Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de Heawood

Alberto Alexandre Assis Miranda[1],
orientador: Cláudio Leonardo Lucchesi[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Caixa Postal 6176 – CEP 13084-971 – Campinas – SP - Brasil

Abstract. *This paper describes the work presented in the master dissertation "Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de Heawood", available at "http://www.ic.unicamp.br/~miranda/dissertacao.pdf", whose defense took place in August 7th, 2006, at the Institute of Computing, Unicamp. The use of Pfaffians in matching theory is due to Tutte [Tutte 1998]. While it was not possible to find a formula for the number of perfect matchings of a graph, Tutte used Pfaffians to prove his famous characterization of graphs that have a perfect matching. In 1975, C. Little presented a characterization of bipartite Pfaffian graphs. But it was only in 1998 that McCuaig and, independently, Robertson, Seymour and Thomas proved a theorem that implies a polynomial time algorithm to determine whether a bipartite graph is Pfaffian. Our dissertation presented a new proof of that theorem.*

Resumo. *Este artigo descreve o trabalho feito na dissertação de mestrado "Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de Heawood", disponível no endereço "http://www.ic.unicamp.br/~miranda/dissertacao.pdf", defendida no dia 7 de agosto de 2006, no Instituto de Computação da Unicamp. A idéia de usar Pfaffianos em teoria dos emparelhamentos é devida a Tutte [Tutte 1998]. Apesar de não ter encontrado uma fórmula para o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo como desejava, Tutte usou Pfaffianos para provar sua famosa caracterização de grafos que têm emparelhamento perfeito. Em 1975, Little apresentou uma caracterização de grafos bipartidos Pfaffianos. Mas foi somente em 1998 que McCuaig e, independentemente, Robertson, Seymour e Thomas provaram um teorema que implica em um algoritmo de tempo polinomial que determina se um grafo bipartido é Pfaffiano. Nossa dissertação apresentou uma nova demonstração para esse teorema.*

1. Orientações Pfaffianas

Seja G um grafo e D uma orientação de G. Seja Q um circuito de G com um número par de vértices. Seja p a paridade do número de arestas de Q que concordam com D em uma dada direção de percurso de Q. Diz-se que a *orientação* em D de Q é *ímpar* se p é ímpar. Um subgrafo H de um grafo G é *conforme* em G se $G - V(H)$ tem emparelhamento perfeito. A orientação D de G é *Pfaffiana* se todo circuito conforme de G com um número par de vértices tem orientação ímpar em D. O grafo G é *Pfaffiano* se tem uma orientação Pfaffiana.

2. Aplicações

O algoritmo para determinar se um grafo bipartido é Pfaffiano tem aplicações em química quântica, para a previsão da estabilidade de compostos complexos [Lovász and Plummer 1986, pág. 349-355], e em economia, para a previsão do sinal da derivada de variáveis econômicas, baseado somente em relações qualitativas entre as variáveis [McCuaig 2004]. Este último problema ficou em aberto de 1947 a 1998. Este algoritmo também resolve outros problemas de teoria dos grafos, como por exemplo determinar se um grafo orientado tem um circuito orientado com um número par de vértices, ou dar um método para contar o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo bipartido Pfaffiano em tempo polinomial [McCuaig 2004, págs. 25 e 35]. Além disso, dado um grafo bipartido Pfaffiano tal que um subconjunto de suas arestas tem cor vermelha este algoritmo determina se existe um emparelhamento perfeito com precisamente k arestas vermelhas [Galluccio and Loebl 1999].

3. Resultados Anteriores

Motivado por problemas externos à teoria dos grafos, o químico Kasteleyn [Kasteleyn 1963] demonstrou, em 1963, que todo grafo planar tem uma orientação Pfaffiana. O grafo $K_{3,3}$ é o menor grafo não Pfaffiano. Little [Little 1975] demonstrou, em 1975, que um grafo bipartido é Pfaffiano se e somente se não contém subgrafo conforme que é uma bissubdivisão de $K_{3,3}$. Uma *subdivisão* de um grafo é obtida substituindo-se arestas do grafo por caminhos. Uma *bissubdivisão* é uma subdivisão onde todos os caminhos que substituem arestas têm um número par de vértices internos[1]. No entanto, a caracterização de Little não implica em um algoritmo de tempo polinomial para reconhecimento de grafos bipartidos Pfaffianos. De 1975 até 1998 não se conhecia tal algoritmo, até que McCuaig [McCuaig 2004], e, independentemente, Robertson, Seymour e Thomas [Robertson et al. 1999], descobriram um algoritmo de tempo polinomial para decidir se um grafo bipartido tem ou não uma orientação Pfaffiana.

As demonstrações de McCuaig e de Robertson, Seymour e Thomas utilizam métodos muito distintos. No entanto, ambas são extremamente complexas, e poucas pessoas as compreendem. Na dissertação "Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de Heawood", apresentamos uma demonstração diferente das demonstrações anteriores, mais bem estruturada, e de uma forma mais compreensível. Nas seções seguintes, apresentamos superficialmente como o algoritmo funciona e como é provada sua corretude.

4. O Algoritmo

Um *grafo coberto por emparelhamentos* é um grafo conexo e não trivial no qual toda aresta pertence a algum emparelhamento perfeito. O estudo de grafos Pfaffianos pode ser restrito aos grafos cobertos por emparelhamentos, de forma natural.

Um *corte justo* em um grafo G coberto por emparelhamentos é um corte que contém precisamente uma aresta em cada emparelhamento perfeito do grafo. Seja $C := \partial(X)$ um corte não trivial em G. O grafo H obtido a partir de G pela contração de todos os vértices em X a um único vértice x é chamado de C-*contração*, e representado por $H := G\{X \to x\}$. As duas C-contrações de G são $G\{X \to x\}$ e $G\{\overline{X} \to \overline{x}\}$.

[1]Na literatura, uma bissubdivisão é chamada por alguns autores de subdivisão ímpar e por outros de subdivisão par. Por este motivo, a exemplo de McCuaig, decidimos utilizar bissubdivisão.

Caso G seja coberto por emparelhamentos e C um corte justo, ambas as C-contrações de G são cobertas por emparelhamentos. Esta operação pode ser repetida caso os grafos obtidos ainda tenham cortes justos não triviais. Este processo denomina-se *decomposição em cortes justos*. Little e Rendl [Little and Rendl 1991] provaram, em 1991, que um grafo G coberto por emparelhamentos que tem um corte justo C é Pfaffiano se e somente se ambas as C-contrações de G são Pfaffianas. Sendo assim, pode-se reduzir o problema de se decidir se um grafo G coberto por emparelhamentos é Pfaffiano ao problema de se decidir se os grafos resultantes de sua decomposição em cortes justos são Pfaffianos. Desta forma, podemos reduzir o problema de se decidir se um grafo é Pfaffiano aos grafos cobertos por emparelhamentos livres de cortes justos não triviais. Além disso, existem algoritmos de tempo polinomial para fazer tais decomposições.

Os grafos cobertos por emparelhamentos livres de cortes justos não triviais são separados em duas classes: *tijolos* e *presilhas*. As presilhas são bipartidas, e os tijolos não são bipartidos. A decomposição em cortes justos de um grafo bipartido coberto por emparelhamentos produz somente presilhas. Sendo assim, o problema Pfaffiano se reduz no caso bipartido a presilhas. Mais especificamente, o algoritmo de McCuaig, e de Robertson, Seymour e Thomas decide, em tempo polinomial, se uma presilha é Pfaffiana.

Seja G um grafo coberto por emparelhamentos com bipartição $\{U, W\}$. Uma quádrupla Z de quatro vértices de G *reduz* G se:

- Z contém dois vértices em U e dois vértices em W;
- $G - Z$ consiste de três ou mais componentes conexas, $J_1, J_2, \ldots, J_r$ ($r \geq 3$).

A *redução* criada por Z consiste nos r grafos $G_1, G_2, \ldots, G_r$ onde $G_i := G^\star[Z \cup V(J_i)]$ e $G^\star$ é o grafo bipartido minimal obtido a partir de G por adição de arestas garantindo que $G^\star[Z]$ é um quadrilátero (Figura 1). Demonstra-se que G é uma presilha Pfaffiana se e somente se cada G_i é uma presilha Pfaffiana. Esta redução pode ser repetida até que o conjunto de presilhas obtido tenha somente presilhas irredutíveis. Assim, o algoritmo reduz o problema Pfaffiano bipartido a presilhas irredutíveis. Por exemplo, o algoritmo reduz o problema de se decidir se a presilha mostrada na Figura 1 é Pfaffiana ao problema de se decidir se as cinco presilhas menores mostradas (cubos) são Pfaffianas.

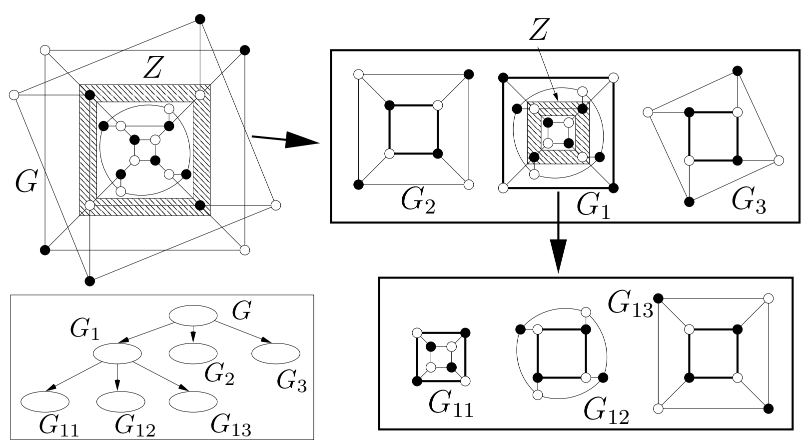

Figura 1. Redução a presilhas irredutíveis.

Todo grafo planar é Pfaffiano, como provado por Kasteleyn [Kasteleyn 1963]. Pode-se testar se um grafo é planar em tempo linear [Hopcroft and Tarjan 1974]. Sendo assim, o único caso restante a tratar é quando temos uma presilha irredutível não planar. Para este caso, o Teorema Principal, enunciado a seguir, nos mostra que basta verificarmos se a presilha é o grafo de Heawood a menos de arestas múltiplas (Vide Figura 2). A dissertação "Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de Heawood" apresenta uma prova alternativa para o Teorema Principal.

Teorema 4.1 (Teorema Principal) *A única presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar é o grafo de Heawood. (Vide Figura 2)*

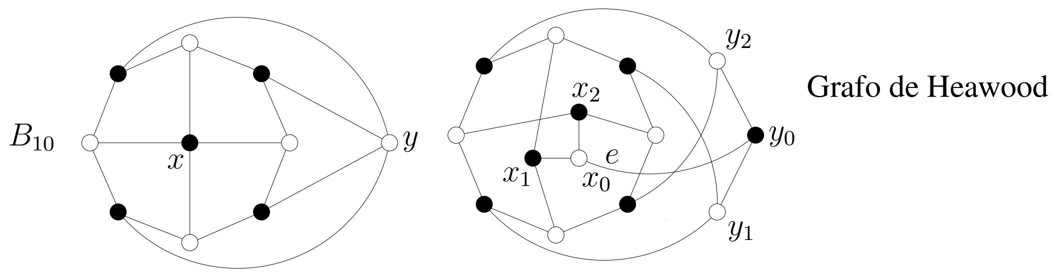

Figura 2. A presilha H de $G - e$ e o grafo G, o grafo de Heawood.

5. Demonstração do Teorema Principal

A seguir, descreveremos superficialmente como é feita a prova do Teorema Principal. Para demonstrarmos o Teorema Principal, utilizamos três importantes lemas.

Lema 5.1 (Lema do Grafo de Heawood Não Contido) *Se G é presilha Pfaffiana, e e aresta de G, então nenhuma presilha da decomposição em cortes justos de $G - e$ é o grafo de Heawood, mesmo desconsiderando-se aresta múltiplas.*

Lema 5.2 (Lema da Herança da Irredutibilidade) *Se G é presilha Pfaffiana irredutível, então, para toda aresta e, toda presilha da decomposição em cortes justos de $G - e$ é irredutível.*

Lema 5.3 (Lema da Não Planaridade das Contrações) *Seja G uma presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar. Para toda aresta e de G, e corte justo $\partial(X) - e$ de $G - e$, com $|X| \leq 5$, temos que $(G - e)\{X \rightarrow x\}$ não é planar.*

Uma *bicontração* é uma operação aplicada sobre um grafo contendo um vértice com dois vizinhos, onde este vértice e seus vizinhos são contraídos a um único vértice. O *índice* de uma aresta é o número de seus extremos com grau precisamente três. Uma aresta e de uma presilha G é *magra* se uma presilha pode ser obtida de $G - e$ por k bicontrações, onde k é o índice de e. Uma aresta magra e é dita *verdadeiramente magra* se a presilha obtida de $G - e$ através das k bicontrações for simples. Um teorema de McCuaig [McCuaig 2001] caracteriza as presilhas sem aresta verdadeiramente magra.

Teorema 5.4 ([McCuaig 2001]) *As únicas presilhas simples sem aresta verdadeiramente magra são os prismas bipartidos L_{4n}, para $n \geq 2$, as escadas de Möbius M_{4n+2}, para $n \geq 1$, e as rodas duplas B_{4n+2}, para $n \geq 2$.*

A prova do Teorema Principal segue a seguinte linha. Seja G uma presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar. Adote como hipótese de indução que o Teorema

Principal vale para todo grafo menor do que G. Seja e uma aresta de G. Seja H uma presilha de $G - e$. Pelo Lema da Herança da Irredutibilidade, H não é redutível. O grafo H é Pfaffiano. Então, pela hipótese de indução adotada, H é ou planar ou o grafo de Heawood. Pelo Lema do Grafo de Heawood Não Contido, H não é o grafo de Heawood. Então, H é planar, para toda aresta e de G.

De acordo com o Teorema 5.4, as únicas presilhas simples não planares sem arestas verdadeiramente magras são as escadas de Möbius. No entanto, nenhuma escada de Möbius é Pfaffiana. Sendo assim, G tem uma aresta verdadeiramente magra e. Vimos anteriormente que as presilhas de $G - e$ são planares. Então, pelo Lema da Não Planaridade das Contrações, temos que o índice de e é precisamente dois. Em seguida, pode-se demonstrar que a presilha H obtida por bicontrações a partir de $G - e$ não tem aresta verdadeiramente magra. Então, H é um prisma, uma escada de Möbius ou uma roda dupla. No entanto, H tem dois vértices de grau quatro (os vértices de contração). Sendo assim, H é a roda dupla B_{10} com 10 vértices (Figura 2). Finalmente, usando o Lema da Não Planaridade das Contrações conseguimos deduzir as adjacências dos vértices contraídos e mostramos que G é o grafo de Heawood, como mostrado na Figura 2.

Em tempo: após a aceitação do artigo pelo CTD, os autores obtiveram um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos. Esta classe, exceto pelos grafos planares, é a única de grafos Pfaffianos não bipartidos conhecida e foi caracterizada por Fischer e Little [Little and Fischer 2001]. O algoritmo é inédito e foi obtido essencialmente usando-se a mesma abordagem da dissertação.

References

Galluccio, A. and Loebl, M. (1999). On the theory of pfaffian orientations. *The Eletronic Journal of Combinatorics*.

Hopcroft, J. and Tarjan, R. (1974). Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21(4):549–568.

Kasteleyn, P. W. (1963). Dimer statistics and phase transitions. *J. Math. Phys.*, 4:287–293.

Little, C. and Rendl, F. (1991). Operations preserving the Pfaffian property of a graph. *Austral Math. Soc.*, Series A(50):248–257.

Little, C. H. C. (1975). A characterization of convertible $(0, 1)$-matrices. *J. Combin. Theory Ser. B*, 18:187–208.

Little, C. H. C. and Fischer, I. (2001). A characterisation of Pfaffian near bipartite graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 82:175–222.

Lovász, L. and Plummer, M. D. (1986). *Matching Theory*. Number 29 in Annals of Discrete Mathematics. Elsevier Science.

McCuaig, W. (2001). Brace generation. *J. Graph Theory*, 38:124–169.

McCuaig, W. (2004). Pólya's permanent problem. *The Electronic J. of Combin.*, 11.

Robertson, N., Seymour, P. D., and Thomas, R. (1999). Permanents, Pfaffian orientations and even directed circuits. *Ann. of Math. (2)*, 150:929–975.

Tutte, W. T. (1998). *Graph Theory as I Have Known It*. Number 11 in Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Clarendon Press, Oxford.