

# Ciclos e Caminhos Longos em Grafos Ímpares\*

Felipe de Campos Mesquita<sup>1</sup> e Letícia Rodrigues Bueno<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CMCC, Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André – SP – Brasil

felipe.mesquita@aluno.ufabc.edu.br, leticia.bueno@ufabc.edu.br

**Abstract.** *The odd graph  $O_k$  is the graph whose vertices are all subsets with  $k$  elements of a set that has  $n$  elements, and two vertices are joined by an edge if the corresponding pair of  $k$ -subsets is disjoint. A conjecture due to Biggs claims that  $O_k$  is hamiltonian for  $k \geq 3$  and a conjecture due to Lovász implies that  $O_k$  has a hamiltonian path for  $k \geq 1$ . From a hamiltonian cycle in  $O_{k-1}$ , we show how to construct a cycle in  $O_k$  with at least 75% of the vertices of  $O_k$ . Additionally, we prove that, for each  $k$ , the odd graph has a path with at least 50% of the vertices of  $O_k$ .*

**Resumo.** *O grafo ímpar  $O_k$  é o grafo cujos vértices são todos os subconjuntos de tamanho  $k$  de um conjunto com  $(2k + 1)$  elementos e dois vértices são adjacentes se eles são disjuntos. Uma conjectura atribuída a Biggs afirma que o grafo  $O_k$  é hamiltoniano para  $k \geq 3$  e uma conjectura atribuída a Lovász implica que  $O_k$  tem um caminho hamiltoniano para  $k \geq 1$ . A partir de um ciclo hamiltoniano em  $O_{k-1}$ , mostramos como construir um ciclo em  $O_k$  com pelo menos 75% dos vértices de  $O_k$ . Adicionalmente, nós provamos que, para todo  $k$ , o grafo ímpar tem um caminho com pelo menos 50% dos vértices de  $O_k$ .*

## 1. Introdução

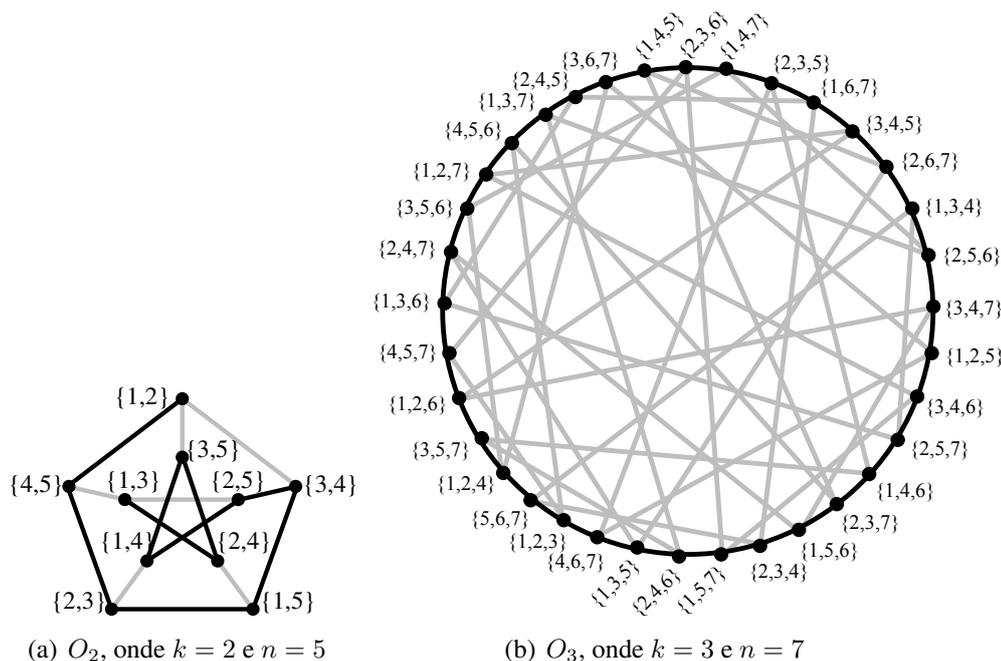
Dado um grafo  $G = (V(G), E(G))$ , um *caminho hamiltoniano* é um caminho que passa por todos os vértices de  $G$  (Figura 1(a)). Um *ciclo hamiltoniano* é um ciclo que passa por todos os vértices de  $G$  (Figura 1(b)). Um grafo é *hamiltoniano* se tem um ciclo hamiltoniano.

O *problema do ciclo hamiltoniano* consiste em determinar se um grafo é hamiltoniano e foi provado ser NP-Completo [Karp 1972]. O *problema do caminho hamiltoniano* consiste em determinar se um grafo tem um caminho hamiltoniano e também é conhecido ser NP-Completo [Garey and Johnson 1979]. Devido à dificuldade inerente aos problemas NP-Completo, neste trabalho procuramos resolver os problemas de ciclos e caminhos hamiltonianos restritos à classe de grafos ímpares, com o objetivo de encontrar uma solução para os problemas propostos através das propriedades estruturais desta classe de grafos.

O *grafo ímpar* (“*odd graph*”, em inglês), denotado por  $O_k$ , tem como seu conjunto de vértices todos os subconjuntos de tamanho  $k$  tomados do conjunto  $\{1, 2, \dots, n = 2k + 1\}$ . Dois subconjuntos são adjacentes se eles são disjuntos. Veja na Figura 1 exemplos de grafos ímpares.

---

\*Esse trabalho foi financiado pelo CNPq.



**Figura 1. Os grafos ímpares para  $k = 2, 3$ . Em (a) um caminho hamiltoniano em destaque. Em (b) um ciclo hamiltoniano em destaque.**

Os grafos ímpares têm sido estudados por muitos pesquisadores, especialmente pelo seu alto grau de simetria. De fato, os problemas de ciclos e caminhos hamiltonianos em grafos ímpares são fortemente motivados pelas conjecturas de Lovász [Lovász 1970] e Biggs [Biggs 1979]:

**Conjectura 1** (Lovász, 1970). *Todo grafo não-direcionado, conexo e vértice-transitivo tem um caminho hamiltoniano.*

**Conjectura 2** (Biggs, 1979). *O grafo ímpar  $O_k$  é hamiltoniano para todo  $k > 2$ .*

Desde que os grafos ímpares são vértice-transitivos, podem fornecer um contra-exemplo para a Conjectura de Lovász. No entanto, o grafo  $O_k$  tem  $\binom{2k+1}{k}$  vértices (veja Tabela 1), o que impede uma computação exata de caminhos e ciclos hamiltonianos em  $O_k$  para grandes valores de  $k$ . Através de um algoritmo heurístico, foi mostrado que os grafos ímpares são hamiltonianos para  $k \leq 13$  [Shields and Savage 2004], com exceção do grafo  $O_2$  que é o grafo de Petersen e que já foi provado não ser hamiltoniano, embora tenha um caminho hamiltoniano (Figura 1 (a)). Posteriormente, foi provado que os grafos ímpares tem um caminho hamiltoniano para  $k \leq 17$  [Bueno et al. 2009].

Em relação a ciclos ou caminhos longos, foi provado que existe uma constante  $c$  tal que, para todo  $k$ ,  $O_k$  tem um ciclo de comprimento de pelo menos  $(1 - \frac{c}{\sqrt{k}})|V(O_k)|$  [Johnson 2004]. A prova não tenta estimar  $c$  mas, em outras palavras, significa que o grafo  $O_k$  é assintoticamente hamiltoniano pois, conforme  $k$  aumenta, o comprimento do ciclo também aumenta.

Em nosso trabalho, procuramos resolver a Conjectura 2 através de uma construção recursiva que determine um ciclo (ou caminho) hamiltoniano em  $O_k$  a partir de um ciclo (ou caminho) hamiltoniano em  $O_{k-1}$ . Neste objetivo, até agora, conseguimos um ciclo (respectivamente, caminho) em  $O_k$  com pelo menos 75% de seus vértices, a partir de um

**Tabela 1. Número de vértices de alguns grafos ímpares**

| $k$ | $n = 2k + 1$ | $ V(O_k)  = \binom{2k+1}{k}$ |
|-----|--------------|------------------------------|
| 1   | 3            | 3                            |
| 2   | 5            | 10                           |
| 3   | 7            | 35                           |
| 4   | 9            | 126                          |
| 5   | 11           | 462                          |
| 6   | 13           | 1.716                        |
| 7   | 15           | 6.435                        |
| 8   | 17           | 24.310                       |
| 9   | 19           | 92.378                       |
| 10  | 21           | 352.716                      |
| 11  | 23           | 1.352.078                    |
| 12  | 25           | 5.200.300                    |
| 13  | 27           | 20.058.300                   |
| 14  | 29           | 77.558.760                   |
| 15  | 31           | 300.540.195                  |
| 16  | 33           | 1.166.803.110                |
| 17  | 35           | 4.537.567.650                |

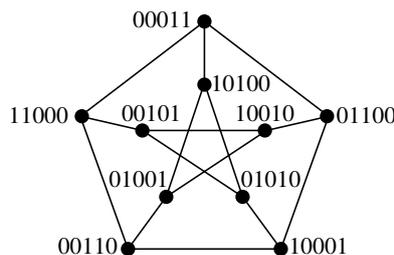
ciclo (respectivamente, caminho) hamiltoniano em  $O_{k-1}$  (Teorema 1).

Ainda em busca de uma prova para a Conjectura 2, encontramos que todo grafo ímpar tem um caminho com pelo menos 50% de seus vértices (Teorema 2).

## 2. Resultados

A seguir, mostramos como construir um ciclo em  $O_k$  com pelo menos 75% dos vértices de  $O_k$ . Para isso, utilizamos um ciclo hamiltoniano em  $O_{k-1}$ . Antes, porém, precisamos definir alguns conceitos que serão utilizados na prova do resultado.

Considere a correspondência entre os  $k$ -subconjuntos e os  $(k + 1)$ -subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, 2k + 1\}$  com um conjunto de strings binárias de  $n$  bits com exatamente  $k$  1's e  $(k + 1)$  0's. A correspondência  $b_n b_{n-1} \dots b_1 \rightarrow \{i | b_i = 1\}$  é uma bijeção de strings binárias de  $n$  bits para os subconjuntos de  $n = 2k + 1$ . Veja o grafo  $O_2$  (Figura 1 (a)) nesta representação na Figura 2.



**Figura 2. O grafo  $O_2$  com vértices representados como strings binárias.**

Construímos dois caminhos disjuntos em  $O_k$  a partir de um caminho ou ciclo hamiltoniano  $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_q)$  em  $O_{k-1}$ . Considere os vértices de  $C$  representados como strings binárias. Ao acrescentarmos 1 e 0 a um vértice de  $C$  obtemos, por definição, um vértice de  $O_k$ . Assim, construímos um caminho  $C_1$  em  $O_k$  como segue:  $C_1 = (0v_11, 1v_20, 0v_31, 1v_40, \dots, 1v_q0)$  se  $q$  é par e  $C_1 = (0v_11, 1v_20, 0v_31, 1v_40, \dots, 0v_q1)$  se  $q$  é ímpar. Similarmente, construímos um caminho  $C_2 = (1v_10, 0v_21, 1v_30, 0v_41, \dots, 0v_q1)$  se  $q$  é par e  $C_2 = (1v_10, 0v_21, 1v_30, 0v_41, \dots, 1v_q0)$  se  $q$  é ímpar. Note, pela construção, que  $C_1$  e  $C_2$  são caminhos em  $O_k$  e, se  $q$  é par, ambos são também ciclos.

Seja  $S$  o conjunto de vértices de  $O_k$  tal que, para todo  $v \in S$ ,  $v = 0v'1$  ou  $v = 1v'0$  onde  $v' \in V(O_{k-1})$ .

**Lema 1.**  $|S| = |C_1| + |C_2|$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assumamos  $v = 0v'1$ , onde  $v \in S$  e  $v' \in V(O_{k-1})$ . Então  $v'$  precisa conter os demais  $(k-1)$  1's. Estes podem ser colocados em  $\binom{2k-1}{k-1}$  combinações possíveis nos bits restantes de  $v$ , ou seja, são exatamente os vértices de  $O_{k-1}$ . O caso é análogo para  $v = 1v'0$ . Pela construção de  $C_1$  e  $C_2$ , todo vértice de  $S$  está ou em  $C_1$  ou em  $C_2$ .  $\square$

Os vértices de  $O_k$  que não estão em  $S$  são: (a)  $0w'0$  onde  $w' \in \binom{n-2}{k} = \binom{2k-1}{k}$ , e; (b)  $1w''1$  onde  $w'' \in \binom{n-2}{k-2} = \binom{2k-1}{k-2}$ . Denote por  $T$  o conjunto dos vértices  $0w'0$ ,  $w' \in \binom{2k-1}{k}$ . Pela relação das combinações complementares obtemos:

$$\binom{2k-1}{k} = \binom{2k-1}{(2k-1)-k}$$

$$\binom{2k-1}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$$

$$|T| = |V(O_{k-1})|$$

**Teorema 1.** *Se existe um ciclo (respectivamente, caminho) hamiltoniano  $C = (v_1, v_2, \dots, v_q)$  em  $O_{k-1}$ , então  $O_k$  tem um ciclo (respectivamente, caminho)  $C'$  tal que  $|C'| \geq 0.75|V(O_k)|$ .*

*Demonstração.* Primeiro, assumamos que  $C$  é um ciclo hamiltoniano. Mostramos agora que existem  $q$  vértices  $0\bar{v}_j0$  conectando  $0v_j1$  a  $1v_j0$ , onde  $0v_j1 \in S$ ,  $1v_j0 \in S$  e  $v_j \in C$  para  $1 \leq j \leq q$ . Antes, porém, observe que todo vértice  $v_j \in C$  tem  $k$  1's e  $(k-1)$  0's em seu complemento  $\bar{v}_j$ . Assim,  $0\bar{v}_j0 \in V(O_k)$ . Construímos agora  $q$  caminhos de tamanho 3 combinando os vértices de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $T$ :

$$Q_1 = 0v_11, 0\bar{v}_10, 1v_10$$

$$Q_2 = 1v_20, 0\bar{v}_20, 0v_21$$

⋮

$$Q_q = 1v_q0, 0\bar{v}_q0, 0v_q1, \text{ se } q \text{ é par ou}$$

$$Q_q = 0v_q1, 0\bar{v}_q0, 1v_q0, \text{ se } q \text{ é ímpar.}$$

Observe que, para  $Q_j$ ,  $1 \leq j \leq q$ , o primeiro vértice de  $Q_j$  está em  $C_1$ , o segundo vértice está em  $T$  e o terceiro vértice está em  $C_2$ . Sabemos que os  $q$  vértices  $0\bar{v}_j0$ , para  $v_j \in C$ , são distintos, desde que  $C$  é um ciclo hamiltoniano em  $O_{k-1}$ .

Denotamos por  $Q' \circ Q''$  o caminho obtido por percorrer os vértices de um caminho  $Q'$  seguidos pelos vértices de um caminho  $Q''$ . Dado um caminho  $Q'$ , denotamos por  $\overleftarrow{Q}'$  o caminho atravessado do último para o primeiro vértice.

Concatenamos os  $q$  caminhos  $Q_j$ ,  $1 \leq j \leq q$ , como segue:

$$C' = Q_1 \circ \overleftarrow{Q}_2 \circ Q_3 \circ \overleftarrow{Q}_4 \circ \dots \circ \overleftarrow{Q}_q, \text{ se } q \text{ é par e}$$

$$C' = Q_1 \circ \overleftarrow{Q}_2 \circ Q_3 \circ \overleftarrow{Q}_4 \circ \dots \circ Q_q, \text{ se } q \text{ é ímpar.}$$

As Figuras 3 e 4 ilustram a construção de  $C'$  para  $q$  par e  $q$  ímpar, respectivamente.

Note que, em ambos os casos, o último vértice de  $C'$  é  $1v_q0$ . Como o primeiro vértice de  $C'$  é  $0v_11$ , segue que  $C'$  é um ciclo, já que  $v_1$  e  $v_q$  são adjacentes no ciclo  $C$ . Assuma agora que  $C$  é um caminho hamiltoniano. Então  $C'$  é somente um caminho, pois o vértice  $0v_11$  não é adjacente à  $1v_q0$ , já que  $v_1$  não é adjacente a  $v_q$  em  $C$ .

Mostramos agora que  $|C'| = |C_1| + |C_2| + |T| \geq 0.75|V(O_k)|$ :

$$\begin{aligned} 3|V(O_{k-1})| &> 0.75|V(O_k)| \\ |V(O_k)| &< 4|V(O_{k-1})| \\ \frac{|V(O_k)|}{|V(O_{k-1})|} &< 4. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{Temos } |V(O_{k-1})| &= \binom{2k-1}{k-1} = \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} \quad \text{e} \\ |V(O_k)| &= \binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)!}{(k+1)(k)(k-1)!k!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Segue que } |V(O_k)| &= \frac{(2k+1)(2k)}{(k+1)(k)} |V(O_{k-1})| \\ \frac{|V(O_k)|}{|V(O_{k-1})|} &= \frac{(2k+1)(2k)}{(k+1)(k)} = \frac{(4k+2)}{(k+1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Verificamos que:

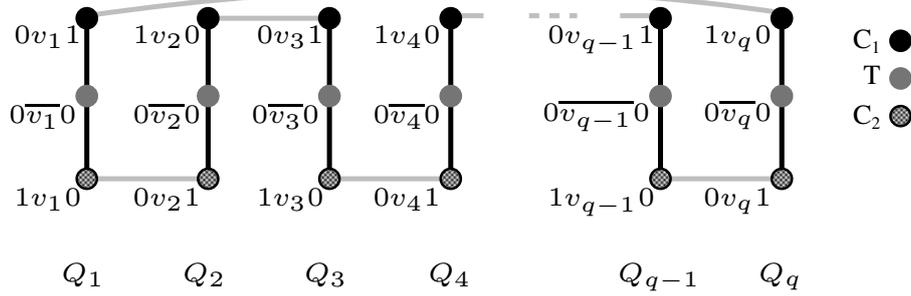
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|V(O_k)|}{|V(O_{k-1})|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4k+2)}{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{2}{k+1}\right) = 4.$$

Das expressões (1) e (2), temos:

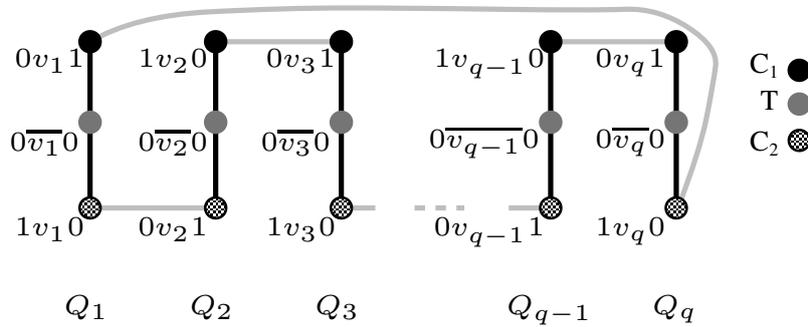
$$\begin{aligned} \frac{(4k+2)}{(k+1)} &\leq 4 \\ \frac{4(k+1)-2}{k+1} &= 4 - \frac{2}{k+1} \leq 4 \\ \frac{-2}{(k+1)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo, para  $k > 0$ , temos que  $|C'| = 3|V(O_{k-1})| \geq 0.75|V(O_k)|$ . □

Pelo Lema 1 e Teorema 1,  $C'$  contém todos os vértices de  $S$  e  $T$ . Assim, para que  $C'$  seja um ciclo ou caminho hamiltoniano em  $O_k$ , é preciso acrescentar a  $C'$  os vértices  $1w''1$  onde  $w'' \in \binom{2k-1}{k-2}$ .



**Figura 3. Teorema 1: construção de  $C'$  para  $q$  par. Os  $q$  caminhos de tamanho 3 (arestas em negrito) são concatenados pelas arestas de  $C_1$  e  $C_2$  (arestas em cinza).**



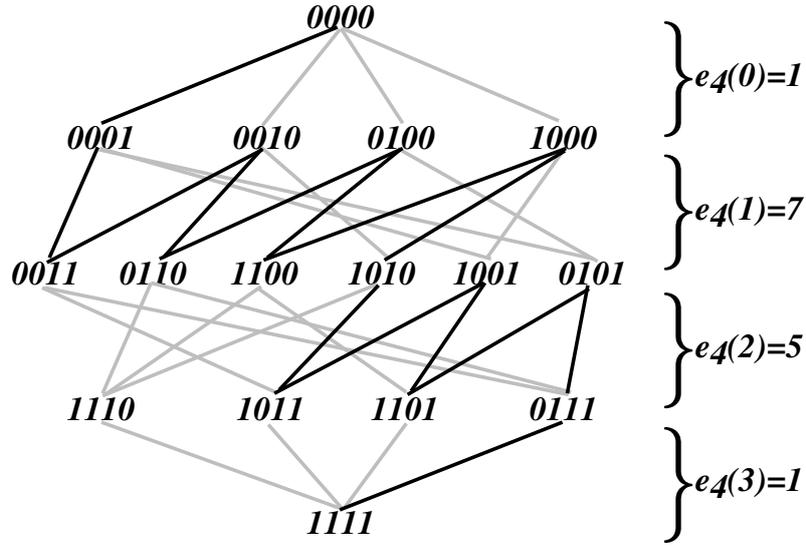
**Figura 4. Teorema 1: construção de  $C'$  para  $q$  ímpar. Os  $q$  caminhos de tamanho 3 (arestas em negrito) são concatenados pelas arestas de  $C_1$  e  $C_2$  (arestas em cinza).**

Mostramos, a seguir, que o grafo  $O_k$  tem um caminho de comprimento maior ou igual a 50% dos vértices do grafo. Antes, porém, definimos alguns conceitos utilizados na prova deste resultado.

O grafo  $n$ -cubo, denotado por  $Q_n$ , tem como vértices uma sequência de  $n$  bits, e dois vértices são adjacentes se eles diferem em exatamente um bit. O  $n$ -cubo pode ser representado pelo diagrama de Hasse do reticulado booleano de ordem  $n$  (veja Figura 5).

O código Gray binário [Gilbert 1958, Gray 1953] é uma enumeração de todas as strings binárias tal que os elementos diferem em exatamente um bit. Defina o peso de uma string como o número de 1's na string. O código Gray monotônico [Savage and Winkler 1995] é um código Gray no qual pares consecutivos de strings de pesos  $i, i + 1$  precedem os pares de strings de pesos  $j, j + 1$  para todo  $i < j$ . Veja um exemplo na Figura 5.

**Teorema 2.** Para  $k \geq 1$ , o grafo ímpar  $O_k$  tem um caminho  $P$  tal que  $|P| \geq 0.5|V(O_k)|$ . *Demonstração.* Seja  $p'$  um código Gray monotônico em  $Q_n$  e seja  $e_n(i)$  o número de arestas unindo o nível  $i$  ao nível  $i + 1$  de  $p'$ , onde um nível  $i$  contém os vértices com  $i$  1's (Figura 5). Então, para cada  $i, 0 \leq i \leq n - 1$ ,  $p'$  contém um caminho de comprimento  $e_n(i) + 1$  no subgrafo formado pelos vértices dos níveis  $i$  e  $i + 1$ . Considere agora o  $(n - 1)$ -cubo  $Q_{n-1}$ . Seja  $P$  o caminho de um código Gray monotônico contido no subgrafo formado pelos níveis  $k$  e  $(k + 1)$ . Denote por  $P'$  o caminho  $P$  com um bit 0 a esquerda de cada string binária e cada string binária  $w$  de peso  $(k + 1)$  substituída por



**Figura 5.** O cubo  $Q_4$  no diagrama de Hasse com um código Gray monotônico em destaque e o número de arestas do código Gray monotônico por nível.

$\bar{w}$ . Observe que  $P'$  é um caminho em  $O_k$  pois o código Gray monotônico não repete vértices e nenhum deles contém o elemento  $2k + 1$ , já que  $P$  está em  $Q_4$ . Precisamos agora determinar o comprimento de  $P'$ . De acordo com [Savage and Winkler 1995],  $e_n(i)$  pode ser determinada pela seguinte recorrência:

$$\begin{aligned}
 e_n(0) &= 1 \\
 e_n(1) &= 2 \binom{n}{i} - e_n(i-1) \text{ para } 1 \leq i \leq n-1 \text{ cuja solução é} \\
 e_n(i) &= 2 \binom{n-1}{i} - (-1)^i. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Assim, o comprimento de  $P'$  em  $Q_{n-1}$  em relação ao número de vértices de  $O_k$  é:

$$\begin{aligned}
 \frac{|P'|}{|V(O_k)|} &= \frac{e_{n-1}(k) + 1}{\binom{n}{k}} = \frac{2 \binom{n-2}{k} - (-1)^k + 1}{\binom{n}{k}} \\
 &= \frac{(2 \binom{2k-1}{k} - (-1)^k) + 1}{\binom{2k+1}{k}} \\
 &= \frac{2 \cdot \left( \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} \right) - (-1)^k + 1}{\frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}} \\
 &= 2 \cdot \frac{(2k-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{(k+1)!}{(2k+1)!} \\
 &= \frac{2 \cdot (2k-1)!(k+1) \cdot k \cdot (k-1)!}{(k-1)!(2k+1)(2k)(2k-1)!} \\
 &= \frac{(k+1)}{(2k+1)} \geq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Como um exemplo para o Teorema 2, considere o grafo  $Q_4$  (Figura 5). Determinamos um caminho  $P = (1010, 1011, 1001, 1101, 0101, 0111)$  em  $O_2$  no grafo  $Q_4$ . Acrescentamos um bit 0 a esquerda de cada string binária, obtendo  $(01010, 01011, 01001, 01101, 00101, 00111)$  e substituímos as strings de peso  $(k + 1)$  por seu complemento:  $P' = (01010, 10100, 01001, 10010, 00101, 11000) \in O_k$ . Então  $P'$  é um caminho no grafo  $O_2$  (Figura 2) e  $|P'| = 6 > 5 = 0.5|V(O_2)|$ .

### 3. Conclusões e Trabalhos Futuros

Em nosso trabalho, mostramos como, a partir um ciclo hamiltoniano em  $O_{k-1}$ , construir um ciclo em  $O_k$  com pelo menos 75% dos vértices de  $O_k$  (Teorema 1). Se  $O_{k-1}$  tem somente um caminho hamiltoniano, então obtemos um caminho hamiltoniano em  $O_k$  com pelo menos 75% dos vértices de  $O_k$ . Desde que os grafos ímpares tem um ciclo hamiltoniano para  $3 \leq k \leq 13$  [Shields and Savage 2004] e um caminho hamiltoniano para  $k \leq 17$  [Bueno et al. 2009], o Teorema 1 implica na existência de um ciclo em  $O_{14}$  com 75% dos vértices do grafo e de um caminho em  $O_{18}$  com 75% dos vértices do grafo. Um caminho hamiltoniano já é conhecido para  $O_{14}$  [Bueno et al. 2009], mas para o grafo  $O_{18}$  este é o primeiro resultado obtido até o momento, em nosso melhor conhecimento.

Para  $k$  geral, nós mostramos que o grafo  $O_k$  tem um caminho  $P$  tal que  $|P| \geq 0.5|V(O_k)|$  (Teorema 2). Com exceção do trabalho de [Johnson 2004] que implica que os grafos ímpares são assintoticamente hamiltonianos, nosso resultado é a única aproximação de caminhos e ciclos longos para os grafos ímpares para  $k$  geral até o momento.

Como trabalho futuro, pretendemos melhorar o Teorema 1 a fim de obter 100% dos vértices no ciclo construído, respondendo assim a conjectura de Biggs. Por outro lado, melhorar o Teorema 2 provendo ciclos e/ou caminhos mais longos resulta em uma aproximação melhor para problemas desafiadores como os propostos pelas conjecturas de Lovász e Biggs. Portanto, pretendemos trabalhar também no Teorema 2.

Ciclos e caminhos hamiltonianos são também muito estudados em uma classe de grafos conhecida como *grafos  $B_k$*  ou *grafos ímpares duplos* (“*doubled odd graphs*”, em inglês) que são formados a partir dos grafos ímpares e são também vértice-transitivos. Havel [Havel 1983] conjecturou que os grafos  $B_k$  são hamiltonianos para  $k \geq 1$ . Devido à relação entre as duas classes de grafos, a resolução da conjectura de Biggs [Biggs 1979] automaticamente forneceria ciclos hamiltonianos para o grafo  $B_k$  para todo  $k$  ímpar, resolvendo parcialmente a conjectura de Havel.

Relativo à contribuição científica do aluno, destacamos que os resultados deste trabalho foram obtidos pelo próprio aluno que, desde o início do projeto, já contava com boa fundamentação matemática. O texto foi escrito pelo aluno sob supervisão da orientadora e os trabalhos futuros propostos serão trabalhados no próximo projeto de Iniciação Científica. A orientadora contribuiu com: sua experiência e conhecimento no problema, possíveis direções para a pesquisa, instruções de como formalizar e organizar os resultados em forma de lemas e teoremas, supervisão do trabalho e verificação da correteza dos resultados.

### Referências

Biggs, N. (1979). Some odd graph theory. *Ann. New York Acad. Sci.*, 319:71–81.

- Bueno, L. R., Faria, L., Figueiredo, C. M. H., and Fonseca, G. D. (2009). Hamiltonian paths in odd graphs. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 3(2):386–394.
- Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company, New York.
- Gilbert, E. N. (1958). Gray codes and paths on the  $n$ -cube. *Bell Systems Tech. J.*, 37:815–826.
- Gray, F. (1953). Pulse code communication. U.S. Patent 2632058.
- Havel, I. (1983). Semipaths in directed cubes. In Fiedler, M., editor, *Graphs and other Combinatorial Topics*, pages 101–108, Teubner, Leipzig. Teubner-Texte Math.
- Johnson, J. R. (2004). Long cycles in the middle two layers of the discrete cube. *J. Combin. Theory Ser. A*, 105(2):255–271.
- Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. In Miller, R. and Thatcher, J., editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, New York. Plenum Press.
- Lovász, L. (1970). Problem 11. In *Combinatorial Structures and their Applications*. Gordon and Breach.
- Savage, C. D. and Winkler, P. (1995). Monotone gray codes and the middle levels problem. *J. Combin. Theory Ser. A*, 70(2):230–248.
- Shields, I. and Savage, C. D. (2004). A note on hamilton cycles in Kneser graphs. *Bulletin of the Institute for Combinatorics and Its Applications*, 40:13–22.