AFPTAS (*Asymptotic Fully Polynomial Time Approximation Scheme*) os APTAS que têm tempo de execução polinomial na entrada e em $\frac{1}{\epsilon}$.

Uma outra forma de análise de problemas NP-difíceis é a utilização do conceito de aproximação dual proposto por Hochbaum e Shmoys [Hochbaum and Shmoys 1987]. Neste caso um algoritmo é dual aproximado se ele consegue encontrar uma solução, não necessariamente viável, cujo valor é no máximo o valor de uma solução ótima. Neste caso, a medida de qualidade de aproximação está ligada a quão inviável é a solução.

Também é nosso interesse o estudo de heurísticas baseadas no método de geração de colunas. Muitos problemas de empacotamento podem ser formulados com programas lineares que possuem um número muito grande de colunas. Desta forma, a resolução de tais programas lineares por métodos tradicionais se torna impraticável. Muitos destes programas lineares fornecem soluções fracionárias muito próximas das soluções inteiras. Com isso, há um grande interesse em resolver tais sistemas lineares, e usá-los para obter soluções inteiras. Como o número de colunas é muito grande aplica-se o método de geração de colunas.

2. Problemas Considerados e Principais Resultados

Em cada uma das próximas subseções, descreveremos os problemas considerados no trabalho de doutorado, apresentando trabalhos anteriores e os principais resultados apresentados na tese. Dado o limite de espaço disponível, não é possível entrarmos em detalhes técnicos como as demonstrações formais dos resultados. Para maiores detalhes, o leitor interessado deve consultar a tese de doutorado de Xavier [Xavier 2006].

2.1. O Problema *Class Constrained Shelf Bin Packing*

Nesta seção apresentamos o problema que chamamos de *Class Constrained Shelf Bin Packing* (CCSBP). Este problema é uma generalização do *bin packing* onde itens têm classes diferentes e devemos empacotar os itens separando-os por prateleiras. Uma instância para este problema consiste de uma tupla $I = (L, s, c, d, \Delta, B)$, onde L é uma lista de itens, s e c são funções de tamanho e classe sobre os itens de L, d é o tamanho de uma divisória, Δ é o tamanho máximo de uma prateleira e B é o tamanho dos recipientes. Dado uma sub-lista $L' \subseteq L$ denotamos por $s(L')$ a soma dos tamanhos dos itens em L', i.e, $s(L') = \sum_{e \in L'} s(e)$. Um empacotamento $\mathcal{P}$ da instância I para o problema CCSBP consiste em um conjunto de recipientes $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$, onde os itens em cada recipiente $P_i \in \mathcal{P}$ estão particionados em prateleiras $\{N_1^i, \ldots, N_{q_i}^i\}$ tal que para cada prateleira N_j^i temos que $s(N_j^i) \leq \Delta$, todos os itens em N_j^i são de uma mesma classe e $\sum_{j=1}^{q_i}(s(N_j^i) + d) \leq B$. Na Figura 1 podemos ver um exemplo de um empacotamento de itens em um recipiente com $B = 60$, $\Delta = 17$, $d = 3$ e todos os itens em uma mesma prateleira com a mesma classe. O problema CCSBP também é adequado quando alguns itens não podem ser empacotados em uma mesma prateleira (como comida e produtos químicos). Na maioria dos casos, o divisor de prateleiras tem espessura não nula.

Existem muitas aplicações práticas para o problema CCSBP mesmo quando todos os itens pertencem à uma mesma classe. Por exemplo, quando os itens a serem empacotados devem ser separados por prateleiras de espessura não nula dentro de um recipiente e cada prateleira suporta uma capacidade limitada. Uma aplicação interessante para este problema foi descrita por Ferreira et al. [Ferreira et al. 1990] na indústria de aço, onde um rolo de aço deve ser cortado em rolos finais agrupados sob certas propriedades após duas fases de cortes. Os rolos obtidos após uma primeira fase de corte, chamados rolos primários, são submetidos a certos processos industriais e químicos para adquirirem uma determinada característica (classe) antes da segunda fase de corte. Por limitações da máquina de corte, os rolos primários possuem limites máximo para o seu tamanho, e cada corte gera uma perda no rolo.

Resultados Anteriores: Heurísticas e métodos exatos para o problema foram considerados primeiramente por Ferreira et al. [Ferreira et al. 1990], que aplicaram o problema na indústria de metais. Recentemente o problema foi considerado por Hoto et al.

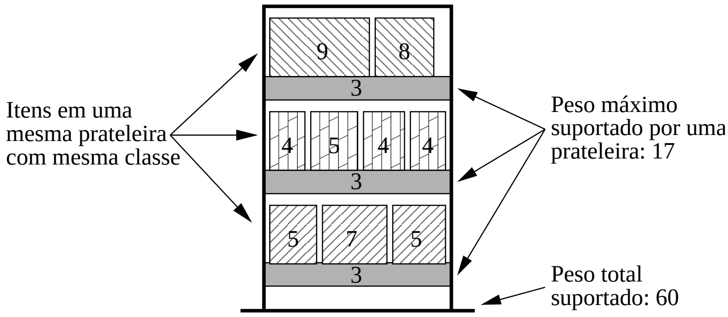

Figura 1. Examplo de um empacotamento em prateleiras.

[Hoto et al.] e Marques e Arenales [Marques and Arenales]. Hoto et al. [Hoto et al.], consideraram a versão *cutting stock* do problema onde uma demanda para cada item deve ser atendida por um número mínimo de recipientes. Eles apresentaram um algoritmo utilizando a estratégia de geração de colunas. Em [Marques and Arenales], métodos exatos e heurísticas são apresentados para a versão da mochila do problema. Em [Xavier and Miyazawa 2006a], Xavier e Miyazawa consideraram a versão da mochila do problema CCSBP, onde cada item e possui um valor v_e. O objetivo do problema é encontrar um empacotamento em prateleiras de um subconjunto dos items em apenas um recipiente, tal que a soma dos valores dos itens seja maximizada.

Nossos Resultados: Apresentamos algoritmos baseados nas estratégias *First Fit (Decreasing)* e *Best Fit (Decreasing)* para o problema CCSBP. Quando o número de classes diferentes é limitado por uma constante, apresentamos algoritmos com fatores de aproximação assintótico 3.4 e 2.445. Se o número de classes não é limitado por uma constante, mostramos algoritmos com fatores de aproximação absolutos iguais a 4 e 3. Por fim, para o caso em que o número de classes é limitado por uma constante, apresentamos um APTAS para o problema CCSBP.

Uma versão resumida deste trabalho foi apresentada no GRACO2005 *(2nd Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms, and Combinatorics)* [Xavier and Miyazawa 2005] e uma versão completa será publicada na revista *Discrete Applied Mathematics (Elsevier)* [Xavier and Miyazawa].

2.2. O Problema *Class Constrained Bin Packing*

Nesta seção apresentamos o problema *bin packing* com restrição de classes (denotado por CCBP) com aplicações para um problema de construção de servidores de vídeo sob demanda. Uma instância deste problema é uma tupla $I = (L, s, c, C, Q, B)$ onde $L = (a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista com n itens, cada item $a_i \in L$ com tamanho $0 < s(a_i) \leq B$ e classe $c(a_i) \in \{1, \ldots, Q\}$, e um conjunto de recipientes de tamanho B e C compartimentos. Um empacotamento para esta instância consiste em um conjunto de recipientes $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ tal que, para cada P_i o número de classes diferentes de itens empacotados em P_i é no máximo C, e a soma dos tamanhos dos itens empacotados em P_i é no máximo B. O objetivo é encontrar um empacotamento dos itens que minimize a quantidade de recipientes utilizados. Também consideramos uma versão deste problema onde os recipientes podem ter tamanhos diferentes. Neste caso, o objetivo do problema é minimizar a soma dos tamanhos dos recipientes utilizados para empacotar todos os itens. Denotamos este problema por VCCBP.

O problema CCBP possui aplicações na construção de servidores de vídeo sob demanda. Suponha que temos que construir um servidor de vídeos utilizando discos rígidos. Cada disco é capaz de armazenar C filmes e pode ler simultaneamente B vídeos. Existe um conjunto de filmes $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ que devem ser armazenados. Baseados na popularidade de um filme, calculamos o número de requisições esperadas para cada filme em F. A quantidade de atendimentos simultâneos esperada de um filme f_i em qualquer instante é denotada por $|U_i|$. O objetivo é construir um servidor que atenda toda a demanda esperada de filmes e utilize a menor quantidade de discos possíveis. Neste caso, todos os itens possuem tamanhos iguais e correspondem a um atendimento esperado. Ou seja, para cada filme f_i temos $|U_i|$ itens de tamanhos unitários com classe f_i. Este problema é NP-difícil [Xavier and Miyazawa 2006b].

Considere o exemplo de um servidor com discos tal que $B = 5$ e $C = 2$. Temos três filmes no conjunto F: f_1, f_2 e f_3 com número de requisições esperadas $|U_1| = 3$, $|U_2| = 1$ e $|U_3| = 1$. Uma solução utilizando dois discos para este problema pode ser vista na Figura 2. No primeiro disco é feito uma cópia do filme f_3 e no segundo disco é feito uma cópia de cada um dos filmes f_2 e f_1. Note que nem toda a capacidade de atendimento (leitura) dos discos é utilizada (note que cada disco pode armazenar apenas dois filmes).

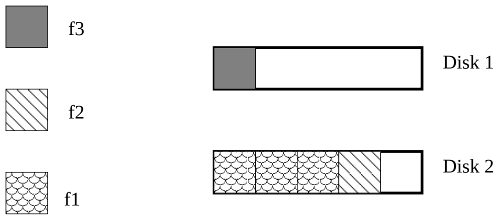

Figura 2. Solução para o problema de vídeo sob demanda.

Resultados Anteriores: Recentemente versões de problemas de empacotamento, onde itens possuem classes, obtiveram atenção de pesquisadores. Em [Dawande et al. 2001, Dawande et al. 1998], Dawande *et al.* afirmam apresentar um esquema de aproximação para versões off-line do problema VCCBP quando o número de classes Q diferentes na instância de entrada é limitado por uma constante. Em [Shachnai and Tamir 2001a], Shachnai e Tamir apresentam resultados teóricos para a versão de múltiplas mochilas do problema, considerando que todos os itens possuem tamanho unitário. Eles introduziram este problema com aplicações na construção de servidores de vídeo sob demanda. Subsequente a este trabalho outros resultados foram apresentados para a versão de múltiplas mochilas por Golubchik *et al.* [Golubchik et al. 2000] e Kashyap e Khuller [Kashyap and Khuller 2003]. Em [Shachnai and Tamir 2004] é apresentado algoritmos *online*, dentre eles uma 2-aproximação, para o problema CCBP *online* onde todos os itens possuem tamanho unitário.

Resultados apresentados: Consideramos as versões *online* e *offline* do problema CCBP. Para o problema *online*, generalizamos o trabalho [Shachnai and Tamir 2004] pois consideramos itens com tamanhos arbitrários. Consideramos dois casos *online*: no primeiro caso, que chamamos de limitado, dada uma constante k, um algoritmo pode manter ativo no máximo k recipientes durante sua execução (conhecido na literatura como k-*bounded*); no segundo caso um número ilimitado de recipientes pode permanecer ativo. Um recipiente ativo é aquele que pode ser usado para empacotar itens. Quando um recipiente se torna inativo, ele não pode mais voltar a ser ativo. Para o caso limitado, mostramos que não pode existir nenhum algoritmo com fator de aproximação constante. Além disso, mostramos que se os itens de uma instância têm tamanho pelo menos ε, então não existe algoritmo com fator de aproximação melhor do que $\mathrm{O}(1/C\varepsilon)$. Para o caso não limitado mostramos um algoritmo *online* com fator de aproximação entre 2.666 e 2.75.

Também apresentamos resultados para a versão *offline* do problema. Quando todos os itens têm tamanhos iguais, apresentamos um algoritmo $(1 + 1/C)$-aproximado. Para o caso paramétrico, quando os itens possuem tamanhos no máximo B/m (B é o tamanho do recipiente), para m inteiro, apresentamos um algoritmo com fator de aproximação igual a $(1 + 1/C + 1/\min\{C, m\})$. Implementamos alguns dos algoritmos apresentados e fizemos experimentos computacionais em instâncias que refletem o problema de construção de servidores de vídeo sob demanda. Tais experimentos mostram que os algoritmos considerados geram soluções de muito boa qualidade.

Consideramos ainda a versão do problema com recipientes de tamanhos variados (VCCBP). Este problema foi estudado primeiramente por Dawande *et al.* [Dawande et al. 2001, Dawande et al. 1998] onde uma tentativa de um APTAS foi considerada, para o caso em que o número de classes diferentes na entrada é limitado por uma constante. Mostramos que o algoritmo proposto por Dawande *et al.* [Dawande et al. 2001, Dawande et al. 1998] está errado e então mostramos um APTAS para o problema.

Estes resultados foram apresentados no *12th Annual International Computing and Combinatorics Conference, COCOON 2006* [Xavier and Miyazawa 2006b], e a versão completa foi submetida para uma revista internacional.

2.3. Problemas Duais com Restrições de Classe

Nesta seção consideramos as versões duais dos problemas com prateleiras (CCSBP) e *bin packing* com restrições de classes, (CCBP) vistos nas seções anteriores.

Nós apresentamos esquemas de aproximação duais para ambos os problemas. Um esquema de aproximação dual para o problema CCBP já havia sido proposto por Shachnai e Tamir [Shachnai and Tamir 2001b] para o caso onde o número de classes diferentes na entrada é limitado por uma constante. No trabalho delas é utilizado uma técnica de agrupamento de itens pequenos pois elas dizem que não puderam adotar as técnicas tradicionais onde primeiramente são considerados os itens grandes e em seguida é empacotado os itens pequenos no empacotamento gerado para os itens grandes.

Neste trabalho mostramos que é possível utilizar a técnica tradicional obtendo um PTAS dual com uma análise mais simples. Os esquemas de aproximação duais apresentados também consideram que o número de classes diferentes da entrada é limitado por uma constante. O artigo que corresponde a este trabalho foi submetido para publicação em uma revista internacional.

3. O Problema *Bin Packing* com Demandas

Nesta seção apresentamos algoritmos de aproximação para a versão do problema *bin packing* onde os itens possuem demandas, ou seja, para cada item existe uma multiplicidade que indica quantos itens deste tamanho devem ser empacotados. Estes problemas são conhecidos na literatura como problemas de *cutting stock*. Observamos que estes problemas se mostram muito mais complexos que a versão sem demandas e só se sabe que estão na classe EXPSPACE.

Em [Cintra 2004], é apresentado um algoritmo 4-aproximado para o problema *cutting stock* bidimensional. Nós melhoramos o resultado de [Cintra 2004] mostrando que algoritmos para o caso sem demandas podem ser extendidos para problemas com demanda, desde que obedeçam a certas propriedades, que chamamos de algoritmos comportados. Este é um resultado forte, uma vez que mostramos ser válido para qualquer dimensão e quase todos os melhores algoritmos para o caso sem demandas são comportados. Com isso, mostramos que o problema *cutting stock* unidimensional admite um FPTAS, o *cutting stock* bidimensional possui um algoritmo elegante com fator 2.077 (bem melhor que o fator de aproximação anterior de 4) e podemos obter algoritmos para outras dimensões e casos especiais. Os resultados deste capítulo serão publicados na revista *European Journal of Operational Research* [Cintra et al. b].

4. Problemas de Empacotamento Bidimensionais

Finalmente apresentamos algoritmos e heurísticas para problemas de empacotamento bidimensional que tratam restrições práticas importantes, como cortes guilhotinados e cortes em estágios. Usando técnicas de programação dinâmica, apresentamos um algoritmo exato para o problema da Mochila bidimensional com estágios e através de técnicas de geração de colunas, apresentamos algoritmos para o problema *cutting stock* bidimensional com estágios e para o problema *strip packing*, com estágios. Os resultados computacionais obtidos foram muito bons e mostram que estes algoritmos são adequados para instâncias práticas. Os resultados obtidos anteriormente por Cintra e Wakabayashi [Cintra and Wakabayashi 2004] junto com os obtidos nesta tese fazem parte de um artigo aceito para publicação na revista *European J. of Operational Research* [Cintra et al. a].

Referências

Cintra, G. F. (2004). *Algoritmos para problemas de corte de guilhotina bidimensional*. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo.

Cintra, G. F., Miyazawa, F. K., Wakabayashi, Y., and Xavier, E. C. Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming and column generation. European Journal of Operational Research, accepted.

Cintra, G. F., Miyazawa, F. K., Wakabayashi, Y., and Xavier, E. C. A note on the approximability of cutting stock problems. European Journal of Operational Research, to appear, http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.053.

Cintra, G. F. and Wakabayashi, Y. (2004). Dynamic programming and column generation based approaches for two-dimensional guillotine cutting problems. In *Proceedings of WEA 2004: Workshop on Efficient and Experimental Algorithms*, volume 3059 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 175–190.

Dawande, M., Kalagnanam, J., and Sethuranam, J. (1998). Variable sized bin packing with color constraints. Technical report, IBM, T.J. Watson Research Center, NY.

Dawande, M., Kalagnanam, J., and Sethuranam, J. (2001). Variable sized bin packing with color constraints. In *Proceedings of the 1th Brazilian Symposium on Graph Algorithms and Combinatorics*, volume 7 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*.

Ferreira, J. S., Neves, M. A., and Fonseca e Castro, P. (1990). A two-phase roll cutting problem. *European J. Operational Research*, 44:185–196.

Golubchik, L., Khanna, S., Khuller, S., Thurimella, R., and Zhu, A. (2000). Approximation algorithms for data placement on parallel disks. In *Proceedings of SODA*, pages 223–232.

Hochbaum, D. S. and Shmoys, D. B. (1987). Using dual approximation algorithms for schedulling problems: practical and theoretical results. *Journal of the ACM*, 34(1):144–162.

Hoto, R., Arenales, M., and Maculan, N. The one dimensional compartmentalized cutting stock problem: a case study. To appear in European Journal of Operational Research.

Kashyap, S. R. and Khuller, S. (2003). Algorithms for non-uniform size data placement on parallel disks. In *Proceedings of FSTTCS*, volume 2914 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 265–276.

Marques, F. P. and Arenales, M. The constrained compartmentalized knapsack problem. To appear in Computer & Operations Research.

Shachnai, H. and Tamir, T. (2001a). On two class-constrained versions of the multiple knapsack problem. *Algorithmica*, 29:442–467.

Shachnai, H. and Tamir, T. (2001b). Polynomial time approximation schemes for class-constrained packing problems. *Journal of Scheduling*, 4(6):313–338.

Shachnai, H. and Tamir, T. (2004). Tight bounds for online class-constrained packing. *Theoretical Computer Science*, 321(1):103–123.

Xavier, E. C. (2006). *Algoritmos para Problemas de Empacotamento*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. http://www.ic.unicamp.br/˜para/tese.pdf.

Xavier, E. C. and Miyazawa, F. K. A one-dimensional bin packing problem with shelf divisions. To appear in Discrete Applied Mathematics (Elsevier).

Xavier, E. C. and Miyazawa, F. K. (2005). A one-dimensional bin packing problem with shelf divisions. In *2nd Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms, and Combinatorics (GRACO 2005)*, volume 19 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*.

Xavier, E. C. and Miyazawa, F. K. (2006a). Approximation schemes for knapsack problems with shelf divisions. *Theoretical Computer Sciense*, 352(1-3):71–84.

Xavier, E. C. and Miyazawa, F. K. (2006b). The class constrained bin packing problem with applications to video-on-demand. In *Proceedings of the 12th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON'06)*, volume 4112 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 439–448.