

TESE DE DOUTORADO

Dois problemas de otimização em grafos: Transporte em redes de dutos e Busca com custos de acesso

Artur Alves Pessoa¹ *,
Ruy Luiz Milidiú (orientador)¹ ,
Eduardo Sany Laber (co-orientador)¹

¹Departamento de Informática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente 225, RDC, 4^o andar,
CEP 22453-900, Rio de Janeiro - RJ, Brasil

{artur,milidiu,laber}@inf.puc-rio.br

Abstract. We consider two combinatorial optimization problems that are very different from each other: the pipeline network transportation problem (PTD), and the problem of searching with access costs (PBC). PTD uses a new simplified model, based on the operations of Petrobras' oil pipelines. We also define several variations of this problem. For the most general variation, we prove that finding a feasible solution is $\mathcal{NP}$ -hard. For another one, we show how to find a solution that minimizes the transportation costs in polynomial time. In this case, we also prove that minimizing the makespan is hard to approximate. PBC considers the search for an element in an ordered vector with different access costs. We present $(2 + \epsilon + o(1))$ -approximate linear-time algorithms to minimize either the cost of the worst search or the average search cost. We also present an $O(\log n)$ -approximate algorithm for the average cost problem that has a good performance for some tested practical cases, where n is the input size.

Resumo. Consideramos dois problemas de otimização combinatória bastante distintos: o problema de transporte em redes de dutos (PTD) e o problema de busca com custos de acesso (PBC). O PTD utiliza um novo modelo simplificado, baseado nas operações dos oleodutos da Petrobras. Também definimos diversas variações deste problema. Para a variação mais genérica, provamos que encontrar uma solução viável é $\mathcal{NP}$ -difícil. Para outra, mostramos que a minimização dos custos de transporte dutoviário, pode ser resolvida em tempo polinomial. Neste caso, também provamos que a minimização do makespan é difícil de aproximar. O PBC considera a busca por um elemento num vetor ordenado com custos de acesso variados. Apresentamos algoritmos lineares $(2 + \epsilon + o(1))$ -aproximados para minimizar o custo da pior busca ou o custo médio de uma busca. Também apresentamos um algoritmo $O(\log n)$ -aproximado para o custo médio que apresenta um desempenho muito bom para alguns casos práticos testados, onde n é o tamanho da entrada.

*Financiado pela Bolsa Nota 10 – FAPERJ

1. Introdução

Nesta tese de doutorado, consideramos dois problemas de otimização combinatória bastante distintos: o problema de transporte em redes de dutos (PTD) e o problema de busca com custos de acesso variados (PBC).

O primeiro problema é inspirado nos problemas de escalonamento de tarefas [Pinedo, 1994], onde diversos autores estudaram e determinaram as complexidades de inúmeras variações de modelos combinatórios simplificados. Como consequência, uma vasta coleção de artigos está disponível na literatura para pesquisadores dedicados ao desenvolvimento de ferramentas práticas de escalonamento. Apesar de muitos problemas práticos apresentarem características particulares que impedem a utilização direta dos métodos propostos nos artigos, a importância deste trabalho é amplamente reconhecida pela comunidade internacional de ciência da computação.

Seguindo o exemplo dos problemas de escalonamento de tarefas, PTD utiliza um novo modelo simplificado que foi proposto nesta tese, com base em levantamento feito na Transpetro, subsidiária da Petrobras que opera oleodutos. A partir deste modelo, definimos diversas variações de um problema de otimização combinatória que captura as características essenciais do problema prático de transporte dutoviário. Além disso, determinamos a complexidade algorítmica de algumas destas variações enquanto outras tantas permanecem em aberto. Na seção 2, apresentamos mais detalhes sobre o transporte por oleodutos, o PTD e os resultados obtidos.

O segundo problema considera a busca por um elemento num vetor ordenado e armazenado em meios físicos heterogêneos. Neste caso, o custo de cada acesso pode variar em função da posição do elemento acessado. Observe que, se todos os custos e probabilidades de acesso são iguais, então a melhor estratégia de busca é a busca binária, um algoritmo clássico ensinado nas disciplinas mais básicas de qualquer curso de computação. Portanto, o PBC é uma extensão natural de um problema fundamental da computação. Apesar de clássico, este tipo de problema tem motivado publicações recentes [Charikar et al., 2002].

Nesta tese, apresentamos algoritmos lineares $(2 + \epsilon + o(1))$ -aproximados para o PBC, minimizando o custo da pior busca ou o custo médio de uma busca. Em ambos os casos o melhor algoritmo exato conhecido executa em tempo $O(n^3)$, onde n é o tamanho do vetor [Knight, 1988, Navarro et al., 2000]. Também apresentamos um algoritmo $O(\log n)$ -aproximado que apresenta um desempenho muito bom para alguns casos práticos testados. Na seção 3, apresentamos mais detalhes sobre o PBC e os resultados obtidos.

Os seguintes artigos derivados desta tese que já foram publicados em periódicos reconhecidos internacionalmente, todos com qualis “A” segundo a CAPES (2002):

- MILIDIÚ, PESSOA and LABER, “The Complexity of Makespan Minimization for Pipeline Transportation”. Theoretical Computer Science 306(1-3).
- LABER, MILIDIÚ and PESSOA, “On Binary Searching with Non-uniform Costs”. SIAM Journal on Computing 31(4).
- LABER, MILIDIÚ and PESSOA, “A Strategy for Searching with Different Access Costs”. Theoretical Computer Science 287(2).

Além disso, listamos os principais artigos derivados desta tese que já foram publicados em congressos reconhecidos internacionalmente, todos com qualis “A” segundo a CAPES (2002):

- MILIDIÚ, PESSOA and LABER, “Complexity of Makespan Minimization for Pipeline Transportation of Petroleum Products”. Proceedings of APPROX’2002.
- MILIDIÚ, PESSOA and LABER, “Pipeline Transportation of Petroleum Products with No Due Dates”. Proceedings of LATIN’2002.
- LABER, MILIDIÚ and PESSOA, “On Binary Searching with Non-uniform Costs”. Proceedings of SODA’2001.
- LABER, MILIDIÚ and PESSOA, “Strategies for Searching with Different Access Costs”. Proceedings of ESA’1999.

Adicionalmente, resultados preliminares desta tese foram publicados em [Milidiú et al., 1999, Milidiú et al., 2000, Milidiú et al., 2001]. Finalmente, o seguinte artigo está submetido a um periódico internacional, também com qualis “A” segundo a CAPES (2002):

- MILIDIÚ, PESSOA and LABER, “Pipeline Transportation of Petroleum Products with No Due Dates”. Submetido ao Algorithmica.

2. Transporte em Redes de Dutos

O transporte dutoviário apresenta características muito peculiares, o que torna o problema de planejamento subjacente bastante diferente de outros problemas de transporte encontrados na literatura. Apesar de oleodutos transportarem produtos líquidos, produtos distintos podem ser transportados num mesmo oleoduto, um depois do outro, desde que as quantidades de cada produto não sejam muito pequenas. Outra importante característica dos oleodutos é o fato de que eles devem permanecer sempre cheios de líquido. Portanto, assumindo que os líquidos são incompressíveis, a movimentação da carga de um oleoduto consiste obrigatoriamente na inserção (ou bombeamento) de produto numa extremidade e na retirada simultânea da mesma quantidade de produto na extremidade oposta. Observe que o produto retirado numa extremidade não é necessariamente o mesmo que o inserido na extremidade oposta, como mostra a Figura 1.(a). Esta figura representa o conteúdo de um oleoduto preenchido por dois produtos B e A distintos, da esquerda para a direita. Neste caso, a inserção de uma certa quantidade de um produto C na extremidade à esquerda do duto força a retirada da mesma quantidade do produto A na extremidade à direita. Como resultado desta operação, observe que o produto B é deslocado para a direita dentro do duto. A Figura 1.(b) mostra o conteúdo do duto após esta operação.

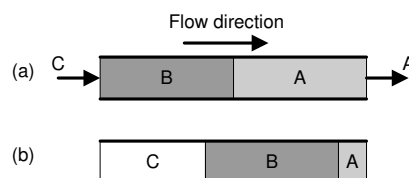


Figura 1: (a) o conteúdo de um oleoduto; (b) o conteúdo do mesmo oleoduto após a inserção de uma certa quantidade do produto C.

No contexto de oleodutos, o termo *batelada* é usado para denotar um montante de produto que aparece contíguo numa rede de oleodutos.

2.1. Motivação

O transporte dutoviário é um dos meios de transporte mais importantes quando a carga consiste em petróleo ou derivados. Dentre os diversos meios disponíveis, os oleodutos são a forma mais efetiva e segura para se transportar grandes quantidades de petróleo ou derivados por grandes distâncias. No entanto, devido à grande quantidade de energia necessária para mover grandes volumes e ao alto valor de mercado do produto transportado, os custos envolvidos na operação dos oleodutos são enormes. Por isso, esforços no sentido de minimizar estes custos são de grande interesse.

Por outro lado, desenvolver uma ferramenta de planejamento para uma rede de oleodutos pode ser uma tarefa incrivelmente complexa, mesmo quando as redes são relativamente simples e os horizontes de planejamento considerados são modestos [Hane and Ratliff, 1995, da Silva, 1999, Más, 2001, Milidiú et al., 2003]. Como resultado disto, grandes quantias deixam de ser economizadas todos os anos devido às limitações das ferramentas de planejamento existentes. Nesta tese de doutorado, desenvolvemos modelos simplificados para o problema de transporte por oleodutos visando identificar propriedades combinatórias inerentes a este tipo de transporte. Algumas das propriedades identificadas explicam as dificuldades encontradas no desenvolvimento de ferramentas de planejamento e sugerem abordagens para contornar estas dificuldades.

2.2. O Modelo

O PTD é definido da seguinte forma. Um duto é representado por uma FILA de bateladas cujo número de elementos deve se manter fixo. Como consequência deste número fixo de bateladas, sempre que uma batelada é inserida (*push*) no final de um duto, a batelada do início deve ser removida (*pop*). Desta forma, as operações *push* e *pop* são simultâneas, resultando numa operação híbrida que denominamos *push-pop* (PP). Uma rede de dutos é definida por um grafo orientado $G = (N, A)$ onde cada arco $a \in A$ tem um duto associado com $v(a)$ posições, cada posição contendo uma batelada. No PTD, também é dado um conjunto L de bateladas. Cada batelada b tem um nó de destino $d_b \in N$ e uma posição inicial $p_0(b)$. A posição inicial de b pode ser um nó de G ou um par arco-índice (a, l) , indicando que b está na l -ésima posição do duto a . Para cada arco $a = (i, j)$, uma operação PP consiste em inserir no duto uma batelada contida no nó i e guardar no nó j a batelada removida deste duto. Como o número de bateladas contidas no duto permanece sempre constante, também é dado um subconjunto $F \subset L$ de bateladas *proteláveis*, que não precisam chegar aos seus destinos. Estas bateladas podem ser utilizadas para preencher os dutos de rede enquanto as outras são entregues. Apesar disto, não admitimos inserir uma batelada protelável b num duto a quando não existe nenhum caminho conectando o nó de saída de a a d_b . O objetivo do problema é encontrar uma seqüência de operações que transporte todas as bateladas não-proteláveis aos seus respectivos nós de destino.

2.3. Resultados

Nesta tese de doutorado, apresentamos vários resultados em relação ao PTD [Milidiú et al., 2002, Milidiú et al., 2003]. A própria definição do PTD e de suas variações é original. Além disso, demonstramos que encontrar uma solução viável para o PTD é um problema $\mathcal{NP}$ -difícil, mesmo que o grafo G seja acíclico. Por isso, consideramos o PTD síncrono (PTDS), uma variação do PTD onde nenhuma batelada protelável

está inicialmente contida em um duto. Assumindo que cada batelada b tem um peso $w(b)$ associado, o custo de uma operação PP em um duto é modelado como uma combinação linear dos pesos das bateladas envolvidas. Neste caso, o PTDS de custo mínimo (PTDSC) consiste em encontrar uma solução de custo mínimo para o PTDS, onde o custo de uma solução é dado pela soma dos custos de suas operações. Para este problema, apresentamos o algoritmo BPA (*Batch-to-Pipe Assignment*), um algoritmo polinomial que obtém uma solução viável para o PTDSC. Caso o grafo G seja acíclico, a solução dada pelo algoritmo BPA é ótima. Além disso, o algoritmo BPA é estendido para o caso em que bateladas com mesma origem, destino e peso podem ser agrupadas em ordens. Neste caso, o tempo de execução do algoritmo permanece polinomial em relação a uma entrada representada de forma mais compacta.

Também consideramos o PTDS de *makespan* mínimo (PTDSM), que consiste em obter uma solução para o PTDS que minimiza o tempo necessário para terminar a última operação PP. Neste caso, assumimos que cada duto pode executar uma operação PP a cada unidade de tempo. Demonstramos que o PTDSM não admite nenhum algoritmo polinomial $\eta^{1-\epsilon}$ -aproximado para qualquer $\epsilon > 0$, a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, onde η é o tamanho da instância. Este resultado ainda vale se o grafo G é acíclico e planar. Além disso, mostramos que o algoritmo BPA fornece uma solução $|A|$ -aproximada para o caso em que o grafo G é acíclico. Apesar deste fator de aproximação ter um crescimento assintótico elevado, o nosso resultado anterior mostra que qualquer fator de aproximação que não apresente um crescimento semelhante implica em $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

A tabela a seguir resume os resultados obtidos e aqueles que permanecem abertos.

Problema	Grafo	Complexidade	Aproximação	Algoritmo
PTD	acíclico	$\mathcal{NP}$ -difícil	–	–
PTDS	geral	$\in \mathcal{P}$	–	BPA-P
PTDSC	acíclico	$\in \mathcal{P}$	1	BPA-P
PTDSC	geral	aberto	aberto	–
PTDSM	acíclico, planar	$\mathcal{NP}$ -completo	$> \eta^{1-\epsilon}$	BPA-P
PTDSM	acíclico	$\mathcal{NP}$ -completo	$\leq m$	BPA-P

Nesta tabela, η representa o tamanho da instância e m o número de dutos da rede.

3. Busca com Custos de Acesso

Seja $\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_n]$ um vetor ordenado onde $c(a_i)$ é o custo de acessar o seu i -ésimo elemento. O objetivo do problema é encontrar uma estratégia de busca de custo mínimo para o vetor $\mathcal{A}$. Se todos os custos de acesso são iguais, então a melhor estratégia de busca possível é a busca binária, que permite encontrar qualquer elemento após $O(\log n)$ acessos. Por outro lado, se os custos de acesso são variados, então a busca binária não é necessariamente uma estratégia ótima. Neste caso, chamamos este problema de PBC.

Consideramos duas formas de calcular o custo de uma estratégia de busca para o PBC: pelo custo médio e pelo pior custo de uma busca. Chamamos os respectivos problemas de problema da busca de custo médio (PBCM) e de problema da busca de pior custo (PBPC). No caso do PBCM, assumimos que todos os elementos de $\mathcal{A}$ têm a mesma probabilidade de acesso. Em ambos os casos, o melhor algoritmo exato conhecido

utiliza programação dinâmica, executando em tempo $O(n^3)$ e utilizando um espaço de memória $O(n^2)$ [Knight, 1988, Navarro et al., 2000]. No caso do PBCM [Knight, 1988], o desenvolvimento do algoritmo é motivado por um problema de projeto de filtros. O autor também considera o caso particular onde a chave de busca a_i tem custo proporcional a i^k , para um dado valor inteiro positivo de k . Neste caso, ele prova que o custo de uma busca binária está a um fator constante da estratégia ótima.

3.1. Resultados

Nesta tese de doutorado, apresentamos algoritmos aproximados para o PBCM e para o PBPC [Laber et al., 1999, Laber et al., 2002b, Laber et al., 2001, Laber et al., 2002a].

Para o PBCM, apresentamos o Algoritmo da Razão. Este algoritmo sempre obtém uma solução de custo menor ou igual a $4 \ln(n + 1)/n$, assumindo que a soma dos custos de todas as chaves de $\mathcal{A}$ é 1. Vale mencionar que esta solução é sempre $4 \ln(n + 1)$ -aproximada. No pior caso, este algoritmo roda em tempo $O(n^2)$ e utiliza um espaço linear. Também apresentamos alguns experimentos comparativos para duas estruturas de custo específicas: uma foi proposta em [Knight, 1988] e a outra é aleatória. Estes experimentos sugerem que o Algoritmo da Razão é o melhor algoritmo não exato para estas estruturas de custo. Nestes experimentos, o Algoritmo da Razão obteve soluções cujos custos apresentaram erros abaixo de 3% em relação aos respectivos custos ótimos.

Além disso, introduzimos uma nova abordagem para desenvolver algoritmos aproximados para problemas de busca com custos de acesso variados. Esta abordagem utiliza uma técnica conhecida como escala de custos, que também é usada em problemas de fluxo em redes [Ahuja et al., 1993] e em outras variações do PBC [Charikar et al., 2002]. No entanto, a característica mais interessante desta abordagem é a demonstração de limites inferiores para o custo a partir de um esquema de decomposição do problema. Com base nesta abordagem, desenvolvemos os algoritmos de Escala de Custos para Busca Média (ECBM), para o PBCM, e de Escala de Custos para a Pior Busca (ECPB), para o PBPC. Ambos constroem soluções $(2 + \epsilon + o(1))$ -aproximadas, para qualquer $\epsilon > 0$, em tempo linear e utilizando um espaço linear. Em ambos os casos, não utilizamos nenhuma hipótese sobre a estrutura dos custos da entrada.

3.1.1. Técnica de Partição por Escala de Custos

Nesta sessão, apresentamos um esboço de uma das várias técnicas desenvolvidas e aplicadas nesta tese: a partição por escala de custos. Esta técnica permitiu o desenvolvimento dos algoritmos ECBM e ECPB, e dos limites inferiores utilizados nas suas provas de aproximação.

Qualquer estratégia de busca para $\mathcal{A}$ pode ser representada por uma árvore binária de busca (ABB) T associada a $\mathcal{A}$, com as seguintes duas propriedades. Cada nó de T corresponde a um elemento de $\mathcal{A}$. Dado um nó a de T , todos os nós da sub-árvore cuja raiz é filha à esquerda (direita) de a estão à esquerda (direita) de a no vetor $\mathcal{A}$. Com isso, o PBC pode ser visto com o problema de construir de uma ABB com n nós, minimizando o maior custo de um caminho a partir da raiz, no caso do PBPC, ou a média dos custos dos caminhos que partem da raiz, no caso do PBCM. Uma árvore estritamente binária de busca (AEBB) é uma ABB onde cada nó tem dois ou nenhum filho.

Na construção de uma ABB, tanto ECBM quanto o ECPB agrupam as chaves do vetor de entrada segundo uma escala de custos de acesso. Dizemos que uma chave tem posto i quando ela pertencem ao i -ésimo grupo desta escala, em ordem crescente de custo. Ambos os algoritmos utilizam a *regra do menor posto* para construir uma ABB T , ou seja, as chaves de menor posto são sempre acessadas antes das de maior posto. Para isto, eles utilizam uma abordagem *top-down*. Primeiro, todas as chaves de posto mínimo do vetor corrente são selecionadas. Depois, cada subsequência contígua de chaves não-selecionadas delimitada pelas chaves selecionadas é condensada num único nó. Subseqüências vazias também são consideradas. Em seguida, ambos os algoritmos constroem uma AEAB auxiliar T_D , onde cada nó interno corresponde a uma chave selecionada e cada folha corresponde a uma subsequência condensada. A única diferença entre o ECBM e o ECPB está no algoritmo utilizado para construir T_D . Como cada subsequência condensada também corresponde a um subvetor do vetor de entrada, ambos os algoritmos resolvem recursivamente os subproblemas associados a estas subsequências. A ABB associada ao subvetor corrente é obtida após a substituição de cada folha de T_D pela ABB construída recursivamente para a subsequência condensada correspondente.

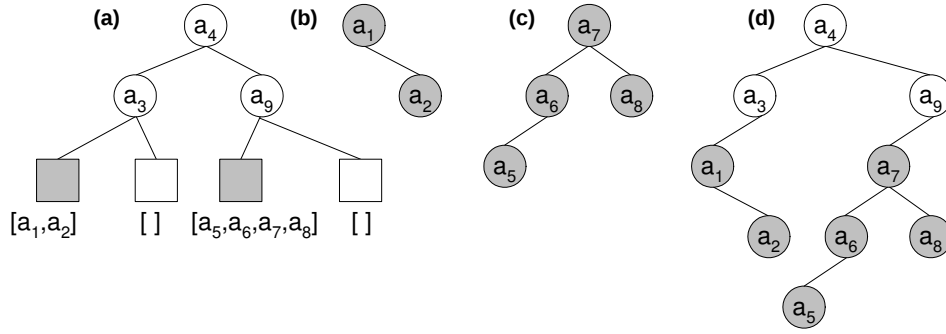


Figura 2: Passos da construção de uma ABB pelo algoritmo ECBM.

Agora, ilustramos o ECBM através de um exemplo. Seja $L = [a_1, \dots, a_9]$ um vetor cujos custos de acesso são dados por $[0.1, 0.1, \mathbf{0.05}, \mathbf{0.03}, 0.3, 0.1, 0.08, 0.2, \mathbf{0.04}]$. Os custos das chaves de posto mínimo estão em negrito. A Figura 2 representa alguns passos da construção de uma ABB pelo ECBM, quando L é o vetor de entrada. Primeiro, o ECBM escolhe as chaves a_3 , a_4 e a_9 , dividindo o que sobrou de L em quatro subsequências de chaves: $L_1 = [a_1, a_2]$, $L_2 = []$, $L_3 = [a_5, \dots, a_8]$ e $L_4 = []$. Cada chave escolhida é associada a um nó interno de uma AEAB auxiliar T_D , representada pela Figura 2.(a). Além disso, as subsequências geradas (L_1 , L_2 , L_3 e L_4) são condensadas e associadas às folhas de T_D . O ECBM constrói uma ABB para cada uma destas subsequências através de chamadas recursivas. As Figuras 2.(b) e 2.(c) representam as ABB construídas para as subsequências L_1 e L_3 , respectivamente. Por último, o ECBM substitui cada folha de T_D pela ABB construída para a subsequência correspondente. No caso das subsequências vazias L_2 e L_4 , as folhas correspondentes são removidas de T_D . A ABB resultante é representada na Figura 2.(d).

Observe que a construção descrita anteriormente induz a uma partição hierárquica do vetor $\mathcal{A}$ em subvetores. A técnica de partição por escala de custos mostra como utilizar esta mesma partição para derivar limites inferiores para o custo da solução ótima tanto no PBCM quanto no PBPC. Nestes casos, a semelhança entre o limite inferior e o limite

superior dado pelos algoritmos foi crucial para provar o fator de aproximação $2 + \epsilon + o(1)$.

Referências

- Ahuja, R., Magnanti, T., and Orlin, J. (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, pages 357–401. Prentice Hall, New Jersey. Chapter 10: Minimum Cost Flows: Polynomial Algorithms.
- Charikar, Fagin, Guruswami, Kleinberg, Raghavan, and Sahai (2002). Query strategies for priced information. *JCSS: Journal of Computer and System Sciences*, 64.
- da Silva, A. C. (1999). Otimização do transporte em oleodutos utilizando algoritmos genéticos e programação linear. Master's thesis, Departamento de Engenharia de Sistemas, UNICAMP.
- Hane, C. A. and Ratliff, H. D. (1995). Sequencing inputs to multi-commodity pipelines. *Annals of Operations Research*, 57. Mathematics of Industrial Systems I.
- Knight, W. J. (1988). Search in an ordered array having variable probe cost. *SIAM Journal on Computing*, 17(6):1203–1214.
- Laber, E. S., Milidiú, R. L., and Pessoa, A. A. (2001). On binary searching with non-uniform costs. In *Proceedings of SODA'2001*, pages 855–864, Washington, DC, USA.
- Laber, E. S., Milidiú, R. L., and Pessoa, A. A. (2002a). On binary searching with nonuniform costs. *Siam Journal on Computing*, 31(4):1022–1047.
- Laber, E. S., Milidiú, R. L., and Pessoa, A. A. (2002b). A strategy for searching with different access costs. *Theoretical Computer Science*, 287:571–584. Issue 2.
- Laber, E. S., Pessoa, A. A., and Milidiú, R. L. (1999). Strategies for searching with different access costs. In Nezestrill, J., editor, *Seventh European Symposium on Algorithms*, Lecture Notes in Computer Science, pages 236–247, Prague, Czech Republic. Springer.
- Más, R. (2001). Técnicas de otimização no suprimento de petróleo em complexos de distribuição. Master's thesis, Departamento de Engenharia Química, Universidade de São Paulo.
- Milidiú, R. L., Liporace, F., and de Lucena, C. J. P. (2003). Pipesworld: Planning pipeline transportation of petroleum derivatives. In *Workshop on the Competition, Trento, Italy*.
- Milidiú, R. L., Laber, E. S., Pessoa, A. A., and Rey, P. A. (1999). Petroleum products scheduling in pipelines. In *The International Workshop on Harbour, Maritime & Industrial Logistics Modeling and Simulation*.
- Milidiú, R. L., Pessoa, A. A., Braconi, V., Laber, E. S., and Rey, P. A. (2001). Um algoritmo grasp para o problema de transporte de derivados de petróleo em oleodutos. In *Anais do XXXIII SBPO*, pages 237–246, Campos do Jordão, SP, Brazil.
- Milidiú, R. L., Pessoa, A. A., and Laber, E. S. (2000). Transporting petroleum products in pipelines (abstract). In *ISMP 2000 – 17th International Symposium on Mathematical Programming*, pages 134–135, Atlanta, Georgia, USA.
- Milidiú, R. L., Pessoa, A. A., and Laber, E. S. (2002). Pipeline transportation of petroleum products with no due dates. In *Proceedings of the LATIN'2002*, pages 248–262, Canún, Mexico.
- Milidiú, R. L., Pessoa, A. A., and Laber, E. S. (2003). The complexity of makespan minimization for pipeline transportation. *Theoretical Computer Science*, 306(1-3):339–351. presented in the APPROX'2002, Rome, Italy.
- Navarro, G., Barbosa, E., Baeza-Yates, R., Cunto, W., and Ziviani, N. (2000). Binary searching with non-uniform costs and its application to text retrieval. *Algorithmica*, 27(2):145–169.
- Pinedo, M. (1994). *Prentice Hall*. Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems.