

# Ensino do Teorema Fundamental do Cálculo: criação de um modelo praxeológico para uma análise de micromundo

Patrícia Benevides de Oliveira<sup>1</sup>, Franck Bellemain<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Recife – PE – Brasil

<sup>2</sup>Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Recife – PE – Brasil

patricia.benevides@ufpe.br, franck.bellemain@ufpe.br

**Abstract.** *This text is an excerpt from an ongoing doctoral research, whose objective is to create a praxeological model for the analysis of a Microworld for teaching the Fundamental Theorem of Calculus (TFC). The chosen theoretical references provided us with methodological elements for this research, through a convergence between theoretical concepts of the Anthropological Theory of Didactics and the Software Development Process Model of Didactic-Informatic Engineering.*

**Resumo.** *Este texto é um recorte de uma pesquisa de doutorado em andamento, cujo objetivo é criar um modelo praxeológico para uma análise de micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). As referências teóricas escolhidas nos forneceram elementos metodológicos para essa pesquisa, através de uma convergência entre conceitos teóricos da Teoria Antropológica do Didático e o modelo de processo de desenvolvimento de software educativo da Engenharia Didático-Informática.*

## 1. Introdução

No ensino do Cálculo Diferencial e Integral destaca-se um teorema de grande relevância, que é o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), pois estabelece uma relação através dos processos de integração e derivação, apesar de, geralmente, seus conceitos serem ensinados de forma independente. Ao mesmo tempo, encontramos em nossa investigação pesquisadores que revelaram sobre as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes em relação ao Cálculo, e em particular ao TFC, em que a manipulação dos objetos matemáticos é restrita a manipulações algébricas e técnicas memorizáveis, não sendo interpretados graficamente. Nesse panorama, é importante destacar a importância do uso de ambientes computacionais que ofereçam possibilidades de observação, investigação e construção do conhecimento através da realização de atividades que não seriam possíveis de serem feitas no ambiente papel-lápis.

Dentre os tipos de softwares disponíveis, consideramos o Micromundo como um sistema que permite “simular ou reproduzir um domínio do mundo real, e que tem como objetivo abordar e resolver uma classe de problemas” (BELLEMAIN, 2002), dadas as possibilidades de interação dinâmica entre os sujeitos e os objetos matemáticos por meio de suas ferramentas. Mas, segundo Bellemain (*ib.*), o micromundo sozinho não ensina nada, é necessário elaborar situações de uso através dele pelo sujeito. Nessa organização, as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem dos

objetos matemáticos, no entanto, elas devem ser modeladas de modo que ofereçam potencialidades e ajudem a mobilizar os conceitos e processos matemáticos na interação entre o sujeito e o instrumento tecnológico.

Destarte, direcionamos o nosso estudo em torno da modelagem do conhecimento para ambiente computacional, com o objetivo de criar um modelo praxeológico para uma análise de micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. As referências teóricas escolhidas nos forneceram elementos metodológicos e de análise, através da noção de praxeologia, definida por Chevallard (1999) em sua Teoria Antropológica do Didático, e com as etapas do modelo de processo de software educativo da Engenharia Didático-Informática (Tibúrcio, 2016; 2020).

## 2. Fundamentação teórico-metodológica

Na interação entre o aprendiz e o software é preciso considerar, sobretudo, a construção do conhecimento por meio do uso. Balacheff e Bellemain (2007, p. 38) afirmam que “o aprendiz interage com as representações através de artefatos e deve compor com eles e com as retroações que o sistema produz para resolver os problemas e efetuar tarefas”. Isso condiz com a classificação do micromundo, pois estão associados à resolução de problemas, em que as atividades e interações são elementos fundamentais para a aprendizagem e a construção do conhecimento. Nessas interações, o papel do professor é fundamental para controlar o processo de aprendizagem, seus resultados e o significado que os alunos possivelmente construirão.

Quanto às atividades, utilizamos a noção de praxeologia da Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999), para descrever a relação institucional com um objeto, que é modelada e remodelada por todas as tarefas que as pessoas que ocupam essa posição devem executar, por técnicas específicas, e que restringe a relação pessoal com o objeto do saber. Portanto, toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa  $t$  de um certo tipo  $T$ , por meio de uma técnica  $\tau$ , justificada por uma tecnologia  $\theta$ , que por sua vez é justificada por uma teoria  $\Theta$ , que Chevallard organiza em  $[T/\tau/\theta/\Theta]$  e nomeia de praxeologia ou organização praxeológica, sendo  $[T/\tau]$  o bloco da prática (*práxis*) e  $[\theta/\Theta]$  o bloco saber-fazer (*logos*).

A construção de um modelo praxeológico, à luz da TAD, permite agrupar diferentes praxeologias a serem ensinadas e ensináveis e serve para analisar as praxeologias aprendidas e situá-las em termos de praxeologias ensinadas (CHAACHOUA; FERRATON; DESMOULINS, 2013). Podemos julgar que a construção do nosso modelo irá permitir conhecer as praxeologias em torno do ensino do Teorema Fundamental, através da análise de livros didáticos e de atividades desenvolvidas pelos professores, e poder fazer uma análise de micromundo no sentido de questionar/apontar quais as características ele deve ter para resolver problemas envolvendo esse objeto matemático.

A TAD descreve uma atividade de estudo pela abordagem dos momentos didáticos, oferecendo elementos para que sejam criadas situações didáticas adequadas e com novas possibilidades. A análise das praxeologias será realizada por meio dessa abordagem, que não segue necessariamente uma ordem: 1) primeiro contato com a organização pelos tipos de tarefas  $T$ ; 2) exploração do tipo de tarefa  $T$  e elaboração de uma técnica  $\tau$ ; 3) construção inicial do bloco tecnológico-teórico  $[\theta/\Theta]$  referente à  $T$ ; 4)

retorno à técnica  $\tau$  para sua melhoria e à tecnologia  $\theta$ ; 5) institucionalização da organização matemática elaborada; 6) avaliação, aproximando-se da institucionalização.

O trabalho matemático envolvido na realização de uma determinada tarefa usando uma técnica específica varia de acordo com o sistema de objetos ostensivos e não ostensivos que essa técnica ativa. Os ostensivos têm forma material e sensível, como lápis, calculadora, etc., mas também são os gestos, palavras, diagramas, desenhos, gráficos. A característica principal é a capacidade de ser manipulado. Já os objetos não ostensivos, a rigor, não podem ser manipulados, apenas evocado através da manipulação de ostensivos a eles associados, por exemplo, as noções, conceitos, ideias, teoremas, etc. Logo, um não pode existir sem o outro.

Além disso, considerando a abordagem praxeológica do ponto de vista da informática, escolhemos utilizar a estrutura T4TEL (CHAACHOUA, 2020), com as noções de gerador de tipos de tarefas e de sistema de variáveis. Segundo Chaachoua (2020), um dos desafios do T4TEL é conceber um modelo que “permita descrever os componentes de uma praxeologia específica, dar conta das relações entre os elementos de uma praxeologia e descrever uma estruturação entre as diferentes praxeologias” (*ib.*), além de construir funções didáticas para produzir os diversos serviços de EIAH<sup>1</sup>, como diagnóstico, feedback, design de cenários de aprendizagem, indexação de recursos, etc.

Na TAD, a noção de tipo de tarefas é objeto primário. No T4TEL, um conjunto de tipos de tarefas define uma técnica, sendo que um tipo de tarefas  $T$  é constituído por um verbo de ação e um complemento. O gerador de tipo de tarefa é definido por um tipo de tarefas e o sistema de variáveis, ou seja:  $GT = [\text{verbo de ação, complemento fixo; sistema de variáveis}]$ . Por exemplo, consideremos o gerador de tipo de tarefa  $GT_i = [\text{calcular, integral definida; } V_1; V_2]$  onde  $V_1$  é o valor do limite inferior do intervalo de integração e  $V_2$  é o valor do limite superior do intervalo de integração. O verbo de ação caracteriza o tipo de tarefas, como “Calcular”; o complemento pode ser específico (com o sistema de variáveis e os valores que podem assumir) ou genérico (sem instanciação de variável). No exemplo dado, o complemento foi especificado como “Integral definida” e as variáveis são os números extremos de um intervalo real. A análise das praxeologias apresentada nos livros didáticos e constituídas pelos professores fornece evidências sobre as variáveis e seus possíveis valores, considerando inclusive os ostensivos.

Portanto, o modelo praxeológico que pretendemos construir é uma representação computacional da modelagem do conhecimento para um micromundo que deve permitir resolver problemas em torno do Teorema Fundamental. Para alcançar o objetivo pretendido, utilizamos como base metodológica uma adaptação do modelo de processo de desenvolvimento de software educativo da Engenharia Didático-Informática (EDI), como mostra o Quadro 1, que descreve as etapas de investigação.

Nas etapas de Especificação, Análises Prévias e Levantamento de Requisitos, buscamos na literatura elementos que pudessem responder os nossos questionamentos com base nas dimensões cognitiva, didática, epistemológica e informática, discutindo sobre o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo com uso de softwares e sobre as tipologias e características desses ambientes. Em seguida, categorizamos e descrevemos os requisitos referentes a cada uma das dimensões. Na etapa de Concepção e Análise a

---

<sup>1</sup> Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (Ambiente Informático para Aprendizagem Humana, tradução nossa).

Priori buscamos nos aprofundar na análise das praxeologias em torno dos objetos matemáticos envolvidos no ensino do Teorema Fundamental, por meio dos livros didáticos que são fontes do saber a ensinar e ensinado nas instituições de referência.

As etapas citadas servem de base para a criação do modelo praxeológico na etapa de Desenvolvimento e Experimentação. Nesta etapa também pretendemos mapear e analisar as praxeologias dos professores e para isso foi elaborado um dispositivo experimental. Todos os dados produzidos serão categorizados e constituirão o modelo praxeológico, fundamentando-se na abordagem T4TEL que se baseia na ontologia<sup>2</sup> para descrever as praxeologias.

**Quadro 1:** Modelo de processo de software educativo, de Tibúrcio (2016; 2020), adaptado ao desenvolvimento da nossa pesquisa.

| ETAPAS                           | DIMENSÕES   |   |   |   |
|----------------------------------|---|---|---|---|
|                                  | COGNITIVA   | DIDÁTICA  | EPISTEMOLÓGICA  | INFORMÁTICA   |
| ESPECIFICAÇÃO                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Quais são os problemas percebidos que o software poderá se apresentar como solução?</li> <li>- Quais conhecimentos se pretende abordar na utilização do software?</li> <li>- Considerando as relações entre os saberes delimitados, quais conceitos e definições devem estar presentes?</li> <li>- Qual será o diferencial da utilização desse software comparado a um ambiente papel e lápis?</li> </ul>                                      |   |   |   |
| ANÁLISES PRÉVIAS                 | - Existem indicações na literatura de como o estudante aprende?   | - Qual é o estado atual do ensino do conhecimento? Quais são as consequências desse ensino? | - Quais são os aspectos do conhecimento que podem dificultar e/ou facilitar a aprendizagem? | - Quais são as contribuições tecnológicas que o software deve conter para auxiliar na compreensão e ensino dos conhecimentos? |
| LEVANTAMENTO DE REQUISITOS       | Documentar os requisitos considerando as dimensões e respondendo: Como o ensino e a aprendizagem podem ser favorecidas? Como a compreensão dos saberes é auxiliada com o uso do software? Quais recursos e situações o software propõe para ajudar o usuário a compreender os conhecimentos? Quais funcionalidades existem em produtos da área? Quais são os possíveis diferenciais do software que se pretende desenvolver? O que o software trará de novo referente ao que já existe? |   |   |   |
| CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI     | Organização da praxeologia apresentada nos livros didáticos.  |   |   |   |
| DESENVOLVIMENTO E EXPERIMENTAÇÃO | Criação do modelo praxeológico e elaboração de um dispositivo experimental para investigação das praxeologias dos professores.  |   |   |   |
| ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO | Análise de micromundo para o ensino do TFC.   |   |   |   |

A etapa de Análise a Posteriori e Validação permitirá fazer uma análise de micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. Esta etapa permite descrever os tipos de problemas que o micromundo deverá resolver e cujas técnicas deverão ser validadas com o uso das suas ferramentas.

### 3. Resultados e Análises

As análises das pesquisas encontradas na literatura forneceram o embasamento para a categorização dos resultados, que resumimos a seguir.

<sup>2</sup> Em Ciência da Computação, uma ontologia é definida como a especificação explícita de uma conceituação (CHAACHOUA; FERRATON; DESMOULINS, 2013).

Na etapa de *Especificação*, descrevemos os conceitos relativos ao Teorema Fundamental do Cálculo, que historicamente foram construídos e culminaram no estudo do Cálculo como conhecemos atualmente, como: integral, derivada, variação, acumulação, continuidade e função. Buscamos também conhecer os tipos de software educativo para o ensino de Cálculo, destacando as características do micromundo como um software que permite abordar e resolver problemas de distintas classes, permitindo a interação entre os sujeitos e os objetos matemáticos por meio de suas ferramentas de construção, dinamismo, visualização e validação. Com as pesquisas que analisamos, identificamos como recursos de software que contribuem para a aprendizagem do TFC: representação e mudança de representação, construção de conceitos, construção de registros algébrico e gráfico, manipulação dinâmica e interativa e visualização.

As etapas de *Análises Prévias* e *Levantamento de Requisitos* foram realizadas a partir de uma busca na literatura das pesquisas que discutiam sobre o ensino e a aprendizagem do TFC, sob a ótica das dimensões didática, cognitiva, epistemológica e informática da EDI. De maneira geral, os resultados mostram que o ensino e a aprendizagem podem ser favorecidos através de: exploração de atividades e métodos didáticos que promovam a elaboração de hipóteses, conjecturas, investigação, abstração, intuição, generalização, síntese, descoberta e validação; desenvolvimento de atividades com tratamento na relação mútua entre as operações de integração e derivação; mais utilização e exploração do registro gráfico; atividades que promovam a mobilização e tratamento de pelo menos dois registros de representação; resolução de tarefas com interações entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo em conjunto com a visualização; exploração dos aspectos conceituais do teorema e interpretação geométrica das operações; interpretação do significado das representações gráfica e analítica.

Na compreensão dos saberes relativos ao Teorema Fundamental, o uso do software deve propor ao usuário: utilização de recursos visuais e dinâmicos; representação e coordenação de diferentes registros de representação; mobilização dos processos de intuição, descoberta e validação; criação de modelo para uma situação-problema, permitindo o acesso, a interação, a manipulação e a exploração de cognições; exploração da relação entre os objetos ostensivos e não ostensivos.

Na etapa de *Concepção e Análise a Priori*, realizamos uma análise praxeológica de três livros didáticos (LD), dentre os mais utilizados nos cursos de Cálculo das instituições brasileiras de ensino superior. Nessa análise, categorizamos 11 tipos de tarefas, sendo que o cálculo de integrais é o principal tipo nas praxeologias adotadas pelos autores. Em cada LD selecionamos a tarefa de maior ênfase para constituir a organização praxeológica em termos de tarefas, técnicas e justificativas tecnológico-teóricas. O Quadro 2 mostra essa organização relativa ao tipo de tarefa T2: Calcular o valor de uma integral definida do tipo  $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$ , em que  $g'(x) = f(x)$ .

**Quadro 2:** Organização Matemática das tarefas do tipo T2.

| <b>(T2) Calcular o valor de uma integral definida do tipo <math>\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)</math>, em que <math>g'(x) = f(x)</math></b> |   |   |
|--|---|---|
| <b>Tarefa</b>  | <b>Técnica</b>  | <b>Bloco Tecnológico-teórico</b>  |
| (t2) Calcule $\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx$ . (LEITHOLD, 1994, p. 349)   | (τ2) Determinar a primitiva $F$ de $f$ e calcular a $F(b) - F(a)$ . | A parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo afirma que se conhecermos uma primitiva $F$ de $f$ , então poderemos calcular |
| (t2) Calcular a integral $\int_0^\pi \cos x dx$ . (THOMAS, 2009, p. 393)   |   |   |

|   |   |  |
|---|---|--|
| (t2) Calcule $\int_3^6 \frac{dx}{x}$ . (STEWART, 2014, 355) | Consiste em derivar a função $F$ e depois integrar o resultado, retornando à função $F$ | $\int_a^b f(x)dx$ simplesmente subtraindo os valores de $F$ nas extremidades do intervalo $[a, b]$ . |
|---|---|--|

Consideramos que o estudo das organizações matemáticas envolve, principalmente, o bloco do saber-fazer (práxis), com a mobilização de ostensivos e não ostensivos que requerem a utilização de técnicas auxiliares, enquanto que o bloco tecnológico-teórico (logos) apresenta escassez na justificativa explícita do como fazer, exigindo o conhecimento e experiência prévia por parte dos estudantes.

A revisão de literatura e a análise praxeológica dos livros contribuíram para a categorização de requisitos conceituais para a criação do modelo praxeológico, que é a fase em que a pesquisa se encontra atualmente. Com base na abordagem dos momentos de estudo, descrita pela TAD, no primeiro momento examinamos a seguinte questão: Como otimizar a ideia conceitual do teorema fundamental como relação inversa entre derivada e integral? A questão apresentada lida com dois conceitos matemáticos distintos: derivada e integral. Ela pode ser modelada a partir de dois tipos de tarefas  $T$  que devem ser realizadas e estão relacionadas por meio do Teorema Fundamental do Cálculo: T1: Calcular a integral de uma função contínua  $f$  e depois derivar o resultado; e T2: Derivar a função primitiva  $F$  de  $f$  e depois integrar no intervalo  $[a, b]$  o resultado.

No segundo momento, selecionamos cinco tarefas  $t$  por estarem relacionadas aos tipos de tarefas T1 e T2. No contexto praxeológico, a realização das tarefas requeriam ao menos três subtarefas que compõem a técnica. A constituição do ambiente tecnológico-teórico foi realizada como o terceiro momento de estudo. No quarto momento de estudo elaboramos uma análise prévia para cada tarefa, como modo de desenvolver previamente uma técnica que, a qualquer momento, poderá ser aperfeiçoada. O quinto momento será dedicado a conhecer as praxeologias de alguns professores de Cálculo, produzidas através do dispositivo experimental que desenvolvemos. No sexto momento iremos confrontar as praxeologias dos professores investigados com as praxeologias constituídas das análises dos livros didáticos. Com isso, faremos as escolhas dos elementos que irão constituir o modelo praxeológico, tomando como base a abordagem T4TEL. No Quadro 3 iniciamos uma organização para o gerador de tipos de tarefas, descrevendo os verbos de ação, os complementos e o sistema de variáveis em torno do ensino do TFC.

**Quadro 3:** Organização para o gerador de tipos de tarefas.

| VERBO DE AÇÃO   | COMPLEMENTO FIXO       | VARIÁVEIS                          |
|-----------------|------------------------|------------------------------------|
| Calcular        | Integral de uma função | Tipos de funções                   |
| Integrar        | Derivada de uma função | 1ª ordem - 2ª ordem                |
| Derivar         | Área                   | Função - Reta - Intervalo          |
| Encontrar/Achar | Função                 | Intervalos - natureza do $n^\circ$ |
| Esboçar         | Gráfico                | Integral - Derivada - Função       |
| Mostrar         |                        | Verificar Continuidade             |

Na última etapa, de Análise a Posteriori e Validação, iremos fazer uma análise de micromundo para ensino do TFC com base no modelo praxeológico. A Figura 1 mostra a descrição didática que organizamos até agora e que será aperfeiçoada com outras variáveis. Nesta etapa iremos reunir os requisitos que foram levantados nas dimensões epistemológica, didática e cognitiva para integrá-los aos requisitos levantados na dimensão informática e implementar no modelo praxeológico. O resultado será uma

descrição das características que o micromundo deverá possuir para resolver problemas associados ao ensino do Teorema Fundamental.

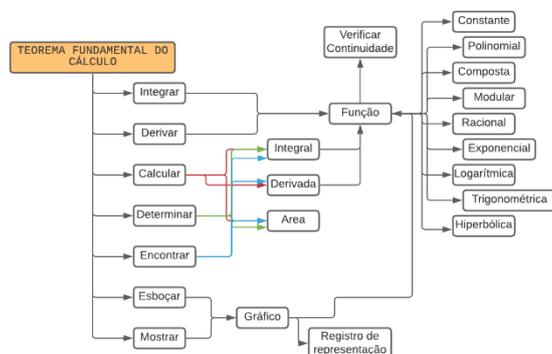


Figura 1. Descrição ontológica do modelo praxeológico.

#### 4. Considerações

O percurso metodológico que realizamos até agora nos permitiu compreender sobre os aspectos relativos às dimensões cognitiva, didática, epistemológica e informática acerca do ensino do Teorema Fundamental, analisar praxeologias presentes nos livros didáticos e categorizar alguns requisitos que um micromundo deve fornecer para a criação de situações didáticas variadas. Acreditamos que a criação do modelo praxeológico para a análise do micromundo pode contribuir para descrever outras organizações matemáticas a serem ensinadas, além de servir de referência para analisar as praxeologias aprendidas a partir dos tipos de tarefas que emergem dos micromundos, bem como poder conceber outros micromundos para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

#### 5. Referências

- BALACHEFF N.; BELLEMAIN, F. (2007) “Conhecimento, a Pedra Angular do Design de Tel”. *In: Revista Tópicos Educacionais*, vol. 17 (1-3). Recife: Ed. Universitária da UFPE, p. 31-59.
- BELLEMAIN, F. (2002) “O Paradigma Micromundo”, *In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA*. Anais... Rio de Janeiro: UFRJ, p. 51-63.
- CHAACHOUA, H. (2020) “T4TEL: Un cadre de référence pour la formalisation et l’extension du modèle praxéologique”. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 22, n. 4, p. 103-118.
- CHAACHOUA, H.; FERRATON, G.; DESMOULINS, C. (2013) Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. (Anais) IV<sup>e</sup> congrès international sur la TAD. Axe 2. L’analyse praxéologique comme outil de l’analyse et de l’ingénierie didactiques. Toulouse, 21-26 avril 2013.
- CHEVALLARD, Y. (1999) “L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2) 221–266.
- TIBÚRCIO, R.S. (2016) “Processo de Desenvolvimento de Software Educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função”, *Dissertação (Mestrado)*, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- TIBÚRCIO, R.S. (2020) “A Engenharia Didático-Informática: uma metodologia para a produção de software educativo”. *Tese (Doutorado)*, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.