Sobre quadrados mágicos, grafos graciosos e colorações especiais: teoremas, algoritmos e aplicações*

Victória Aires, Rosiane de Freitas

Instituto de Computação – Universidade Federal do Amazonas (UFAM)
69077-000 – Manaus – AM – Brasil

{vpsa,rosiane}@icomp.ufam.edu.br

Abstract. *In this study, graph labeling problems were investigated. This consists of assigning labels, usually integers, on vertices or edges, or both, to respect some constraints. Labeled graphs include the magical graphs, graceful graphs and colorings with distances. Magic squares can be modeled as complete bipartite graphs, which in turn can have a graceful labeling. Such labeling can be seen as a particular case of graph coloring under distance constraints. These correlations were explored in this work, being rewritten in details the proof of the main theorems, as well as implementations of algorithms for recognition and determination of feasible solutions - exact and greedy heuristics, using the DIMACS benchmark. NP-completeness proof for coloring with equal distances is given.*

Resumo. *Neste trabalho foram investigados problemas de rotulação em grafos, que consistem em atribuir rótulos, geralmente números inteiros, a vértices ou arestas, ou ambos, de modo a respeitar alguma restrição. Grafos rotulados incluem os grafos mágicos, grafos graciosos e colorações com restrições de distâncias. Quadrados mágicos podem ser modelados como grafos bipartidos completos, que por sua vez podem ter uma rotulação graciosa. Tal rotulação pode ser vista como um caso particular de coloração de vértices que respeita certa restrição de distância. Estas correlações foram exploradas nesta pesquisa, sendo reescritas em detalhes as provas dos principais teoremas, bem como implementados algoritmos de reconhecimento e determinação de soluções factíveis - exato e heurísticas gulosas, com uso do benchmark DIMACS. A prova da NP-completude para coloração com distâncias iguais é apresentada.*

1. Introdução

A área de teoria dos grafos estuda as relações entre os elementos de um conjunto, em uma estrutura matemática principal conhecida por **grafos**. Deste modo, é dado um grafo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de **vértices**, que representam os objetos, e onde E o conjunto de **arestas**, representando os relacionamentos entre eles. Dependendo do problema em estudo, podem ser acrescentadas outras características a um grafo. A classe de **grafos rotulados** reúne aqueles que possuem rótulos nas arestas, vértices ou ambos, que geralmente são valores numéricos que podem representar pesos ou distâncias [Feofiloff et al. 2011].

*Apoiado pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC (UFAM e CNPq).

Neste trabalho, foram investigados alguns problemas pertencentes a esta classe, sendo: **grafos mágicos**, **grafos graciosos** e problemas de **coloração com restrições de distâncias**. Em uma rotulação mágica, existe uma soma constante associada a cada vértice. Já em uma rotulação graciosa, as arestas devem receber uma sequência de números naturais como rótulos [Watson 1972]. Uma outra rotulação conhecida é a chamada coloração de vértices, onde os rótulos são interpretados como cores e vértices adjacentes devem ter cores diferentes [Kosowski and Manuszewski 2004]. Aqui, o foco está numa variação deste problema, acrescentando uma restrição relacionada a rótulos nas arestas. Deste modo, os objetivos da pesquisa são: explorar as correlações entre os problemas, reescrever os principais teoremas, compreender propriedades identificadas anteriormente e auxiliar na proposição de novas, além de implementar algoritmos para rotulação graciosa de algumas classes específicas e coloração utilizando heurísticas gulosas.

Este artigo está organizado do seguinte modo. Na Seção 2 é apresentado o problema do quadrado mágico e sua modelagem teórica em grafos, envolvendo rotulação mágica e aplicações. A Seção 3 traz os aspectos referentes aos grafos graciosos, suas características, teoremas e algoritmos. Já na Seção 4, são abordadas variações de problemas de coloração clássica, mas além da rotulação de vértices, envolvem restrições de distância vistas como um tipo de rotulação de arestas. A Seção 5 sumariza as contribuições do trabalho. Por fim, na Seção 6, são feitas as considerações finais do artigo.

2. Quadrado Mágico: modelagem em teoria dos grafos

Um quadrado mágico é uma tabela de números, onde a soma dos elementos de uma linha, coluna e diagonais é constante [Arsie 2010]. Não há repetição de números. A constante é denotada por S_n e chamada de **constante mágica**. Esta é dada por $S_n = \frac{(1+n^2)\cdot n}{2}$. Assim, a soma varia de acordo com a ordem n do quadrado.

Existe uma classe de grafos rotulados útil na modelagem do quadrado mágico: os **grafos mágicos**. Um grafo é dito mágico se as arestas podem ser rotuladas com inteiros não negativos de modo que a soma dos rótulos das arestas incidentes a um vértice é a mesma, independente da escolha do vértice [Arnold 2012]. Pode-se verificar que ao representar um quadrado mágico em grafos, obtêm-se uma configuração semelhante à da Figura 1, ou seja, uma rotulação mágica. Cada vértice representa uma linha ou coluna e a soma dos rótulos das arestas associadas é constante, para todos os vértices. Como já comentado, um grafo mágico é um tipo de grafo rotulado que admite uma rotulação mágica, assim como os grafos graciosos, que são aqueles que possuem uma rotulação graciosa, tal como abordado na próxima seção.

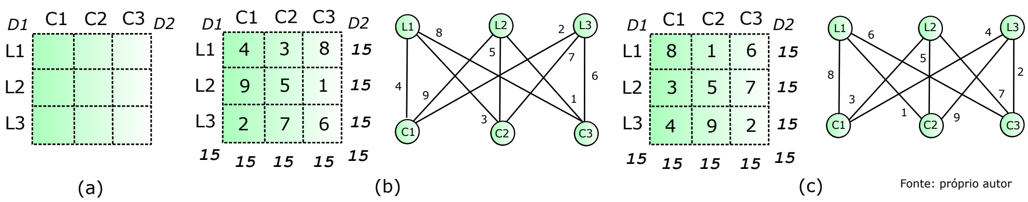


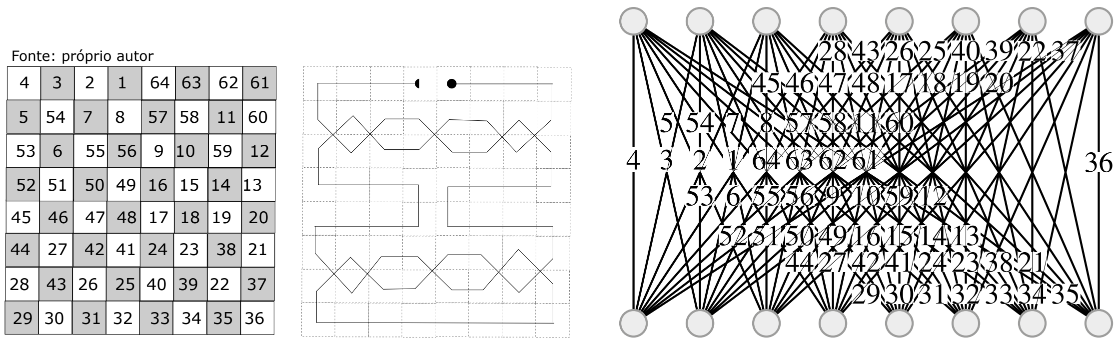
Figura 1. Grafo mágico representando um quadrado mágico 3×3. Em (a), uma instância inicial não preenchida. Em (b) e (c), configurações que satisfazem a propriedade de quadrado mágico. A soma dos rótulos das arestas adjacentes a cada vértice é sempre 15, a constante mágica para ordem 3.

Se o objetivo for implementar um algoritmo para calcular todos os quadrados mágicos possíveis para uma dada ordem n, uma possibilidade seria o uso da técnica de **enumeração explícita** (***backtracking***), ou seja, testar todas as combinações possíveis. No entanto, esta alternativa é muito custosa computacionalmente, uma vez que para um quadrado de ordem n, é possível preencher o quadrado com n^2 números que podem ser dispostos de maneiras diferentes até satisfazer a restrição do quadrado mágico. Além disso, há um algoritmo polinomial que utiliza cálculos matemáticos simples para gerar apenas uma solução para um quadrado mágico de ordem n.

2.1. Aplicações dos quadrados mágicos

Os quadrados mágicos aparecem na literatura relacionados a outros problemas, como jogos que também tem como objetivo preencher um *grid* de números, como o **quadrado latino**. Criado por Leonhard Euler, matemático também interessado no estudo dos quadrados mágicos, o jogo consiste em um quadrado com n^2 elementos que devem ser dispostos de forma que cada linha e cada coluna possua cada um dos n números diferentes, sem repetição [dos Santos et al. 2007]. O jogo **Sudoku**, por exemplo, é um quadrado latino com uma restrição a mais: além das linhas e colunas, existem subdivisões do *grid*, e nelas também não pode haver repetição de números [Arsie 2010].

Uma outra aplicação interessante é no **problema do passeio do rei**. Nele, o objetivo é encontrar um passeio do rei em todas as casas de um tabuleiro de xadrez. Ele só pode passar em cada casa apenas uma vez e se move para apenas uma casa em qualquer direção. Em uma das soluções, demonstrada na Figura 2, o passeio feito pelo rei resulta em um quadrado mágico 8×8 [Ghersi 1921]. Os números do quadrado mágico indicam a ordem em que cada casa foi visitada. As linhas, colunas e diagonais do quadrado mágico feito pelo passeio do rei somam 260, que é o valor da constante mágica para o tamanho 8.



(a) (b)

Figura 2. Uma solução para o passeio do rei que resulta em um quadrado mágico. Em (a), têm-se o quadrado mágico 8×8 representando a ordem de visita para cada casa, onde a constante mágica é 260 e, ao lado, o caminho percorrido pelo rei: iniciando pelo meio círculo e terminando no círculo. Em (b), o grafo bipartido e mágico $K_{8,8}$ correspondente.

Além destas aplicações, existem outras mais peculiares. Os quadrados mágicos de ordem 3 até 9 representam os planetas astrológicos [Drury 1992], uma ligação com misticismo e astrologia. Também são relacionados à música: alguns músicos associaram os números do quadrado mágico a notas musicais obtendo uma base para a composição de suas peças [Roberts 2015].

3. Grafos Graciosos

A classe de grafos rotulados reúne diversas subclasses. O que as diferencia são as condições para atribuição dos rótulos e a propriedade adquirida após a rotulação. Dentre as rotulações existentes, além da rotulação mágica vista na seção anterior, existe a **rotulação graciosa** [Gallian 2015]. O artigo de Rosa sobre grafos graciosos [Rosa 1967] é considerado um marco na introdução do conceito de grafos rotulados.

Em uma rotulação graciosa, dado um grafo $G = (V, E)$, deseja-se atribuir um rótulo $f(v)$ para cada vértice v. Além disso, cada aresta uv deve ter como rótulo $|f(u) - f(v)|$. Todas as arestas devem possuir um rótulo diferente e, ao final, estes rótulos devem ser uma sequência de números naturais. Um grafo que pode receber uma rotulação graciosa é dito **gracioso**. Estes grafos despertam muito interesse na literatura, em parte devido à Conjectura 1, a seguir.

Conjectura 1. *Toda árvore é um grafo gracioso.*

Esta conjectura foi proposta por Anton Kotzig e Gerhard Ringel e citada por Rosa em seu artigo original [Rosa 1967]. Embora seja simples, ela permanece em aberto: sua validade só foi provada, através de computador, para árvores de até 35 vértices [Fang 2010].

Além disso, outros estudos mostraram que algumas classes de grafos sempre podem receber uma rotulação graciosa, por exemplo: grafos lagarta, os grafos completos K_2, K_3 e K_4, os bipartidos completos e os caminhos [Golomb 1974]. A Figura 3 contém exemplos de classes de grafos que são graciosos.

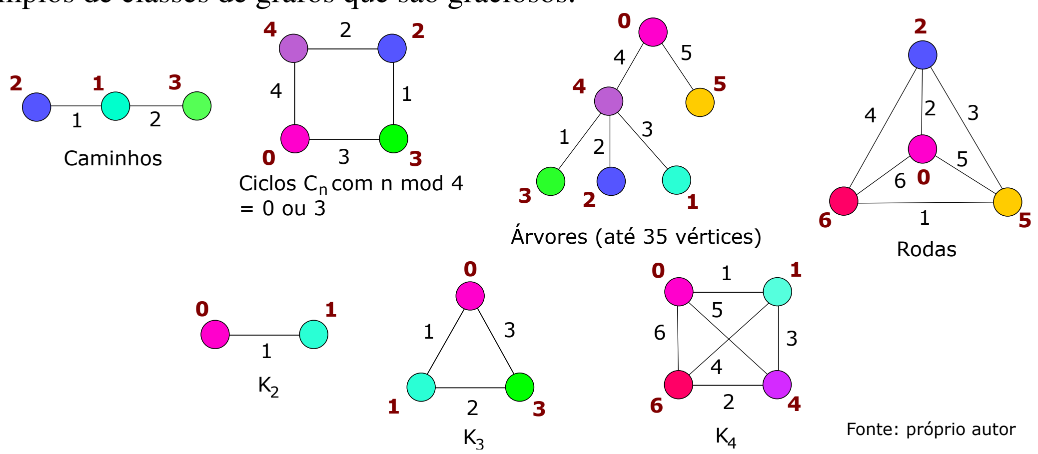


Figura 3. Algumas classes de grafos graciosos. Os números em negrito são rótulos dos vértices. Os demais são rótulos das arestas.

3.1. Teoremas relacionados a grafos graciosos

A seguir, serão reescritas as provas de alguns teoremas que mostram a validade da rotulação graciosa para algumas classes de grafos. São elas: grafos caminhos, estrela e bipartido completo.

Teorema 1. *Todo grafo caminho é um grafo gracioso [Watson 1972].*

Demonstração. Dado um grafo caminho, o número de arestas $m = n - 1$, onde n é o número de vértices. O grafo pode sempre receber uma rotulação graciosa como descrita a seguir.

Inicia-se pelo vértice em uma das extremidades. Ele é rotulado com o inteiro 0. O vértice adjacente a ele recebe $n-1$ como rótulo. O próximo adjacente não rotulado recebe 1, o próximo $n-2$ e segue desta forma, alternando entre vértices que recebem rótulos incrementados de 1 e os que recebem rótulos decrementados de 1.

Considerando dois casos: n par e n ímpar. Em ambos, $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Para o caso par, os rótulos das arestas, começando pela aresta mais à esquerda, são: $|(n-1)-0|, |(n-1)-1|, |(n-2)-1|, \ldots, |(n-k)-(k-1)| = n-1, n-2, n-3, \ldots, 1$. Similarmente, no caso ímpar, os valores das arestas, começando à esquerda, são $n-1, n-2, n-3, \ldots, 1$. Todos os valores entre 1 e m são usados, como exemplificado na Figura 4. Logo, esta rotulação é graciosa. Portanto, grafos caminhos são graciosos. □

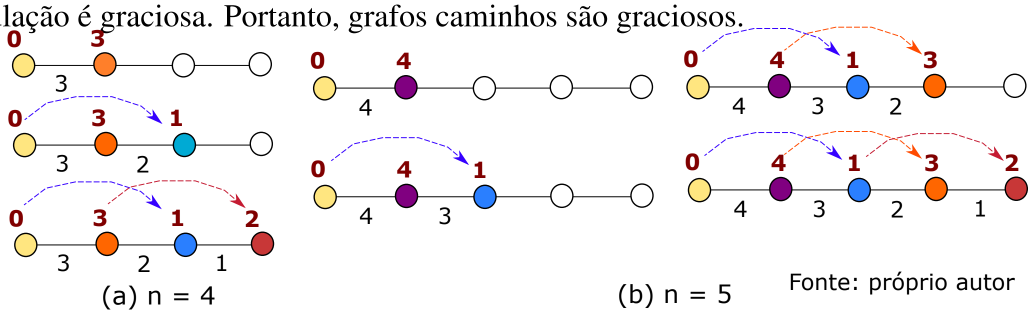


Figura 4. Exemplos de rotulação graciosa para grafos caminhos, como definido na prova do Teorema 1. Em (a) n é par e em (b), n é ímpar. A rotulação obtida é graciosa para ambos.

Teorema 2. *Grafos estrela são graciosos.*

Demonstração. É trivial verificar que um grafo estrela é sempre gracioso. Basta atribuir o rótulo 0 para o vértice central e os números de 1 a m para os demais vértices, sem repetição. Assim, as arestas recebem o mesmo rótulo dos vértices das pontas da estrela, respeitando a rotulação graciosa. □

Teorema 3. *Grafos bipartidos completos são graciosos [Beavers 2001].*

Demonstração. Dado um grafo bipartido completo $K_{a,b}$. Considerando os conjuntos A e B, contendo a e b vértices, respectivamente. Os vértices do conjunto A são rotulados com $0, 1, 2, \ldots, a-1$. Já os do conjunto B recebem os números $a, 2a, \ldots, ba$ como rótulos. Deste modo, todo inteiro de 1 até ab possui uma única representação: a diferença absoluta entre o rótulo de um vértice em A e um vértice em B, como exemplificado na Figura 5. □

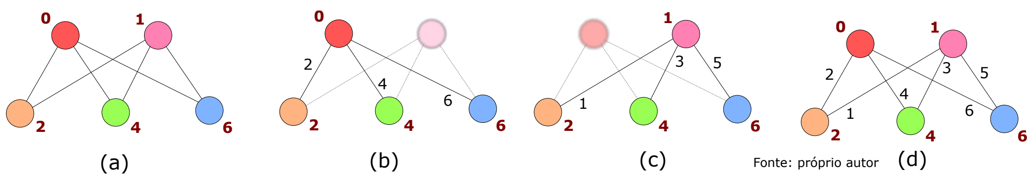


Figura 5. Exemplo da rotulação descrita no Teorema 3. Em (a), os vértices recebem a rotulação. Em (b) e (c), observam-se os rótulos das arestas incidentes a cada vértice superior. Em (d), vê-se que cada inteiro de 1 a m possui representação única.

3.2. Algoritmos para rotulação graciosa de classes específicas de grafos

Os teoremas anteriores possuem algo em comum: todos eles apresentam um modo de rotular graciosamente os tipos específicos de grafos. Deste modo, a ideia principal de cada teorema foi utilizada pela aluna para elaborar algoritmos de rotulação, apresentados nos Algoritmos 1, 2 e 3, a seguir. Cada um deles utiliza os teoremas descritos para rotular grafos caminhos, estrela e bipartidos.

Algoritmo 1: Rotulação graciosa do grafo caminho ($P = (V, E)$)

início
  Dados: n, cont1, cont2
  n $\leftarrow |V(P)|$; cont1 $\leftarrow 0$; cont2 $\leftarrow n - 1$;
  para cada $v_i \in V(P)$ **faça**
    se $i \mod 2 = 0$ **então**
      rotulo(v_i) $\leftarrow$ cont1; cont1 $\leftarrow$ cont1 + 1;
    fim se
    senão
      rotulo(v_i) $\leftarrow$ cont2; cont2 $\leftarrow$ cont2 - 1;
    fim se
  fim para cada
fim

Algoritmo 2: Rotulação graciosa do grafo estrela ($S = (V, E)$)

início
  para cada $v_i \in V(S)$ **faça**
    rotulo(v_i) $\leftarrow i$;
  fim para cada
fim

Algoritmo 3: Rotulação graciosa do grafo bipartido completo ($K = (A + B, E)$)

início
  Dados: cont1, cont2
  cont1 $\leftarrow 0$; cont2 $\leftarrow 1$;
  para cada $v_i \in A(K)$ **faça**
    rotulo(v_i) $\leftarrow$ cont1; cont1++;
  fim para cada
  para cada $v_j \in B(K)$ **faça**
    rotulo(v_j) $\leftarrow$ cont2 * $|A(K)|$; cont2++;
  fim para cada
fim

3.3. Aplicações de grafos graciosos

Os grafos graciosos possuem algumas aplicações práticas interessantes. Uma delas é **modelagem de redes sem fio de telecomunicações** [Nishad 2012]. Considerando que uma rede possui $n+1$ centrais, estas podem ser consideradas vértices. Entre elas, há conexões, que podem ser vistas como arestas. Se cada central for rotulada com um inteiro entre 0 e n, as conexões são rotuladas com a diferença entre os rótulos das centrais conectadas. Deste modo, cada conexão adquire um rótulo distinto, exatamente como em um grafo gracioso. Isto permite, por exemplo, a execução de um algoritmo simples quando uma conexão é perdida. Como cada aresta é rotulada com a diferença entre os rótulos de duas centrais, é fácil detectar quais são as afetadas e corrigir o problema.

Outra aplicação envolvendo grafos graciosos são as chamadas **réguas de Golomb** [Beavers 2001]. Para tanto, são usados grafos graciosos e variações, como os chamados semi graciosos e quase graciosos, em que menos restrições são aplicadas.

Em um grafo rotulado graciosamente (ou de acordo com uma variação), os rótulos dos vértices são assinalados em uma régua, como uma marca. Os rótulos das arestas são as distâncias entre as marcas correspondentes. O objetivo é não haver uma mesma distância entre duas marcas quaisquer, como mostra o exemplo da Figura 6. Estas réguas são úteis para criação de códigos auto-ortogonais (usados em *lasers* leitores de discos), reduzir ambiguidade em cristalografia de raios-X e outros usos em teoria da codificação.

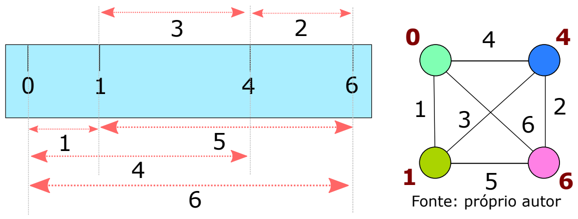


Figura 6. Exemplo de uma régua de Golomb e o grafo gracioso correspondente a ela.

4. Problemas de coloração com restrições de distâncias

O problema de atribuir rótulos aos vértices, como nos grafos graciosos, é análogo à atribuição de cores, como no problema da **coloração** de vértices. Para identificar tal relação, basta considerar cores como inteiros não negativos. Em uma coloração clássica, o objetivo é atribuir cores aos vértices de forma a vértices adjacentes possuírem cores diferentes [Feofiloff et al. 2011]. Os problemas estudados neste trabalho, por outro lado, abordam casos especiais relacionados aos valores das distâncias e tipo de (des)igualdade envolvida.

Tal classe de problemas tem sido denominada de **coloração com distâncias**, como resultado do trabalho do doutorando Bruno Raphael Dias, aluno da orientadora desta iniciação científica, Rosiane de Freitas, em conjunto com a mesma. À presente aluna, coube a tarefa de compreender os aspectos já definidos e auxiliar na caracterização de novos casos. Portanto, nesta seção serão relatados os pontos de contribuição do projeto de iniciação científica neste contexto maior.

A teoria de **geometria de distâncias** é aplicada na caracterização de tal classe de problemas, onde é fornecido um grafo simples $G = (V, E, d)$, sendo $d \colon E \to \mathbb{R}^+$, e deve-se encontrar a projeção $x \colon V \to \mathbb{R}^3$ tal que $\|x(i) - x(j)\| = d_{ij}$ para toda aresta $(i, j) \in E$. Ao considerar o espaço como sendo $\mathbb{R}^1$, obtêm-se a coloração com distâncias. Foram estudadas duas variações, onde a diferença reside na restrição imposta: **distâncias iguais**, onde $|x(i) - x(j)| = d_{ij}$ e **distâncias mínimas**, em que $|x(i) - x(j)| \geq d_{ij}$.

4.1. Teoremas de factibilidade e prova de NP-completude

Em seu projeto de pesquisa, o aluno Bruno Dias determinou duas propriedades de factibilidade para o problema de coloração com distâncias iguais. Na primeira, levou-se em conta que todas as distâncias são iguais a uma constante. Na segunda, essa restrição não existe: as distâncias podem assumir qualquer valor inteiro não negativo. Estas propriedades são descritas nos Teoremas 4 e 5 a seguir.

Teorema 4. *Dado um grafo G, há solução para a coloração com distâncias iguais a uma constante se e somente se G é bipartido.*

Teorema 5. *Se um grafo G é uma árvore, então G sempre admite solução para o caso de coloração com distâncias iguais.*

Além disso, há uma correlação interessante: se um grafo G é gracioso, então sempre admite pelo menos uma solução para a coloração com distâncias iguais. Basta fazer os rótulos das arestas tornarem-se restrições de igualdade e os rótulos dos vértices tornam-se uma solução viável.

O estudo das propriedades identificadas permitiu que a aluna auxiliasse na prova de NP-completude para a coloração com distâncias iguais. Para a prova, considera-se a versão de decisão do problema: dado um grafo, o objetivo é decidir se ele possui solução para o caso de distâncias iguais.

O problema pertence a NP, com verificação simples. Para isto, basta elaborar um algoritmo que recebe como entrada um grafo $G = (V, E, d)$ onde cada vértice $v \in V$ recebeu uma cor $x(v)$. Verifica-se, então, se G recebeu uma solução válida tomando cada aresta $(i, j) \in E$ e checando se $|x(i) - x(j)| = d_{ij}$. Se nenhuma restrição de distância foi violada, então G recebeu uma solução positiva para o problema. Como esta verificação ocorre em tempo $O(|E|)$, ela é linear. Portanto, a coloração com distâncias iguais está em NP.

A prova de NP-dificuldade reduz o problema da partição (NP-completo, vide [Garey and Johnson 1979]) para a coloração com distâncias iguais. Considerando uma instância para partição, consistindo em um conjunto M de r inteiros, ou seja, $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$. A partir desta instância, é construído um grafo ciclo G com $|V| = |E| = r$, levando em conta o seguinte: $V = \{i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}\}$, $E = \{(i_b, i_{b+1 \mod r}) | 0 \leq b \leq r\}$ e $d_{i_b, i_{b+1 \mod r}} = m_{b+1}$ ($\forall 0 \leq b \leq r$). Assim, seja uma rotulação de vértices x. Se ela for válida, podem ser definidos dois conjuntos: $S_1 = \{m_{b+1} | x(i_b) < x(i_{b+1 \mod r})\}$ e $S_2 = \{m_{b+1} | x(i_b) > x(i_{b+1 \mod r})\}$.

Deste modo, têm-se que S_1 e S_2 formam uma partição de M, onde a soma dos elementos em S_1 é igual à soma dos elementos em S_2. Isto é, se o grafo G admite uma rotulação válida, então M têm uma resposta positiva e vice-versa. Como esta redução pode ser feita em tempo $O(r)$, a coloração com distâncias iguais é NP-difícil. Sendo assim, conclui-se que decidir se um grafo possui solução para a **coloração com distâncias iguais é NP-completo**.

4.2. Algoritmos gulosos para problemas de minimização

Além do estudo teórico, foram implementados algoritmos heurísticos para a coloração com distâncias mínimas, ou seja, restrição maior ou igual. A escolha da ordem em que os vértices serão coloridos é importante para a heurística utilizada, chamada **gulosa**. Nesta estratégia, dado um grafo G e uma sequência de vértices $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, cada vértice recebe a menor cor possível [Kosowski and Manuszewski 2004]. Este método não garante que o mínimo de cores será utilizado, sendo muito afetado pela escolha dos vértices a serem coloridos. Para a implementação, foram escolhidas três **estratégias gulosas**:

ordem arbitrária; em ordem decrescente de acordo com o grau; e ordenação decrescente segundo o grau de saturação.

Será apresentado apenas o pseudocódigo do algoritmo que utiliza ordem do **grau de saturação** ou DSATUR (Degree of Saturation). O grau de saturação de um vértice é a quantidade de vértices adjacentes a ele que já receberam uma cor. O Algoritmo 4 demonstra como o algoritmo guloso DSATUR funciona para coloração com distâncias iguais. Os algoritmos foram executados utilizando como *benchmark* as instâncias GEOM, da DIMACS, criadas por Michael Trick e disponíveis na página do mesmo [Trick 2004].

Algoritmo 4: Coloração gulosa DSATUR (G = (V,E))

```
início
    Ordenar os vértices V(G) em ordem decrescente de grau;
    Vértice de maior grau recebe a cor 1;
    enquanto ∃ vértice descolorido faça
        v ← maior grau saturacao (G);
        se ∃ mais de um vértice com grau de saturação igual a v então
            Escolhe o vértice de maior grau;
        fim se
        Colore o vértice com a menor cor disponível.
    fim enqto
fim
```

5. Contribuições do trabalho

Os pontos a se destacar neste projeto de pesquisa são:

- realização de uma ampla revisão da literatura sobre o problema do quadrado mágico e classes específicas de grafos rotulados, com ênfase nos grafos mágicos, grafos graciosos e colorações com distâncias;
- aplicação dos conceitos de teoria dos grafos para a compreensão e reescrita das provas de alguns teoremas importantes;
- elaboração e implementação de algoritmos polinomiais para reconhecimento de classes de grafos graciosos e para determinação de soluções para coloração com distâncias, usando heurísticas gulosa;
- uso de *benchmark* consolidado na literatura, DIMACS, com instâncias de coloração com restrições de distância;
- colaboração com a tese de Doutorado do aluno Bruno Dias, no intuito de compreender resultados identificados anteriormente, o que possibilitou, principalmente, alguns resultados adicionais como a elaboração de prova de NP-completude para um problema estudado.

6. Considerações finais

Este projeto de pesquisa, apoiado pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC – UFAM e CNPq), no período de 2015/2016 abordou aspectos de grafos rotulados a partir do estudo do quadrado mágicos, grafos graciosos e colorações especiais.

Foram reescritas provas de teoremas, elaborada uma prova de NP-completude, bem como adaptados e elaborados algoritmos exatos e heurísticos, com uso de benchmark da literatura. A experiência do projeto de pesquisa foi muito interessante para a aluna, permitindo um ótimo contato com aspectos teóricos da computação. A elaboração de revisão da literatura, aperfeiçoamento do método científico e estudo de diversas propriedades de grafos foi, com certeza, essencial para a formação e interesse por pesquisa. Como projetos futuros, pretende-se continuar investigando os problemas de coloração com distâncias, analisando outras restrições e os relacionando aos grafos graciosos.

Referências

Arnold, F. (2012). Totally magic graphs - a complete search on small graphs. Master's thesis, Clausthal University of Technology.

Arsie, K. C. (2010). Jogos sudoku e quadrado mágico. Master's thesis, Universidade Federal do Paraná.

Beavers, B. (2001). Golomb rulers and graceful labeling. *Loisiana State University*.

Dias, B. R. C., de Freitas Rodrigues, R., and Filho, N. M. (2012). Alocação de canais em redes celulares sem fio: algoritmos e modelos teóricos em grafos e escalonamento. In *SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisas Operacionais*.

dos Santos, C. P., Neto, J. P., and Silva, J. N. (2007). *Os quadrados latinos + Puzzle Hexágono Mágico*. Edimpresa.

Drury, N. (1992). *Dictionary of Mysticism and the Esoteric Traditions*. Bridport, Dorset: Prism Press.

Fang, W. (2010). A computational approach to the graceful tree conjecture.

Feofiloff, P., Kohayakawa, Y., and Wakabayashi, Y. (2011). *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. Universidade de São Paulo.

Gallian, J. A. (2015). A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*.

Garey, M. and Johnson, D. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.

Ghersi, I. I. (1921). *Matematica Dilettevole e Curiosa*. Ulrico Hoepli, Milan, Italy.

Golomb, S. W. (1974). The largest graceful subgraph of the complete graph. *The American Mathematical Monthly, 81(5):499–501*.

Kosowski, A. and Manuszewski, K. (2004). Classical coloring of graphs. *Contemporary Mathematics*.

Nishad, T. M. (2012). Application of strong graphs in wireless networks. *International Journal of Scientific and Engineering Research*.

Roberts, G. E. (2015). Composing with numbers: Sir peter maxwell davies and magic squares. *Math, Music and Identity*.

Rosa, A. (1967). On certain valuations of the vertices of a graph. *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966)*.

Trick, M. (2004). Graph coloring and its generalizations. http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR03/. Acesso em: 04/2016.

Watson, R. L. (1972). A survey on the graceful labeling of graphs. Master's thesis, Roanoke College.