

Grafos Timbrais: Propriedades Estruturais e Aplicação Musical*

Luan Simões Cardoso¹, Márcia R. Cerioli^{1,2}

¹Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

²Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

luansimoes@cos.ufrj.br, marcia@cos.ufrj.br

Abstract. *Timbral graphs were introduced to model musical structures. Another aspect that highlights their importance is the close relationship they share with graphs arising from coding theory. We investigate some structural properties of timbral graphs, obtaining mainly the following results: every timbral graph is arc-transitive; a characterization of timbral graphs that are distance-transitive; a characterization of Hamiltonian binary timbral graphs; and the determination of upper and lower bounds for the clique number of timbral graphs. Furthermore, we explore an application of these graphs in the modeling of musical compositions, developing and evaluating methods for the generation of musical fragments.*

Resumo. *Grafos timbrais foram introduzidos para modelar estruturas musicais. Outro aspecto que mostra a sua importância é a relação estreita que eles possuem com grafos advindos da teoria dos códigos. Investigamos algumas propriedades estruturais dos grafos timbrais, obtendo, principalmente, os seguintes resultados: todo grafo timbral é arco-transitivo; caracterização dos grafos timbrais que são distância-transitivos; caracterização dos grafos timbrais binários que são hamiltonianos; determinação de limites superiores e inferiores para o número clique dos grafos timbrais. Além disso, exploramos uma aplicação desses grafos na modelagem de composições musicais, desenvolvendo e avaliando métodos para a geração de fragmentos musicais.*

1. Introdução

Diversas classes de grafos surgem naturalmente a partir de problemas da teoria dos códigos, como os hipercubos, os grafos de Hamming e suas generalizações. Na literatura, esses grafos são estudados principalmente em relação a problemas como a caracterização algébrica de suas simetrias, a obtenção de ciclos hamiltonianos com propriedades específicas e a determinação do número clique (cf. [Brouwer et al. 1989], [Mütze 2023] e [Rouayheb and Georghiades 2012]).

Em nosso trabalho, estudamos a classe dos grafos timbrais, que generaliza os grafos de Hamming, embora tenha sido definida no contexto da modelagem de estruturas musicais. O grafo timbral $T_{n,k,\ell}$ tem como vértices as palavras de compri-

*O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, processo 164203/2021-4.

mento k construídas sobre um alfabeto de n símbolos, sendo dois vértices adjacentes quando coincidem em exatamente ℓ coordenadas (cf. Figura 1). O artigo original [Akhmedov and Winter 2014] é dedicado ao estudo do problema do ciclo hamiltoniano restrito a grafos timbrais, que, no contexto musical, está relacionado à construção de *morfologias timbrais*. No entanto, a semelhança estrutural entre os grafos timbrais e grafos oriundos da teoria dos códigos indica que os problemas já estudados nesses grafos podem ganhar novos desdobramentos quando restritos a grafos timbrais. Nossa dissertação [Cardoso 2025] contém os resultados obtidos nesse contexto, organizados em três linhas de investigação. Versões completas desses resultados estão submetidas para publicação [Cardoso et al. 2026, Cardoso et al. 2025a].

Propriedades algébricas. Os grafos de Hamming são uma das raras classes cujo grupo de automorfismos está completamente caracterizado. Além disso, esses grafos possuem um amplo número de simetrias, que garantem propriedades algébricas fortes como a distância-transitividade (cf. [Brouwer et al. 1989]). No contexto dos grafos timbrais, demonstramos que os automorfismos dos grafos de Hamming constituem um subgrupo do grupo de automorfismos dos grafos timbrais, e que, ao menos nos casos de $T_{2,5,2}$, $T_{2,7,3}$, $T_{3,4,1}$ e $T_{4,3,1}$, esse subgrupo é próprio. Além disso, caracterizamos as exatas combinações de n , k e ℓ para as quais $T_{n,k,\ell}$ é um grafo distância-transitivo.

Hamiltonicidade. Ciclos hamiltonianos em $T_{n,k,\ell}$ correspondem a *códigos de Gray combinatórios* (cf. [Mütze 2023]) construídos sobre o conjunto das palavras n -árias de comprimento k . Adotando essa perspectiva, determinar a existência de um ciclo hamiltoniano é o primeiro passo para desenvolver um estudo aprofundado sobre os códigos de Gray correspondentes. Em [Akhmedov and Winter 2014], foi demonstrado que $T_{n,k,\ell}$ é hamiltoniano, para todo $n \geq 3$. O caso $n = 2$ ficou em aberto e Akhmedov e Winter referem-se a ele como um caso mais complexo. Em nosso trabalho, resolvemos esse caso, caracterizando os $T_{2,k,\ell}$ que são hamiltonianos e fornecendo uma construção indutiva para estabelecer a existência de ciclos hamiltonianos, quando possível. Além disso, mostramos que o resultado apresentado por Akhmedov e Winter é uma consequência direta do fato de que, para todo $n \geq 3$, $T_{n,k,\ell}$ é um grafo de Cayley conexo do grupo abeliano \mathbb{Z}_n^k . Uma versão prévia desses resultados foi publicada em [Cardoso et al. 2025b].

Número clique. O problema do número clique restrito aos grafos de Hamming-distância $H_n(k, d)$ tem grande relevância na teoria dos códigos corretores de erro (cf. [Sloane 1989]). Como o grafo $H_n(k, d)$ é a união de grafos timbrais, o estudo de $\omega(T_{n,k,\ell})$ emerge como uma potencial nova abordagem para aprimorar os limites conhecidos sobre $\omega(H_n(k, d))$. Nessa linha de investigação, fornecemos novos limites superiores gerais para o número clique de grafos timbrais e, aplicando-os ao caso $\ell = 1$, determinamos $\omega(T_{n,k,1})$ quando $k - 1$ é uma potência de primo menor ou igual a n . Em particular, examinando as cliques de $T_{n,k,1}$, estabelecemos uma correspondência entre uma clique de tamanho n^2 em $T_{n,n+1,1}$ e um plano afim de ordem n (cf. [Dougherty 2020]). Uma versão prévia desses resultados [Cardoso et al. 2024] recebeu menção honrosa na premiação de melhor trabalho do ETC do CSBC 2024.

Adicionalmente, apresentamos uma proposta de aplicação dos grafos timbrais na música através de diferentes modelagens, que culminou na elaboração de um método composicional assistido por computadores, utilizado na composição da peça *Amálgama* [Cardoso et al. 2023].

1.1. Grafos Timbrais

Para dois inteiros positivos n e k , denotamos por \mathbb{Z}_n^k o produto cartesiano de k cópias do grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Os elementos de \mathbb{Z}_n^k são palavras $x = x_0x_1 \cdots x_{k-1}$, onde $x_i \in \mathbb{Z}_n$. Para $u, v \in \mathbb{Z}_n^k$, definimos $I_c(u, v) = \{i \in \mathbb{Z}_k : u_i = v_i\}$ e $i_c(u, v) = |I_c(u, v)|$. Em particular, $i_c(u, v)$ é dito o *índice de coincidência* entre u e v . A partir desses conceitos, definimos o grafo timbral $T_{n,k,\ell}$ como segue.

Definição 1. *Sejam n, k e ℓ números naturais tais que $n > 1$ e $k > \ell$. O grafo timbral $T_{n,k,\ell}$ é o grafo cujo conjunto dos vértices é \mathbb{Z}_n^k e dois vértices $u, v \in \mathbb{Z}_n^k$ são adjacentes se, e somente se, $i_c(u, v) = \ell$.*

Todo grafo timbral possui n^k vértices. Além disso, os grafos timbrais são grafos de Cayley do grupo abeliano \mathbb{Z}_n^k . Um grafo não-direcionado G é um grafo de Cayley de um grupo A se $V(G) = A$ e existe um subconjunto $S \subseteq A$ (fechado para inversões), tal que dois elementos a e b de A são adjacentes em G se, e somente se, $a^{-1}b \in S$. Nesse caso, escrevemos $G = \text{Cay}(A, S)$. Para os grafos timbrais, S é o conjunto dos vértices que possuem exatamente $k - \ell$ termos diferentes de 0. De fato, o conjunto de vizinhos de um vértice $u \in V(T_{n,k,\ell})$ pode ser descrito por $N(u) = \{u + v : v \in S\}$, onde a operação de adição é análoga à soma de vetores módulo n . Portanto, $T_{n,k,\ell}$ é o grafo $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n^k, S)$. Também segue que os grafos timbrais são regulares com grau igual a $|S| = \binom{k}{\ell} (n-1)^{k-\ell}$.

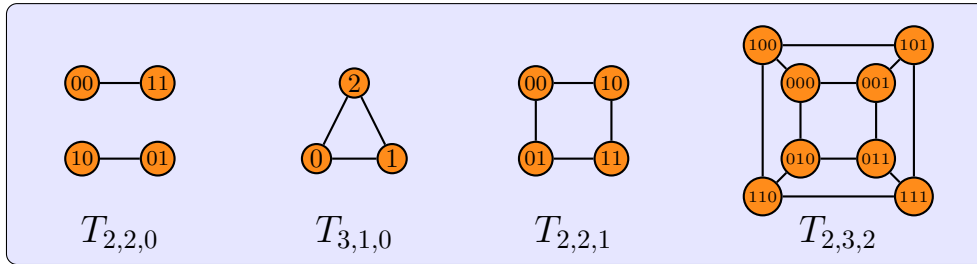


Figura 1. Alguns grafos timbrais com grau no máximo 3.

O grafo $T_{2,2,0}$, na Figura 1, é um representante da família $T_{2,k,0}$, cujo conjunto de arestas é um emparelhamento perfeito e é desconexo para todo $k \geq 2$. Por sua vez, $T_{3,1,0}$ e $T_{2,2,1}$ são grafos ciclo, os únicos timbrais deste tipo. O mesmo $T_{3,1,0}$ representa a família dos grafos completos $K_n = T_{n,1,0}$. Por fim, $T_{2,2,1}$ e $T_{2,3,2}$ ilustram o fato de que os hipercubos Q_k são os timbrais $T_{2,k,k-1}$. Em particular, os completos e os hipercubos são exemplos de grafos de Hamming, que são todos os timbrais da forma $T_{n,k,k-1}$. De maneira geral, o nível de simetria exibido pelos grafos na Figura 1 sugere propriedades importantes a respeito do grupo de automorfismos dos grafos timbrais, que aprofundamos na próxima seção.

2. Propriedades algébricas de grafos timbrais

Um *automorfismo* de um grafo é uma permutação de seus vértices que preserva a relação de adjacência. Os automorfismos de um grafo G são melhor examinados quando organizados como uma estrutura de grupo com a operação de composição de funções, que é chamado de *grupo de automorfismos* de G e denotado por $\text{Aut}(G)$. O grupo das permutações de um conjunto X é denotado por $\text{Sym}(X)$ e, em especial, o grupo $\text{Sym}(\mathbb{Z}_n)$ é simplesmente denotado por S_n . Para conceitos de teoria de grupos e teoria algébrica de grafos que não definimos explicitamente, nos referimos a [Biggs 1993].

Uma caracterização de $Aut(T_{n,k,k-1})$ como produto de dois subgrupos é apresentada em [Mirafzal and Ziaee 2021]. A seguir, apresentamos esses subgrupos e mostramos que $Aut(T_{n,k,k-1})$ é um subgrupo de $Aut(T_{n,k,\ell})$.

Definição 2. Seja $\pi \in S_k$. A função $a_\pi : \mathbb{Z}_n^k \rightarrow \mathbb{Z}_n^k$ é definida por

$$a_\pi(x) = x_{\pi^{-1}(0)}x_{\pi^{-1}(1)} \cdots x_{\pi^{-1}(k-1)},$$

para todo $x = x_0x_1 \cdots x_{k-1} \in \mathbb{Z}_n^k$. Além disso, definimos $\mathcal{P} = \{a_\pi : \pi \in S_k\}$.

O mapeamento $\pi \mapsto a_\pi$ define uma ação do grupo S_k em \mathbb{Z}_n^k pela permutação de coordenadas. Abaixo, apresentamos o segundo subgrupo de $Aut(T_{n,k,k-1})$, associado ao grupo S_n^k , isto é, ao produto cartesiano de k cópias de S_n .

Definição 3. Seja $\Sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}) \in S_n^k$. A função $a_\Sigma : \mathbb{Z}_n^k \rightarrow \mathbb{Z}_n^k$ é definida por

$$a_\Sigma(x) = \sigma_0(x_0)\sigma_1(x_1) \cdots \sigma_{k-1}(x_{k-1}),$$

para todo $x = x_0x_1 \cdots x_{k-1} \in \mathbb{Z}_n^k$. Além disso, definimos $\mathcal{O} = \{a_\Sigma : \Sigma \in S_n^k\}$.

O grupo $Aut(T_{n,k,k-1})$ é o grupo gerado por $\mathcal{P} \cup \mathcal{O}$ [Mirafzal and Ziaee 2021]. Como as permutações a_π e a_Σ preservam o índice de coincidência entre quaisquer dois vértices, esse grupo também está contido em $Aut(T_{n,k,\ell})$.

Proposição 1. $Aut(T_{n,k,k-1})$ é subgrupo de $Aut(T_{n,k,\ell})$.

Os elementos de $Aut(T_{n,k,k-1})$ são composições de automorfismos em \mathcal{P} e \mathcal{O} que, por consequência, também preservam o índice de coincidência entre quaisquer dois vértices. Para entender melhor $Aut(T_{n,k,\ell})$ e determinar se todos os seus elementos são desse tipo, examinamos suas propriedades de transitividade.

Dizemos que $Aut(G)$ age transitivamente sobre um conjunto X quando, para todo par $x, y \in X$, existe um elemento de $Aut(G)$ que mapeia x em y . Assim, dizemos que G é vértice-, aresta- ou arco-transitivo se $Aut(G)$ age transitivamente sobre os conjuntos de vértices, arestas ou pares de vértices adjacentes (arcos) de G , respectivamente.

Apenas compondo elementos de \mathcal{P} e \mathcal{O} , obtemos automorfismos relacionando quaisquer dois pares de vértices com o mesmo índice de coincidência. Assim, $Aut(T_{n,k,\ell})$ age transitivamente sobre $A_c = \{(u, v) \in V(G)^2 : i_c(u, v) = c\}$, para todo $c \in \mathbb{Z}_k$.

Teorema 1. Sejam $(u, v), (x, y) \in V(T_{n,k,\ell})^2$. Se $i_c(u, v) = i_c(x, y)$, então existe automorfismo $a \in Aut(T_{n,k,\ell})$ tal que $a(u) = x$ e $a(v) = y$.

O conjunto $\{(u, v) \in V(T_{n,k,\ell})^2 : uv \in E(T_{n,k,\ell})\}$, dos arcos de $T_{n,k,\ell}$, corresponde ao conjunto A_ℓ , o que garante o seguinte resultado.

Corolário 1. Todo grafo timbral é arco-transitivo.

Por ser arco-transitivo e sem vértices isolados, $T_{n,k,\ell}$ é vértice-transitivo e aresta-transitivo. A seguir, apresentamos uma caracterização completa dos grafos timbrais distância-transitivos. Um grafo G é distância-transitivo se $Aut(G)$ age transitivamente em $V_d = \{(u, v) \in V(G)^2 : d(u, v) = d\}$, para toda distância d em G .

Teorema 2. Um grafo timbral G é distância-transitivo se, e somente se: (a) G é um grafo de Hamming; (b) G pertence a uma das classes $T_{n,2,0}$, $T_{2,k,0}$, $T_{2,k,1}$ ou $T_{2,k,k-2}$; ou (c) G é um dos grafos $T_{2,5,2}$, $T_{2,6,2}$, $T_{2,7,3}$, $T_{3,4,1}$, $T_{4,3,1}$.

Para demonstrar o Teorema 2, examinamos primeiramente os grafos timbrais distância-transitivos. Como a distância-transitividade é uma propriedade notável dos grafos de Hamming (cf. [Biggs 1993]), o caso (a) está garantido. Desta maneira, o desafio está nos casos (b) e (c). O grafo $T_{2,k,0}$ é distância-transitivo, pois seu conjunto de arestas é um emparelhamento. Além disso, se, para cada $d \in \mathbb{Z}_k$, todo par de vértices à distância d possui o mesmo índice de coincidência, o Teorema 1 garante a distância-transitividade.

Lema 1. *Seja $d \in \{0, 1, \dots, k\}$. Se $i_c(u, v) = i_c(x, y)$, para todos $(u, v), (x, y) \in V_d$, então $\text{Aut}(T_{n,k,\ell})$ age transitivamente em V_d .*

Por uma aplicação do Lema 1, comprovamos a distância-transitividade dos $T_{n,2,0}$. Ademais, mostramos que essa estratégia se estende para grafos desconexos, uma vez que $\text{Aut}(G)$ age transitivamente sobre V_d , com $d = \infty$, em todo grafo vértice-transitivo.

Lema 2. *Seja G um grafo vértice-transitivo. Se todo componente conexo de G induz um grafo distância-transitivo, então G é distância-transitivo.*

Através dos Lemas 1 e 2, comprovamos a distância-transitividade de $T_{2,6,2}$, $T_{2,k,1}$ e $T_{2,k,k-2}$, fornecendo bijeções do conjunto dos índices de coincidência entre vértices no mesmo componente no conjunto das distâncias finitas no grafo, para cada caso. Essa estratégia, entretanto, não funciona para $T_{2,5,2}$, $T_{2,7,3}$, $T_{3,4,1}$ e $T_{4,3,1}$, nos quais há índices de coincidência distintos que resultam em pares de vértices à mesma distância. Nesses casos, comprovamos a distância-transitividade através de uma busca computacional. A existência de automorfismos que relacionam pares de vértices com diferentes índices de coincidência confirma que, ao menos para esses grafos, $\text{Aut}(T_{n,k,k-1}) \neq \text{Aut}(T_{n,k,\ell})$.

Agora, vamos mostrar que nenhum outro grafo timbral é distância-transitivo. Para isso, comparamos o tamanho de $N(u, v) = N(u) \cap N(v)$ entre dois pares de vértices à distância 2, mas com diferentes índices de coincidência.

Lema 3. *Sejam (u, v) e (x, y) pares de vértices de $T_{n,k,\ell}$ tais que $d(u, v) = d(x, y) = 2$. Se $|N(u, v)| \neq |N(x, y)|$, então não existe automorfismo que leva (u, v) em (x, y) .*

Para aplicar essa estratégia em nossas demonstrações, determinamos uma fórmula para obter $|N(u, v)|$ em função de $i_c(u, v)$, aplicando métodos clássicos de contagem.

Lema 4. *Sejam $u, v \in V(T_{n,k,\ell})$ e $c = i_c(u, v)$. Então, o tamanho do conjunto $N(u, v)$ é dado pela função $\text{cn} : \{0, 1, \dots, k-1\} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por:*

$$\text{cn}(c) = \sum_{a=0}^c \binom{c}{a} \binom{k-c}{\ell-a} \binom{k-c-(\ell-a)}{\ell-a} (n-1)^{c-a} (n-2)^{k-c-2(\ell-a)}$$

Os grafos timbrais que não se encaixam nos casos do Teorema 2 são: (i) os $T_{2,k,\ell}$, para $2 \leq \ell \leq k-3$, com exceção de $T_{2,7,3}$, $T_{2,6,2}$ e $T_{2,5,2}$; (ii) os $T_{n,k,\ell}$, para $n \geq 3$ e $\ell \leq k-2$, com exceção de $T_{3,4,1}$ e $T_{4,3,1}$.

Demonstramos que esses grafos não são distância-transitivos escolhendo índices de coincidência c, c' tais que $0 < \text{cn}(c) < \text{cn}(c')$, provando esse fato pela manipulação algébrica das fórmulas. Por exemplo, para $T_{2,6,3}$ confirmamos que $\text{cn}(2) = 12 < 20 = \text{cn}(0)$. No caso específico dos $T_{n,k,k-2}$, mostramos que, exceto em $T_{4,3,1}$, há diferenças estruturais entre os subgrafos induzidos por $N(u, v)$, a depender do índice de coincidência entre u e v . Combinando esses resultados, temos a prova do Teorema 2.

3. Hamiltonicidade de grafos timbrais

Em [Akhmedov and Winter 2014], a hamiltonicidade de $T_{n,k,\ell}$, para $n \geq 3$, é demonstrada a partir de condições não triviais para a hamiltonicidade de produtos tensoriais de grafos hamiltonianos. No entanto, utilizando um resultado clássico a respeito de grafos de Cayley, obtemos a hamiltonicidade como consequência da conexidade de $T_{n,k,\ell}$.

Teorema 3. [Chen and Quimpo 1981] *Todo grafo de Cayley conexo de um grupo abeliano de ordem pelo menos 3 é hamiltoniano.*

Como o único grafo timbral com menos de 3 vértices é o $T_{2,1,0} = K_2$ e os grafos timbrais são grafos de Cayley de \mathbb{Z}_n^k , podemos nos preocupar apenas com a conexidade de $T_{n,k,\ell}$. De fato, para $n \geq 3$, mostramos como construir um caminho entre dois vértices com índice de coincidência c , para todo $c \in \mathbb{Z}_k$.

Proposição 2. $T_{n,k,\ell}$ é conexo, para todo $n \geq 3$.

Examinamos com mais atenção o caso $n = 2$, que estava em aberto. Nosso principal resultado pode ser formulado da seguinte maneira.

Teorema 4. $T_{2,k,\ell}$ é hamiltoniano se, e somente se, $k - \ell$ é ímpar e $\ell \neq 0$.

Quando $n = 2$, há diversos exemplos de grafos timbrais desconexos, como os $T_{2,k,0}$, que mencionamos na Seção 1.1. Considere que uma palavra binária é *par* ou *ímpar* a depender da paridade da soma de seus termos. Por exemplo, 01101 é ímpar, pois a soma de seus termos é 3. Quando $k - \ell$ é par, vértices adjacentes possuem a mesma paridade e, portanto, não existe caminho entre dois vértices de paridades distintas.

Proposição 3. Se $k - \ell$ é par ou $\ell = 0$, então $T_{2,k,\ell}$ não é hamiltoniano.

Quando $k - \ell$ é ímpar, toda aresta representa uma mudança na paridade, constituindo um grafo bipartido. Nesse caso, fornecemos uma construção indutiva de um ciclo hamiltoniano em $T_{n,k,\ell}$, considerando esta uma melhor abordagem no contexto de proximidade com a teoria dos códigos de Gray. Assim, provamos que $T_{2,2m-1+\ell,\ell}$ é hamiltoniano para todo $\ell \geq 1$ e $m \geq 1$, começando pelo caso base de $\ell = 1$.

Seja $u \in \mathbb{Z}_2^k$. Os prefixos de u são as palavras da forma $u_0u_1 \cdots u_r$, para todo $r \leq k$. Além disso, denotamos por \bar{u} o complemento de u , isto é, a palavra que difere de u em todas as coordenadas. Provamos que $T_{2,2m,1}$ é hamiltoniano por indução em $m \geq 1$, aplicando a hipótese de indução no subgrafo H_α induzido pelos vértices pares com prefixo α e pelos vértices ímpares com prefixo $\bar{\alpha}$, para $\alpha \in \{00, 01, 10, 11\}$.

Lema 5. Seja $m \geq 2$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_2^2$. O subgrafo H_α em $T_{2,2m,1}$ é isomorfo a $T_{2,2(m-1),1}$.

Considere um caminho hamiltoniano P em $T_{2,2m-1,1}$ e seu dual \bar{P} obtido pelo complemento de cada vértice em P , com suas versões P_α e \bar{P}_α em cada H_α . Construímos um ciclo hamiltoniano em $T_{2,2m,1}$ ligando os extremos dos caminhos $P_{00}, \bar{P}_{01}, P_{11}$ e \bar{P}_{10} .

Proposição 4. $T_{2,2m,1}$ é hamiltoniano, para todo $m \geq 1$.

Para o caso geral de $G = T_{n,2m-1+\ell,\ell}$, aplicamos uma estratégia semelhante. Consideramos o subgrafo $H_i = G[V_i]$, onde $V_i = \{v \in V(T_{n,k,\ell}) : v_0 = i\}$.

Lema 6. Seja $i \in \{0, 1\}$, e $m \geq 1$. O subgrafo H_i em $T_{2,2m-1+\ell,\ell}$ é isomorfo a $T_{2,2m-2+\ell,\ell-1}$.

Aplicando a hipótese de indução, tomamos um caminho hamiltoniano P em $T_{2,2m-2+\ell,\ell-1}$. Nesse caso, obtemos um caminho P' a partir de P pela aplicação da operação que altera o símbolo nas $k - \ell$ últimas coordenadas de cada vértice. Assim, construímos um ciclo hamiltoniano de $T_{2,2m-1+\ell,\ell}$ ligando os extremos dos caminhos P_0 e P'_1 , isto é, as versões de P e P' em H_0 e H_1 , respectivamente.

Proposição 5. $T_{2,2m-1+\ell,\ell}$ é hamiltoniano, para todo $m \geq 1$ e $\ell \geq 1$.

Combinando as Proposições 3 e 5, temos uma prova para o Teorema 4. Considerando também a Proposição 2, o que demonstramos é que os únicos grafos timbrais que não são hamiltonianos são os grafos $T_{2,k,\ell}$, com $k - \ell$ par ou $\ell = 0$.

4. Número clique de grafos timbrais

Nesta seção, examinamos o número clique $\omega(T_{n,k,\ell})$, isto é, o tamanho de uma clique máxima no grafo. Em especial, fornecemos novos limites superiores para o caso geral e aplicamos esses limites ao caso particular de $\omega(T_{n,k,1})$.

4.1. Limites gerais para $\omega(T_{n,k,\ell})$

Iniciamos por $\omega(T_{n,k,0})$, cuja análise é mais simples, e que aparece como subgrafo induzido de grafos timbrais maiores.

Proposição 6. $\omega(T_{n,k,0}) = n$.

O conjunto dos vértices que possuem um determinado prefixo $\alpha \in \mathbb{Z}_n^r$ induz uma cópia de $T_{n,k-r,\ell-r}$, para todo $r \leq \ell$. Para o caso de $r \geq \ell + 1$, o subgrafo induzido não tem arestas, de onde concluímos que $T_{n,k,\ell}$ é um grafo $n^{\ell+1}$ -partido. Isto garante o que chamamos de *limites triviais para $\omega(T_{n,k,\ell})$* .

Teorema 5. $n \leq \omega(T_{n,k,\ell}) \leq n^{\ell+1}$.

Agora, seja $K \subset V(T_{n,k,\ell})$ uma clique, S um conjunto de ℓ coordenadas e seja $u \in K$. Definimos $K_S(u) = \{v \in V(T_{n,k,\ell}) : I_c(u,v) = S\}$ e $\mathcal{P}_K(u)$ a família dos conjuntos S para os quais $K_S(u) \neq \emptyset$. Observe que $\{K_S(u) : S \in \mathcal{P}_K(u)\}$ é uma partição de $K \setminus \{u\}$. Além disso, $K_S(u)$ corresponde a uma clique de $T_{n,k-\ell,0}$, o que leva ao seguinte limite superior.

Teorema 6. *Seja K uma clique de $T_{n,k,\ell}$ e $u \in K$. Então, $|K| \leq |\mathcal{P}_K(u)|(n - 1) + 1$. Consequentemente, $\omega(T_{n,k,\ell}) \leq \binom{k}{\ell}(n - 1) + 1$.*

O caso $|\mathcal{P}_K(u)| = 1$ corresponde às cliques maximais de tamanho n , previstas no Teorema 5. Se existem ao menos duas partes não distintas em $\mathcal{P}_K(u)$, por outro lado, obtemos uma cota superior para cada parte $K_S(u)$.

Lema 7. *Sejam S, S' dois conjuntos distintos em $\mathcal{P}_K(u)$. Então, temos que*

$$|K_S(u)| \leq \left\lfloor \frac{k - 2\ell + |S \cap S'|}{\ell - |S \cap S'|} \right\rfloor.$$

Ademais, como o lado direito da inequação cresce com $|S \cap S'|$, o limite mais estrito para $|K_S(u)|$ é dado pelo conjunto $S' \in \mathcal{P}_K(u)$ que minimiza $|S \cap S'|$. Assim, definindo $\mu(u) = \min\{|S \cap S'| : S' \in \mathcal{P}_K(u)\}$, obtemos um novo limite superior.

Teorema 7. *Seja K uma clique e $u \in K$. Se $|\mathcal{P}_K(u)| \geq 2$, então*

$$|K| \leq 1 + \sum_{S \in \mathcal{P}_K(u)} \left\lfloor \frac{k - 2\ell + \mu(S)}{\ell - \mu(S)} \right\rfloor.$$

Consequentemente, $\omega(T_{n,k,\ell}) \leq \max\{1 + \binom{k}{\ell}(k - \ell - 1), n\}$.

Os limites formalizados nos Teoremas 6 e 7 ainda não são satisfatórios em boa parte dos casos, como em $T_{2,4,2}$, em que $\omega(T_{2,4,2}) = 4$, mas ambos os teoremas estipulam um limite superior de 7 (cf. [Cardoso 2025]). No entanto, para $\ell = 1$, o limite pode ser atingido, como examinamos a seguir.

4.2. Número clique de $T_{n,k,1}$

Comparando os limites estipulados nos Teoremas 5, 6 e 7, reduzimos o problema à análise de três casos, indicados na Tabela 1.

Tabela 1. Melhor limite superior para $\omega(T_{n,k,1})$ conforme a relação entre n e $k - 1$.

Caso	Condição sobre n	Melhor limite	Teorema
1	$n < k - 1$	$\omega(T_{n,k,1}) \leq n^2$	Teorema 5
2	$k - 1 \leq n < (k - 1)^2$	$\omega(T_{n,k,1}) \leq (k - 1)^2$	Teorema 7
3	$(k - 1)^2 \leq n$	$\omega(T_{n,k,1}) \leq n$	Teorema 7

Para o Caso 3, o limite inferior no Teorema 5 implica $\omega(T_{n,k,1}) = n$, restando-nos os Casos 1 e 2. Nos aplicamos ao Caso 2, em que nosso principal resultado é:

Teorema 8. *Seja $k - 1 \leq n < (k - 1)^2$. Então, $\omega(T_{n,k,1}) \geq (k - 1)^2$ se, e somente se, existe um plano afim de ordem $k - 1$.*

Um *plano afim* é uma estrutura $\mathbb{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, onde \mathfrak{P} é o conjunto de *pontos*, \mathfrak{L} é o conjunto de *linhas* e $I \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{L}$ é a *relação de incidência*, que satisfaz os axiomas:

(AP1) Para todo par de pontos, existe uma única linha incidente a ambos.

(AP2) Dados uma linha r e um ponto P que não incide em r , existe uma única linha s que não intersecta r e é incidente a P .

(AP3) Existem ao menos três pontos não-colineares.

A *ordem* de um plano afim é o número de pontos incidentes a cada linha. Um plano afim de ordem n possui n^2 pontos e $n(n + 1)$ linhas, que podem ser particionadas em $n + 1$ classes de linhas paralelas (cf. [Dougherty 2020]).

Separamos a prova do Teorema 8 em dois lemas. Primeiro, mostramos que uma clique K com n^2 vértices em $T_{k-1,k,1}$ corresponde a um plano afim de ordem $k - 1$, onde $\mathfrak{P} = K$, cada linha é um conjunto $L_{ij} = \{u \in K : u_i = j\}$ e a incidência é dada pela relação de pertinência em conjuntos.

Lema 8. *$\omega(T_{k-1,k,1}) \geq (k - 1)^2$ se, e somente se, existe um plano afim de ordem $k - 1$.*

Em seguida, mostramos que existe uma bijeção entre uma clique K com $(k - 1)^2$ vértices em $T_{n,k,1}$ e uma clique de $T_{k-1,k,1}$. Essa bijeção se dá por um automorfismo do tipo a_Σ (cf. Definição 3), a partir da observação de que $R_i = \{v_i : v \in K\}$ possui $k - 1$ elementos, para todo $i \in \mathbb{Z}_k$. O lema a seguir conclui a prova do Teorema 8.

Lema 9. *Seja $k - 1 \leq n < (k - 1)^2$. Então, $\omega(T_{n,k,1}) \geq (k - 1)^2$ se, e somente se, $\omega(T_{k-1,k,1}) \geq (k - 1)^2$.*

Se $k - 1$ é uma potência de primo, então existe um plano afim de ordem $k - 1$, derivado do corpo finito \mathbb{F}_{k-1} . Como consequência, temos:

Corolário 2. *Se $k - 1$ é uma potência de primo e $k - 1 \leq n$, então $\omega(T_{n,k,1}) \geq (k - 1)^2$.*

Além disso, como $T_{n,k,\ell}$ contém uma cópia de $T_{n,k-\ell+1,1}$, para $\ell \geq 1$, temos:

Corolário 3. *Seja $\ell \geq 1$ e $k - \ell \leq n$. Se $k - \ell$ é uma potência de primo, então $\omega(T_{n,k,\ell}) \geq (k - \ell)^2$.*

Por fim, como a existência de um plano afim de ordem $k - 1$ é um problema em aberto, não sabemos se existem outros valores de $k - 1$ para os quais $\omega(T_{n,k,1}) \geq (k - 1)^2$.

5. Aplicação musical

O conjunto \mathbb{Z}_n^k , dos vértices dos grafos timbrais, é frequentemente associado ao conjunto das funções de \mathbb{Z}_k em \mathbb{Z}_n , onde uma palavra $x \in \mathbb{Z}_n^k$ representa o mapeamento $i \mapsto x_i$. Na interpretação motivadora apresentada em [Akhmedov and Winter 2014], \mathbb{Z}_k corresponde a um acorde fixo de k alturas e \mathbb{Z}_n um conjunto de instrumentos para os quais o acorde é orquestrado. Em [Cardoso 2025], propomos outras perspectivas sobre \mathbb{Z}_n e \mathbb{Z}_k , através das interpretações:

- harmônico-timbral**, em que \mathbb{Z}_k é uma escala e \mathbb{Z}_n é um conjunto de $n - 1$ instrumentos, com um símbolo adicional representando o ato de silenciar uma das alturas;
- melódica**, em que \mathbb{Z}_k é um intervalo de tempo discretizado em k pontos e \mathbb{Z}_n é um conjunto de $n - 1$ alturas, com um símbolo adicional representando uma pausa;
- rítmica**, uma variação da interpretação melódica para $T_{2,k,\ell}$, em que os símbolos em \mathbb{Z}_2 indicam articular ou não um determinado instante de tempo;
- harmônico-rítmica**, em que \mathbb{Z}_k é um conjunto de alturas e \mathbb{Z}_n é um intervalo de tempo discretizado em n pontos.

As interpretações harmônico-timbral e harmônico-rítmica foram empregadas na composição da peça *Amálgama* [Cardoso et al. 2023], através da geração computacional de fragmentos musicais correspondentes a caminhos em grafos timbrais com parâmetros variados. A obra consiste em uma colagem desses fragmentos, com sua macroestrutura organizada de acordo com parâmetros em comum entre os grafos que originaram cada fragmento. Em [Cardoso 2025], analisamos trechos da peça, investigando se a relação de adjacência nos grafos timbrais reflete a noção de *parcimônia* — ou, até mesmo, disruptividade — nas transições entre os elementos musicais correspondentes.

6. Perspectivas

Além de resolverem alguns problemas deixados em aberto, os resultados descritos neste trabalho abrem diversas perspectivas de investigação sobre grafos timbrais. Com relação às propriedades algébricas, ainda resta examinar mais a fundo os automorfismos que garantem a distância-transitividade de $T_{2,5,2}$, $T_{2,7,3}$, $T_{3,4,1}$ e $T_{4,3,1}$, para os quais não dispomos de uma descrição algébrica adequada — passo importante para uma caracterização de $\text{Aut}(T_{n,k,\ell})$. Quanto à hamiltonicidade, nossos resultados sugerem investigar os $T_{n,k,\ell}$ pelo prisma dos códigos de Gray combinatórios, examinando os ciclos hamiltonianos nesses grafos e suas propriedades (cf. [Mütze 2023]). Nesse sentido, os ciclos hamiltonianos

de $T_{2,k,\ell}$ obtidos através da construção apresentada na Seção 3 podem ser de especial interesse. A respeito do número clique, os limites obtidos no caso geral ainda podem ser aprimorados. Em particular, para $\omega(T_{n,k,1})$, permanece em aberto o Caso 1 da Tabela 1, enquanto o Caso 2 depende da análise dos subcasos em que não existe plano afim de ordem $k - 1$. Além disso, uma melhor compreensão das cliques maximais de grafos timbrais pode esclarecer como essas estruturas interagem na construção de cliques de grafos de Hamming-distância. Por fim, o detalhamento das conexões entre grafos timbrais e outras estruturas combinatórias — realizado neste texto e em [Cardoso 2025] — permite integrar resultados conhecidos em diferentes campos, ampliando a perspectiva sob a qual essas estruturas são tradicionalmente investigadas.

Referências

- Akhmedov, A. and Winter, M. (2014). Chordal and timbral morphologies using hamiltonian cycles. *Journal of Mathematics and Music*, 8(1):1–24.
- Biggs, N. (1993). *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 2 edition.
- Brouwer, A., Cohen, A., and Neumaier, A. (1989). *Distance-Regular Graphs*. Springer.
- Cardoso, L. S. (2025). Grafos timbrais: Propriedades estruturais e aplicação musical. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Cardoso, L. S., Cerioli, M. R., and Viana, P. (2024). Clique-number of timbral graphs. In *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, pages 58–62. SBC.
- Cardoso, L. S., Cerioli, M. R., and Viana, P. (2025a). On the automorphism group of timbral graphs. Manuscrito submetido para publicação.
- Cardoso, L. S., Cerioli, M. R., and Viana, P. (2025b). On the hamiltonicity of timbral graphs. In *Anais do X Encontro de Teoria da Computação*, pages 100–103. SBC.
- Cardoso, L. S., Cerioli, M. R., and Viana, P. (2026). Hamiltonian cycles and clique number of timbral graphs. Manuscrito submetido para publicação.
- Cardoso, L. S., Gentil-Nunes, P., and Viana, P. (2023). Amálgama. <https://partimus.art/wp-content/uploads/2025/04/gentil-nunes-simoes-e-viana-amalgama-partitura.pdf>. Acesso em 2 de março de 2026.
- Chen, C. C. and Quimpo, N. F. (1981). On strongly hamiltonian abelian group graphs. In McAvaney, K. L., editor, *Combinatorial Mathematics VIII*, volume 884 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 23–34. Springer.
- Dougherty, S. T. (2020). *Combinatorics and Finite Geometry*. Springer.
- Mirafzal, S. M. and Ziaee, M. (2021). A note on the automorphism group of the hamming graph. *Transactions on Combinatorics*, 10(2):129–136.
- Mütze, T. (2023). Combinatorial Gray codes – an updated survey. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 30(3):1–93.
- Rouayheb, S. E. and Georgiades, C. N. (2012). Graph theoretic methods in coding theory. In Cohen, L., Poor, H., and Scully, M., editors, *Classical, Semi-Classical and Quantum Noise*, pages 53–62. Springer.
- Sloane, N. J. A. (1989). Unsolved problems in graph theory arising from the study of codes. *Graph Theory Notes of New York*, 18:11–20.