Caracterizações de Grafos de Interseção de Triângulos

Márcia R. Cerioli [1,2], **Fabiano de S. Oliveira** [1]*, **Jayme L. Szwarcfiter**[1,2,3]

[1]COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal 68511 – 21941-972 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

[2]Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal 68530 – 21941-972 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

[3]Núcleo de Computação Eletrônica – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Caixa Postal: 2324 - 20010-974 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

{cerioli,fabsoliv}@cos.ufrj.br, jayme@nce.ufrj.br

Abstract. *A graph is a PI graph if it is the intersection graph of a family of triangles between two parallel lines. The recognition problem for the class of PI graphs has been open for 20 years. We present a study on such a class focusing on structural and computational aspects, in order to solve it. As main results, we relate PI graphs to the study of order dimensions and show that a particular defined dimension is a comparability invariant, a stronger result than the similar for the well-known interval dimension. Moreover, we formulate a conjecture which if it is true, then the recognition of PI graphs can be done efficiently. We theoretical and computationally analyze such a conjecture.*

Resumo. *Um grafo é um grafo PI se é o grafo de interseção de uma família de triângulos entre duas retas paralelas. O problema do reconhecimento da classe dos grafos PI está em aberto há 20 anos. Apresentamos um estudo desta classe enfocando aspectos estruturais e computacionais, visando a sua solução. Como principais resultados, relacionamos os grafos PI ao estudo de dimensão de ordens e mostramos que uma dimensão especial definida é um invariante de comparabilidade, resultado mais forte que o análogo para a bem conhecida dimensão intervalar. Formulamos também uma conjectura que se verdadeira implica no reconhecimento eficiente dos grafos PI. Analisamos esta conjectura de forma teórica e computacional, apontando evidências para sua veracidade.*

1. Introdução

Um grafo G é um *grafo de interseção* se podemos associar uma família de conjuntos a G, cada vértice correspondendo a um conjunto, tal que (u, v) é uma aresta de G se e somente se os conjuntos correspondentes a u e v têm interseção não vazia; tal família de conjuntos é chamada um *modelo de interseção* de G. Restringindo os modelos de interseção, diferentes classes de grafos de interseção são definidas. Um *grafo de intervalos* é o grafo de interseção de uma família de intervalos da reta real, chamada um *modelo de intervalos*. Um *grafo de permutação* é o grafo de interseção de uma

*Esta dissertação foi orientada por Márcia Cerioli e Jayme Szwarcfiter e apresentada em Fev/2006 à COPPE/UFRJ para a obtenção do grau de M. Sc., com financiamento do CNPq (bolsa de mestrado) e da FAPERJ (bolsa Nota 10). Versão completa: http://grafos.cos.ufrj.br/∼fabiano/DissertacaoFabiano_v7.pdf

família de segmentos de reta entre duas retas paralelas distintas L_1 e L_2, tendo cada segmento um extremo em L_1 e o outro em L_2; tal modelo é chamado um *modelo de permutação*. As classes dos grafos de intervalos e de permutação são bem conhecidas e estudadas, possuem muitas aplicações práticas e podem ser reconhecidas em tempo linear [Booth and Lueker 1976, Golumbic 1980].

Um *grafo PI* é o grafo de interseção de uma família de triângulos ABC entre duas retas paralelas distintas L_1 e L_2 tal que A pertence a L_1 e $\overline{BC}$ pertence a L_2; tal modelo é chamado um *modelo PI*. A Figura 1 ilustra um grafo PI e um de seus modelos PI. Grafos PI* são definidos analogamente aos grafos PI, exceto pelo fato de que seus modelos admitem triângulos tais que A pertence a L_2 e $\overline{BC}$ pertence a L_1.

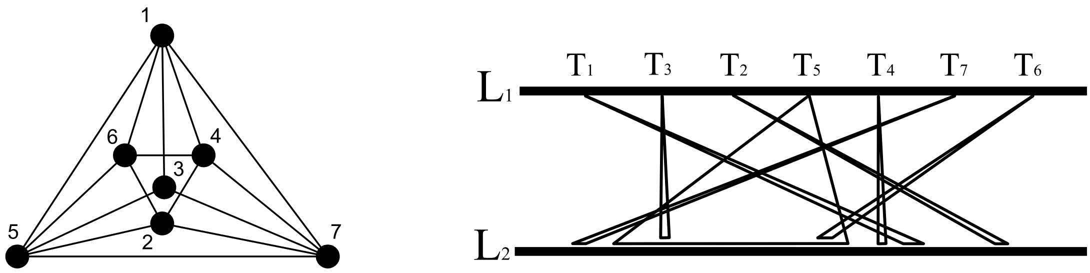

Figura 1. Um grafo PI e um modelo PI.

É fácil ver que a classe dos grafos PI contém a classe dos grafos de intervalos, pois restringindo-se $A \in [B; C]$ para todo triângulo, tornamos modelos PI equivalentes a modelos de intervalos, dado que dois triângulos se interceptam em tal caso se e somente se suas bases se interceptam. Ela também contém a classe dos grafos de permutação, pois restringindo-se $B = C$ para todo triângulo, transformamos modelos PI em modelos de permutação. Portanto, a classe dos grafos PI generaliza duas classes de grafos importantes. Os grafos PI foram definidos por Corneil e Kamula em 1987 e, desde então, o problema do reconhecimento desta classe está em aberto, apesar do esforço no intuito de resolvê-lo [Corneil and Kamula 1987, Cheah 1991, Brandstädt et al. 1999, Lin 2002, Spinrad 2003, de Almeida 2005, Oliveira 2006].

O problema do reconhecimento de grafos PI também é interessante por um motivo teórico. Superclasses da classe dos grafos PI, como grafos de trapézios e de cocomparabilidade, possuem reconhecimento eficiente, por diversas abordagens. Assim, surpreendentemente, superclasses e subclasses da classe dos grafos PI podem ser reconhecidas eficientemente, e nenhuma das estratégias de reconhecimento destas classes relacionadas obtiveram sucesso quando aplicadas no reconhecimento de grafos PI. Além disso, se seu reconhecimento for um problema NP-completo, teremos um exemplo não trivial onde o problema do reconhecimento alterna sua classificação entre P e NP-completo à medida que o consideramos sobre uma classe mais específica para uma classe mais geral.

2. Resumo da Dissertação e Resultados Obtidos

A dissertação está assim organizada. O Capítulo 1 destina-se a introduzir o assunto e a definir os termos básicos utilizados em todos os demais capítulos. No Capítulo 2, apresentamos classes de grafos relacionadas à classe dos grafos PI, a saber: grafos de permutação, grafos de intervalos, grafos PI*, grafos de trapézio simples, grafos de paralelogramos e grafos de trapézios. Todas são definidas de maneira uniforme, como grafos de interseção de figuras geométricas entre duas retas paralelas distintas. Referências são dadas para estudos específicos sobre cada uma destas classes e, ao final, é apresentada a hierarquia de inclusão conhecida entre elas. Durante este estudo, mostramos que a classe dos grafos PI* e a dos grafos de trapézios simples são incomparáveis. O relacionamento entre tais classes não se encontrava na literatura.

O Capítulo 3 descreve um método de reconhecimento da classe dos grafos de trapézios (grafos de interseção de trapézios entre duas retas paralelas distintas), devido a [Felsner et al. 1994] e [Langley 1995], que motivou uma das caracterizações dos grafos PI desenvolvidas na dissertação, utilizando a teoria de ordens [Trotter 1992].

O Capítulo 4 destina-se a três das quatro caracterizações dos grafos PI desenvolvidas em nosso trabalho. A primeira utiliza a abordagem de reduzir o problema de reconhecer grafos PI para o problema de reconhecer grafos de permutação com uma propriedade especial. Esta abordagem foi utilizada com sucesso para reconhecer grafos de trapézios [Cheah 1991], mas falhou para os grafos PI, pois neste caso a propriedade especial requerida é de difícil reconhecimento. A segunda caracterização estabelece que um grafo PI é a união em arestas de um grafo de permutação com um grafo de intervalos, ambos com o mesmo conjunto de vértices. Esta caracterização também não levou diretamente a um algoritmo eficiente de reconhecimento. A terceira caracterização utiliza a teoria de ordens e a descrevemos resumidamente a seguir.

Uma *ordem* $P = (X, \prec)$ consiste de uma relação binária $\prec$ irreflexiva e transitiva sobre um conjunto X. Se $x \prec y$ ou $y \prec x$, dizemos que x e y são *comparáveis* e, caso contrário, que são *incomparáveis*. Uma ordem é uma *ordem linear* se quaisquer dois elementos distintos são comparáveis. Uma ordem $(X, \prec)$ é uma *ordem intervalar* se é possível associar um modelo de intervalos $\{I_x \mid x \in X\}$ tal que $x \prec y$ se e somente se I_x está totalmente à esquerda de I_y. Uma ordem $P' = (X, \prec')$ é uma *extensão* de uma ordem $P = (X, \prec)$ se $x \prec y \implies x \prec' y$, e é uma *extensão linear* se P' for uma ordem linear. Similarmente, se a extensão P' for uma ordem intervalar, ela é dita ser uma *extensão intervalar*. Seja L um conjunto $\{P_1, \ldots, P_k\}$ de extensões de uma ordem P. Dizemos que L é um *realizador* de P se $P = \bigcap_{i=1}^{k} P_i$. A *dimensão linear* de P é o menor k para o qual existe um realizador de P contendo exatamente k extensões lineares. Analogamente, a *dimensão intervalar* de P é o menor k para o qual existe um realizador de P que contém precisamente k extensões intervalares.

Um *grafo de comparabilidade* é um grafo que admite uma orientação transitiva de suas arestas, i.e., orientações (a, b) e (b, c) implicam na orientação (a, c). O *grafo de comparabilidade* de uma ordem $P = (X, \prec)$ é o grafo (X, E), tal que $(x, y) \in E$ se e somente se x e y são comparáveis em P. Uma propriedade sobre ordens é dita ser um *invariante de comparabilidade* se ou todas as ordens com o mesmo grafo de comparabilidade possuem tal propriedade, ou nenhuma delas a possui. É conhecido que a dimensão linear e a dimensão intervalar são invariantes de comparabilidade.

Uma ordem $P = (X, \prec)$ é uma *ordem PI* se é possível associar a P um modelo PI, $\{T_x \mid x \in X\}$, tal que $x \prec y$ se e somente se T_x está totalmente à esquerda de T_y. Mostramos que o reconhecimento de um grafo PI é polinomialmente equivalente ao reconhecimento de uma ordem PI. Para isso, provamos que ser uma ordem PI é um invariante de comparabilidade. Definimos também uma dimensão de ordens especial que chamamos de *dimensão linear-intervalar*, e mostramos que uma ordem é ordem PI se e somente se a sua dimensão linear-intervalar é limitada por uma certa constante.

No Capítulo 5, encontra-se a quarta e última caracterização desenvolvida. Esta depende de uma conjectura elaborada no próprio capítulo. Ao contrário das demais, esta caracterização possui reconhecimento eficiente. Portanto, a solução eficiente do problema depende de uma resposta afirmativa à conjectura. No entanto, uma análise dos pontos de vista teórico e prático da conjectura é conduzida no final do capítulo, com o objetivo de buscar argumentos que justifiquem sua veracidade. Descrevemos a seguir sucintamente as bases desta caracterização.

Definimos uma operação sobre uma ordem P que produz o grafo G^P, associado a P. Provamos então que P é uma ordem PI se e somente se existir uma clique de G^P com precisamente metade de seus vértices e que respeita uma propriedade especial. Apesar de ser possível que G^P possua um número exponencial de cliques em relação ao seu número de vértices, mostramos que é possível encontrar uma clique com tal número de vértices eficientemente através da redução do problema ao problema 2-SAT, porém a clique encontrada pode ou não respeitar a tal propriedade especial. A conjectura mencionada é a de que a propriedade especial pode ser desconsiderada neste processo, seguindo que grafos PI teriam reconhecimento eficiente.

Analisando a conjectura do ponto de vista prático, desenvolvemos um programa para procurar por um contra-exemplo. O programa gera ordens sobre conjuntos de cardinalidade crescente e, para cada uma gerada, testa a conjectura. Seja $N(n)$ o número de ordens de tamanho n. Como $N(n)$ cresce muito rapidamente, uma aplicação direta do programa consegue atingir apenas valores pequenos para n. Como exemplo, analisando-se 1000 ordens por segundo, levaria-se mais de 200 anos para completar a análise das $N(10) = 6.611.065.248.783$ ordens. Entretanto, conseguimos descartar um número expressivo de ordens para análise baseado em resultados teóricos, o que fez com que conseguíssemos completar o teste para todas as $N(10)$ ordens e mais de $1,5$ bilhão de ordens de tamanho 11, utilizando 9 computadores trabalhando em paralelo por aproximadamente dois meses. Nenhum contra-exemplo foi encontrado. Do ponto de vista teórico, apresentamos uma transformação do grafo G^P em outro grafo $\overline{G}^P$ o qual mostramos ser equivalente a G^P para o teste da conjectura. A vantagem deste outro grafo é que foi mostrado que ele possui no mínimo 75% de todas as arestas possíveis. O argumento então é o de que como o grafo é denso e portanto propenso a ter muitas cliques, espera-se que no mínimo uma delas deva ter a propriedade especial requerida.

3. Conclusão

A classe dos grafos PI contém classes de grafos importantes para problemas práticos e foi definida por Corneil e Kamula há 20 anos. Desde então, variados esforços foram feitos na tentativa de resolver o problema do reconhecimento desta classe, porém sem sucesso até o presente momento. Durante o *levantamento das classes relacionadas à classe PI* mostramos que *as classes dos grafos PI* e a dos grafos de trapézios simples são incomparáveis*, observação não mencionada na literatura. Dentro da teoria de ordens, nossa contribuição foi a de definir a dimensão linear-intervalar e mostrar que *uma ordem é uma ordem PI se e somente se possuir dimensão linear-intervalar limitada por uma certa constante*. Mostramos também que *reconhecer uma ordem PI é um problema polinomialmente equivalente ao de reconhecer um grafo PI*. Como subproduto, provamos que *ser uma ordem PI é um invariante de comparabilidade*. Estes resultados foram apresentados no *Workshop on Graph Theory and Applications*, na Universidade de Federal do Rio Grande do Sul em Nov/2006. Além disso, mostramos que *a dimensão linear-intervalar é um invariante de comparabilidade*, generalizando o resultado análogo bem conhecido de que a dimensão intervalar é um invariante de comparabilidade. Um artigo contendo estes resultados está em elaboração para publicação em periódico. Apresentamos uma *conjectura que, se verdadeira, implica que os grafos PI podem ser reconhecidos eficientemente*. Analisamos a veracidade da conjectura tanto do ponto de vista prático quanto teórico, porém o problema de reconhecer os grafos PI continua em aberto. Finalmente, uma quinta abordagem utilizada que não gerou uma caracterização dos grafos PI, resultou no entanto numa *caracterização dos grafos de intervalos*. Este artigo foi apresentado no *Second Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, na Universidad Nacional de La Plata em Out/2006 e foi submetido para publicação em periódico.

Referências

Booth, K. S. and Lueker, G. S. (1976). Testing the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms. *Journal Comput. System Sci.*, pages 335–379.

Brandstädt, A., Le, V. B., and Spinrad, J. P. (1999). *Graph Classes: a Survey*. SIAM, Philadelphia.

Cheah, F. H. K. (1991). *A Recognition Algorithm for II-graphs*. PhD thesis, University of Toronto, Canada.

Corneil, D. G. and Kamula, P. K. (1987). Extensions of permutation and interval graphs. In *18th Southeastem Conference on Combinatorics*. Graph Theory and Computing.

de Almeida, S. M. (2005). Grafos PI. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Felsner, S., Habib, M., and Möhring, R. (1994). On the interplay between interval dimension and ordinary dimension. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 7:32–40.

Golumbic, M. C. (1980). *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. San Diego, Academic Press.

Langley, L. (1995). Recognition of orders of interval dimension 2. *Discrete Applied Mathematics*, 60:257–266.

Lin, Y.-L. (2002). Triangle graphs and simple trapezoid graphs. *J. Inf. Sci. Eng.*, 18(3):467–473.

Oliveira, F. S. (2006). Caracterizações de grafos de interseção de triângulos. Master's thesis, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil.

Spinrad, J. P. (2003). *Efficient Graph Representations*, volume 19 of *Fields Institute Monographs*. AMS.

Trotter, W. T. (1992). *Combinatorics and Partially Ordered Sets*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.