

An Extension Approach for the Qiskit Library: Mapping Flexible Systems through Quantum Computation

Cecilia Botelho¹, Gabriel Ramires¹, Vinicius Peruzzi¹, Anderson Cruz²,
Helida Salles³, Giancarlo Lucca^{3,4}, Adenauer Yamim⁴, Renata Reiser⁴

¹ LUPS – Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – Pelotas, RS – Brazil

{cscbotelho, ugaramires, vgperuzzi}@inf.ufpel.edu.br

²IMD – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – Natal, RN – Brazil

anderson@imd.ufrn.br

³C3 – Universidade Federal do Rio Grande (FURG) – Rio Grande, RS – Brazil

helida@furg.br

⁴PPGC – Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – Pelotas, RS – Brazil

{adenauer, reiser}@inf.ufpel.edu.br

⁵PGEEC – Universidade Católica de Pelotas (UCPEL) – Pelotas, RS – Brazil

Abstract. *This article proposes an approach to emotion modeling, exploring the impact of Quantum Computing compared to Classical Computing. Using the case of the prisoner and the police as an example, we analyze how the two approaches behave to solve this dilemma. While Classical Computing follows a binary and deterministic logic, Quantum Computing offers the possibility of superposition and entanglement of states, allowing for a more comprehensive representation of the emotions involved in the scenario. Through the Qiskit library, we conduct simulations that demonstrate the differences in results obtained by the two approaches. This investigation highlights the potential of Quantum Computing in emotion modeling and indicates a promising direction for future research in this field.*

Resumo. *Este artigo propõe uma abordagem para a modelagem de emoções, explorando o impacto da Computação Quântica em comparação com a Computação Clássica. Utilizando o estudo de caso baseado no prisioneiro e policiais, analisamos como as duas abordagens se comportam na resolução desse dilema. Enquanto a Computação Clássica segue uma lógica binária e determinística, a Computação Quântica oferece a possibilidade de superposição e emaranhamento dos estados, permitindo uma representação mais abrangente das emoções envolvidas no cenário. Através da biblioteca Qiskit, realizamos simulações que demonstram as diferenças nos resultados obtidos pelas duas abordagens. Essa investigação destaca o potencial da Computação Quântica na modelagem de emoções e sinaliza uma direção promissora para futuras pesquisas nesse campo.*

1. Introdução

A computação quântica (CQ) e a lógica fuzzy (LF) são duas áreas de pesquisa que têm ganhado destaque em seus respectivos campos, devido à sua capacidade de mapear problemas complexos envolvendo incerteza e imprecisão. Enquanto a computação quântica se baseia na teoria da mecânica quântica para representar dados com propriedades relevantes (superposição e emaranhamento) e processar informações de forma paralela e exponencialmente mais rápida, a lógica fuzzy aborda a representação de conceitos imprecisos via manipulação de conjuntos fuzzy.

A CQ utiliza *qubits*, unidades básicas de informação quântica, que podem estar em estados de superposição e emaranhados, permitindo que múltiplas computações e operações de medida sejam realizadas simultaneamente. Essa característica proporciona um enorme potencial para resolver problemas conhecidamente complexos de forma mais eficiente do que os computadores clássicos.

Já a LF mapeia a incerteza e a imprecisão para conjuntos lógicos, permitindo a representação de conceitos que não são facilmente quantificáveis em valores binários. Em vez de considerar apenas os estados “verdadeiro” ou “falso”, a lógica fuzzy trabalha com graus de pertinência, o que possibilita a modelagem de incerteza e a tomada de decisões em situações onde haja grande hesitação de especialistas e/ou ambiguidade na expressão da linguagem natural.

Esta interação de áreas vem sendo buscada, e recentemente destacam-se trabalhos científicos como em [de Avila et al. 2019] na modelagem e representação de conectivos via extensão intuicionista da LF, em [Deng et al. 2021] buscando análise de emoções em robôs humanoides. Outras contribuições apontam para o uso da entropia na análise de sistemas de inferência baseados na abordagem quantum-neuro fuzzy em Inteligência Artificial (IA) [Lin et al. 2007] e ainda, observa-se o desenvolvimento de sistemas de classificação como foi apresentado em [Hou et al. 2022].

Neste trabalho, de carácter inovativo, exploramos a biblioteca Qiskit da IBM [IBM 2023] como uma ferramenta central para simulações da intensidade de emoções usando algoritmos quânticos. O Qiskit nos permite investigar como os circuitos quânticos podem ser aplicados para modelar e analisar situações do mundo real, considerando a incerteza e a imprecisão inerentes a essas situações.

Como parte deste estudo, modelamos um estudo de caso específico no qual foram construídos dois circuitos quânticos distintos. No primeiro caso, as primeiras entradas utilizaram portas controladas que não possuíam sobreposição de estados, representando um cenário de estados clássicos para o problema do policial e prisioneiros. Em contraste, no segundo caso, geramos sobreposições e emaranhamento entre os *qubits* para simular um ambiente quântico neste contexto.

Em seguida, comparamos os resultados obtidos nos dois casos, analisando a diferença de desempenho e a capacidade dos circuitos quânticos em lidar com a incerteza e a complexidade dos problemas modelados. Por fim, realizamos uma análise dos histogramas gerados a partir da simulação dos circuitos quânticos para identificar padrões e obter *insights* sobre as distribuições de probabilidade.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 discu-

timos os principais conceitos da Lógica Fuzzy (LF) e na Seção 3, aqueles relacionados à Computação Quântica. O mapeamento e simulação de emoções interpretadas pela LF em circuitos quânticos são apresentadas na Seção 4. Finalmente, as considerações finais e trabalhos futuros são reportados na Seção 5.

2. Conceitos da Lógica Fuzzy

Os conjuntos fuzzy, também conhecidos como conjuntos nebulosos ou difusos, são conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas. Eles foram introduzidos para lidar com problemas nos quais as transições entre classes devem ocorrer de forma suave. As propriedades e operações dos conjuntos fuzzy são obtidas a partir da generalização da teoria dos conjuntos clássicos, sendo esta última um caso particular da Teoria dos Conjuntos Fuzzy [Zadeh 1965]. E ainda, podemos considerar o contexto das extensões multi-valoradas da Lógica Fuzzy, como formalizado posteriormente em [Zadeh 1975].

A teoria dos conjuntos clássicos está baseada na função característica $f_A: U \rightarrow \{0, 1\}$, onde $f_A(x) = 1$ se $x \in A$, e $f_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Essa função associa a cada elemento $x \in U \neq \emptyset$ um valor no conjunto discreto $\{0, 1\}$.

As operações básicas sobre os conjuntos clássicos são união, intersecção e complemento e podem ser expressas através da função característica. A teoria dos conjuntos fuzzy está baseada em uma generalização da função característica para o intervalo $[0, 1]$.

Seja um conjunto universo $U \neq \emptyset$. Um conjunto fuzzy A em U é caracterizado pela função de pertinência $f_A: U \rightarrow [0, 1]$ onde, para cada $x \in U$, $f_A(x)$ indica o grau de pertinência de cada elemento x no conjunto fuzzy A .

Pode-se ainda descrever um conjunto fuzzy A em um universo U como um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento $x \in U$ está associado ao seu respectivo grau de pertinência $f_A(x) \in [0, 1]$, ou seja, $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in U\}$. Neste contexto, um conjunto fuzzy pode ser definido por n -uplas na abordagem lógica multi-valorada.

Sejam A e B conjuntos fuzzy em U representados pelas funções de pertinência $f_A, f_B: U \rightarrow [0, 1]$, respectivamente. Os conjuntos fuzzy definindo a união e intersecção entre A e B são, respectivamente, dados pelas expressões:

$$A \cup B = \{(x, f_{A \cup B}(x)) \mid x \in U\}, \text{ onde } f_{A \cup B}: U \rightarrow [0, 1], f_{A \cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$$

$$A \cap B = \{(x, f_{A \cap B}(x)) \mid x \in U\}, \text{ onde } f_{A \cap B}: U \rightarrow [0, 1], f_{A \cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}.$$

Os operadores $\max, \min: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ representam normas e conormas triangulares e podem ser substituídos por outras funções das correspondentes classes, de acordo com os estudos em [Klement and Navara 1999].

Além disso, de acordo com [Bustince et al. 2003], o conjunto fuzzy A' , expressando o complemento fuzzy de A em U , considerando a negação padrão, $N_S: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $N_S(x) = 1 - x$, está definido por:

$$A' = \{(x, f_{A'}(x)) \mid x \in U\}, \text{ onde } f_{A'}: U \rightarrow [0, 1], f_{A'}(x) = 1 - f_A(x).$$

3. Conceitos Básicos da Computação Quântica

Na CQ, o *qubit* é a unidade básica de informação, definido por um vetor de estado, unitário e bidimensional $\psi = (\alpha, \beta)^t$, genericamente descrito, na notação de Dirac [Nielsen and Chuang 2000], pela expressão $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Os coeficientes α e β são números complexos correspondentes às amplitudes dos respectivos estados, respeitando a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, garantindo que o vetor de estado do sistema, representado por $(\alpha, \beta)^t$ seja unitário. As amplitudes permitem representar, simultaneamente, estados distintos, configurando um estado de **superposição quântica**, característica que origina o fenômeno do paralelismo quântico.

O espaço de estados de um sistema quântico de múltiplos *qubits* é compreendido pelo produto tensorial do espaço de estados de seus sistemas componentes. Considerando um sistema quântico de dois *qubits*, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\varphi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, o espaço de estados é composto pelo produto tensor $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$, ou seja $\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$.

A mudança de estado em um sistema quântico é feita via **transformações quânticas unitárias**, representadas por matrizes quadradas ortonormalizadas de ordem 2^N , sendo N a quantidade de *qubits* da transformação. Na aplicação da porta unitária $H \otimes H$ sobre um estado clássico $|01\rangle$, gera um estado de sobreposição matricialmente descrito por:

$$H \otimes H|01\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} |01\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

A transformação bidimensional da porta CNOT (com um controle e um alvo), refere-se ao produto tensor entre *Pauli X* e o operador *Id* descrita a seguir:

$$CNOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

A transformação tridimensional da porta *Toffoli* considera como entrada 3 *qubits* (dois controles e um alvo). A representação e semântica de *T* estão ilustradas logo a seguir:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, fica evidente o incremento exponencial referente a complexidade espacial dos algoritmos quânticos. Um *qubit* a mais, infere um incremento de 48 posições na expressão matricial de um operador, passando de 16 (bidimensional) para 64 (tridimensional). Esta complexa situação justifica plenamente a aplicação de simuladores para auxiliar nas interpretações e instanciações dos algoritmos computados.

As amplitudes de estados quânticos multi-dimensionais são regidas pela condição de normalização, que nem sempre é obtida pelo produto tensor dos correspondentes estados dos *qubits* (estados básicos da base computacional). Neste caso, tem-se um **estado emaranhado** [Nielsen and Chuang 2000].

A seguir, apresentamos uma caracterização de estados emaranhados. Considere os estados clássicos $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$, como vetores básicos de um estado quântico bidimensional, para definir os estados emaranhados:

- (i) $|s_\alpha\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|11\rangle$ é uma combinação linear sobre estados clássicos $\{|00\rangle, |11\rangle\}$, onde α_1, α_2 são amplitudes complexas e $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$; e, analogamente,
- (ii) $|s_\beta\rangle = \beta_1|01\rangle + \beta_2|10\rangle$ é outra combinação linear sobre estados clássicos $\{|01\rangle, |10\rangle\}$, onde β_1, β_2 são amplitudes complexas e $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$.

Observe ainda que a composição de um estado emaranhado com outro estado gera um novo emaranhamento, neste caso, $|s_\gamma\rangle$ dado pela expressão:

$$\begin{aligned} |s_\gamma\rangle &= |s_\alpha\rangle \otimes |s_\beta\rangle = (\alpha_1|00\rangle + \alpha_2|11\rangle) \otimes \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(|000\rangle + |001\rangle) + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2(|110\rangle + |111\rangle)). \end{aligned}$$

No emaranhamento, os *qubits* emaranhados estão entrelaçados de tal forma que suas propriedades individuais não podem ser descritas independentemente. Quando um *qubit* emaranhado sofre uma medição e seu estado é determinado, o estado dos outros *qubits* emaranhados é instantaneamente afetado, independentemente da distância entre eles. Isso é conhecido como “ação fantasmagórica à distância”.

A **operação de medida** em um estado corrente de um sistema quântico está definida por um conjunto de projeções lineares, M_m , atuando sobre estados quânticos. Se o estado está definido por $|\psi\rangle$, após a medida, a probabilidade de saída será dada por [Nielsen and Chuang 2000]:

$$p(|\psi\rangle) = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}} \quad (2)$$

As operações de medida satisfazem a relação de completude $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$. Para um sistema quântico unidimensional, tem-se os operadores:

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_0^\dagger; \\ M_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1^\dagger. \end{aligned}$$

E, para um *qubit* $|\psi\rangle$, com $\alpha, \beta \neq 0$, tem-se as probabilidades de observar $|0\rangle$ e $|1\rangle$ que são, respectivamente, dadas por:

- $p(|0\rangle) = \langle\phi|M_0^\dagger M_0|\phi\rangle = \langle\phi|M_0|\phi\rangle = |\alpha|^2$.
- $p(|1\rangle) = \langle\phi|M_1^\dagger M_1|\phi\rangle = \langle\phi|M_1|\phi\rangle = |\beta|^2$.

Portanto, após a medida do estado $|\psi\rangle$ tem-se $|\alpha|^2$ como probabilidade de estar no estado clássico $|0\rangle$; e $|\beta|^2$ como probabilidade de estar no outro estado, $|1\rangle$.

3.1. Modelo de Circuitos Quânticos

O modelo de circuitos para a Computação Quântica (CQ) constitui uma linguagem universal para a descrição de computadores quânticos em aplicações práticas e na análise de algoritmos quânticos atuais. Seguindo a notação de Dirac [Nielsen and Chuang 2000], um *qubit* é representado por coeficientes complexos c_0 e c_1 , onde $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$. O funcionamento dos circuitos quânticos são descritos pelas seguintes convenções:

- Entrada: é representada por um registrador de múltiplos *qubits*, geralmente nos estados clássicos $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.
- Linhas horizontais: indicam a evolução temporal da transferência de dados (*qubits*) entre as portas lógicas, ocorrendo da esquerda para a direita.
- Linhas verticais: representam a atuação síncrona em dois ou mais *qubits*.
- Controle: é representado por um círculo no *qubit* de controle, indicando a aplicação de uma operação controlada.
- Portas lógicas: são representadas por caixas contendo uma letra de identificação, representando diferentes operações lógicas.
- Medida: ocorre geralmente na saída do circuito, alterando o estado do *qubit* e retornando 0 ou 1 com uma distribuição de probabilidade associada.
- Estados ϕ_i : são representados como transformações em instantes de tempo (t_i).

Essas convenções permitem descrever e visualizar a evolução dos *qubits* e as operações realizadas em um circuito quântico. No próximo tópico, exploraremos a modelagem de conjuntos fuzzy utilizando circuitos quânticos e como essas convenções podem ser adaptadas para esse contexto.

4. Mapeamento e Simulação de Emoções Fuzzy em Circuitos Quânticos

Nesta seção, aplicaremos os conceitos discutidos na Seções 2 e 3 para simular emoções via operadores da CQ usando o modelo de circuitos quânticos, utilizando um estudo de caso envolvendo policiais e prisioneiro. Exploraremos os princípios da CQ, como sobreposição e emaranhamento, para modelar e analisar emoções complexas que envolvem interpretações da incerteza pela aplicação da lógica fuzzy.

Seja U um universo com cardinalidade N ($|U| = N$) definida no conjunto dos primeiros números naturais, $N = 1, 2, \dots, N$. Para cada elemento x_i , podemos associar seu grau de pertinência $f_A(x_i)$ e de não pertinência $1 - f_A(x_i)$ a um registrador quântico uni-dimensional obtido a partir da representação do estado quântico (*1-qubit*) dado por:

$$|S_{f_A}\rangle = [\sqrt{f_A(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - f_A(x_i)}|0\rangle]$$

Assim, um estado quântico multidimensional (*n-qubits*) representa todos os x_i elementos, aplicando o produto tensorial. Seja $U \neq \emptyset$, $|U| = N$ e seja A um CF definido pela função de pertinência $f_A: U \rightarrow [0, 1]$. Para cada elemento $x_i \in U$, define-se um estado fuzzy multidimensional dado pela expressão:

$$|S_{f_A}\rangle = \bigotimes_{1 \leq i \leq N} [\sqrt{f_A(x_i)}|1\rangle + \sqrt{1 - f_A(x_i)}|0\rangle]$$

Para reduzir a notação, indicamos $f_A(x_i)$ por $f(i)$ quando o conjunto A está definido a partir da função f_A . Neste contexto, cada elemento x_i passa a ser representado pelo seu índice i em U , tal que $1 \leq i \leq N$ sempre que $|U| = N$.

Exploraremos as correlações emocionais geradas pelos estados e operadores quânticos, destacando as diferenças em relação às correlações clássicas. Ademais, discutiremos a importância da superposição e do emaranhamento na representação e dinâmica das emoções nesse contexto quântico. Além disso, abordaremos a implementação dos circuitos quânticos utilizando o Qiskit, uma biblioteca do Python. O Qiskit nos permite projetar, simular e executar circuitos quânticos.

4.1. Estudo de Caso: Interatividade entre Policiais e Prisioneiro

O problema dos dois policiais e um prisioneiro (PP-P) é um famoso dilema da teoria dos jogos [Nowak and May 1993] que exemplifica situações em que dois indivíduos podem se beneficiar da cooperação, mas também têm a tentação de agir em seu próprio interesse. Em nosso exemplo, os conjuntos fuzzy representam as diferentes estratégias adotadas por cada prisioneiro, e o circuito quântico é usado para modelar a evolução dessas estratégias.

4.1.1. Modelagem e Interpretação da Interatividade entre Policiais e Prisioneiro

A seguir, temos a modelagem e a interpretação de interação entre os agentes estendendo resultados dados em [Raghuvanshi and Perkowski 2010]. A Figura 1 apresenta a primeira modelagem, representada no circuito gerado na interface gráfica do Qiskit.

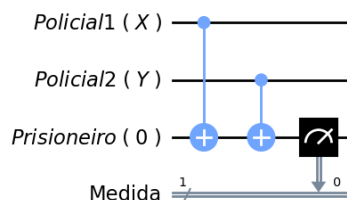


Figura 1. Modelagem do Problema PP-P via Estados Clássicos

Verifica-se que a evolução temporal é descrita em quatro unidades de tempo antes de executar a operação de medida no circuito. A complexidade espacial é igual a três *qubits*, sendo um *qubit* de controle e onde ocorre a operação de medida. Analisando o comportamento das possíveis possibilidades, os estados estão descritos na Tabela 1.

Tabela 1. Evolução temporal do comportamento dos policiais e prisioneiro

	S_0	S_1	S_2	Interpretação do Comportamento
1	$ 100\rangle$	$ 100\rangle$	$ 101\rangle$	$p=1, S_f = 101\rangle$ Prisioneiro colabora
2	$ 110\rangle$	$ 111\rangle$	$ 110\rangle$	$p=1, S_f = 110\rangle$ Prisioneiro não colabora
3	$ 010\rangle$	$ 011\rangle$	$ 011\rangle$	$p=1, S_f = 011\rangle$ Prisioneiro colabora
4	$ 000\rangle$	$ 000\rangle$	$ 000\rangle$	$p=1, S_f = 000\rangle$ Prisioneiro não colabora

Desta análise, conclui-se que o prisioneiro colabora sempre que o humor dos policiais difere. Se ambos policiais são muito amigáveis ou se ambos estão muito irritados, modelados por registradores clássicos na interpretação final, como detalhado logo a seguir:

1. A medida do terceiro *qubit* em $|1\rangle$ retorna o estado $S_f = |101\rangle$, com probabilidade $p = 1$ (100%) de que o prisioneiro colabora, pois os dois primeiros *qubits* tem valores não-coincidentes; ou ainda
2. A medida do terceiro *qubit* em $|0\rangle$ retorna o estado $S_f = |110\rangle$, com probabilidade $p = 1$ (100%) de que o prisioneiro não colabora, pois os dois primeiros *qubits* tem valores coincidentes em $|1\rangle$;
3. A medida do terceiro *qubit* em $|1\rangle$ retorna o estado $S_f = |011\rangle$, com probabilidade $p = 1$ (100%) de que o prisioneiro não-colabora, pois os dois primeiros *qubits* tem valores coincidentes em $|0\rangle$; e,
4. A medida do terceiro *qubit* em $|0\rangle$ retorna o estado $S_f = |000\rangle$, com probabilidade $p = 1$ (100%) de que o prisioneiro não colabora, pois os dois primeiros *qubits* tem valores coincidentes em $|0\rangle$;

E, sempre que o terceiro registrador muda de $|0\rangle$ para $|1\rangle$ tem-se a colaboração do prisioneiro, pois os policiais tem comportamento contrários, para a variável “irritação”.

No próximo circuito, apresentado na Figura 2, tem-se uma sobreposição aplicada ao segundo *qubit*, interpretando um estado fuzzy para um dos policiais. Ou seja, para o policial (X) tem-se os seguintes graus de pertinência $f_A(x) = 0.5$ e $f_B(x) = 0.5$. Neste contexto, para a variável de entrada “irritação”, A é o conjunto fuzzy que modela o termo linguístico “menos” irritação e B é o conjunto fuzzy que modela o termo linguístico “mais” irritação. Assim, reinterpretemos o comportamento de aceitação (colaboração) pelo prisioneiro representado sempre pelo terceiro registrador em $|1\rangle$.

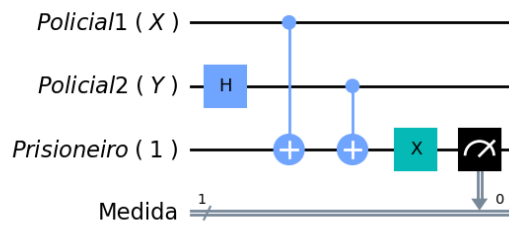


Figura 2. Modelagem para o Problema PP-P em Sobreposição e Emaranhamento

Tabela 2. Evolução temporal do comportamento dos agentes

N	S ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
1	$ 011\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (011\rangle + 001\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (010\rangle + 001\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (010\rangle + 001\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (011\rangle + 000\rangle)$
2	$ 111\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (111\rangle + 101\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (010\rangle + 101\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (010\rangle + 100\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (011\rangle + 101\rangle)$
3	$ 101\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (101\rangle + 111\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (101\rangle + 110\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (100\rangle + 111\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (101\rangle + 110\rangle)$
4	$ 001\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (001\rangle + 011\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (001\rangle + 010\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (001\rangle + 010\rangle)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (000\rangle + 011\rangle)$

A Tabela 2 apresenta um resumo da evolução dos estados neste segundo circuito. Ao analisar os resultados na quarta coluna, tem-se:

1. A medida do estado $\frac{\sqrt{2}}{2} (|011\rangle + |000\rangle)$, no terceiro *qubit* em $|1\rangle$, resulta no estado $|011\rangle$ com probabilidade $p = 50\%$, modelando o comportamento de colaboração quando o humor dos policiais é contraditório. E, no caso da medida no terceiro

- qubit* em $|0\rangle$, resulta em um estado $|000\rangle$ com probabilidade $p = 50\%$ para não colaboração do prisioneiro, pois ambos policiais são amáveis (pouco irritados).
2. A medida do estado $\frac{\sqrt{2}}{2}(|011\rangle + |101\rangle)$, no terceiro *qubit* em $|1\rangle$, resulta no estado $\frac{\sqrt{2}}{2}(|011\rangle + |101\rangle)$ com probabilidade $p = 100\%$, modelando a colaboração quando o humor dos policiais é contraditório em ambos estados básicos.
 3. A medida do estado $\frac{\sqrt{2}}{2}(|101\rangle + |110\rangle)$, no terceiro *qubit* em $|1\rangle$, resulta no estado $|101\rangle$ com probabilidade $p = 50\%$, modelando o comportamento de colaboração pois o humor dos policiais é contraditório. E, no caso da medida no terceiro *qubit* em $|0\rangle$, resulta em um estado $|100\rangle$ com probabilidade $p = 50\%$ para colaboração do prisioneiro, pois os policiais tem humor contraditório.
 4. A medida do estado $\frac{\sqrt{2}}{2}(|000\rangle + |011\rangle)$, no terceiro *qubit* em $|1\rangle$, resulta no estado $|011\rangle$ com probabilidade $p = 50\%$, modelando o comportamento de colaboração do prisioneiro quando o humor dos policiais é contraditório. E, no caso da medida no terceiro *qubit* em $|0\rangle$, resulta em um estado $|000\rangle$ com probabilidade $p = 50\%$ para não colaboração do prisioneiro, pois ambos policiais estão muito irritados.

Ademais, para os quatro estados finais (S_4) da Tabela 2 temos sempre dois *qubits* emaranhados e um terceiro com valor constante. Assim, a medida de um dos *qubits* emaranhados já mostra o comportamento dos outros dois *qubits*. Tal comportamento decorrente da sobreposição e emaranhamento repete-se na análise das demais possibilidades.

Por fim, ressaltamos que nesta modelagem interpretamos que a pertinência dos policiais é de 0.5 em ambos os conjuntos fuzzy, modelando “Policiais Amáveis” e “Policiais Irritados”. Estas pertinências são interpretações da aplicação da porta Hadamard H . Outras portas poderiam gerar novas interpretações e distribuições probabilísticas.

4.1.2. Implementação via Qiskit da Interatividade entre Policiais e Prisioneiro

Nesta seção descrevemos a implementação da dinâmica emocional entre dois policial e um prisioneiro usando o Qiskit, possibilitando uma representação precisa e intuitiva desse sistema. No circuito quântico, os três *qubits* são inicializados, sendo o terceiro com valor clássico $|0\rangle$, por padrão, no primeiro circuito. Aplicamos a porta Hadamard aos dois primeiros *qubits* gerando um estado de superposição que representa todas as estratégias possíveis que cada policial pode adotar. Em seguida, uma porta CNOT é aplicada com o controle no *qubit* 1, $|X\rangle$, e o alvo no *qubit* 3 $|0\rangle$, e uma segunda CNOT é aplicada com o controle no *qubit* 2 $|Y\rangle$ e o alvo no *qubit* 3 ($|Y\rangle$).

Elas são aplicadas para representar a interação entre os prisioneiros e a evolução de suas estratégias. O estado final dos *qubits*, então, representa o resultado, fornecendo um quadro completo das possíveis estratégias e resultados. Nesse contexto, interpretamos $|1\rangle$ como o policial bem-humorado e $|0\rangle$ como o policial mau-humorado.

Usamos os dois primeiros *qubits* para representar os dois policiais e o terceiro para representar o prisioneiro. Ao aplicarmos a porta Hadamard, colocamos os dois primeiros *qubits* em sobreposição, mostrando que há 50% de chance do policial estar bem-humorado e 50% do policial estar mau-humorado. Logo após, aplicamos a porta CNOT, a qual cria um emaranhamento entre os *qubits* do policial e do prisioneiro. Esta porta atua de tal forma que se o policial estiver bem-humorado (estado $|1\rangle$), o comportamento do prisio-

neiro será invertido. Por outro lado, se o policial estiver mau-humorado (estado $|0\rangle$), o comportamento do prisioneiro permanecerá inalterado. A Figura 2 apresenta o circuito correspondente a essa interação, onde podemos compreender a estrutura e a lógica do circuito, incluindo as portas quânticas e suas interconexões.

4.1.3. Histograma do Caso da Interatividade Policial e Prisioneiro

Durante a simulação do circuito quântico, realizamos medições múltiplas para obter informações mais precisas sobre as emoções e interações do prisioneiro e dos policiais. Na Figura 3, apresentamos um histograma dos resultados das simulações, evidenciando essa complexa interação.

Os *qubits* do circuito quântico representam os estados emocionais dos policiais e do prisioneiro. A superposição criada pela porta Hadamard simboliza o estado emocional incerto dos policiais, enquanto o emaranhamento induzido pela porta CNOT representa a correlação entre o humor dos policiais e o comportamento do prisioneiro.

Com base em 100.000 execuções da simulação do circuito, os resultados mostraram uma distribuição quase idêntica dentre os estados, com 49886 ocorrências do estado $|0\rangle$ e 50114 ocorrências do estado $|1\rangle$. Isso ilustra a dinâmica equilibrada do sistema e a igual probabilidade de o policial estar em um bom ou mau humor, impactando diretamente o comportamento do prisioneiro.

Esta distribuição dos resultados é uma consequência direta da superposição dos estados emocionais do policial, gerada pela porta Hadamard. Tal equilíbrio sugere que, apesar das circunstâncias incertas, o comportamento do prisioneiro mostrou-se altamente sensível ao humor do policial, resultando em uma mudança comportamental em quase metade das vezes.

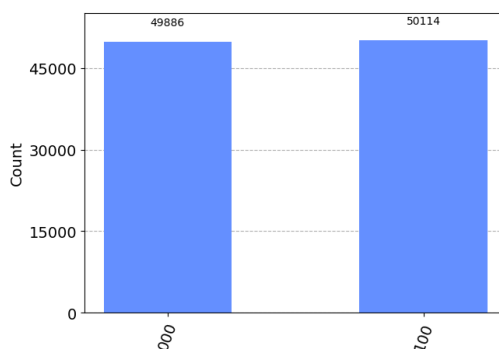


Figura 3. Histograma do caso da interatividade entre policial e prisioneiro

4.1.4. Código do Circuito do Caso da Interatividade Policial e Prisioneiro

Para criação do circuito apresentado para o dilema do prisioneiro, utilizamos a biblioteca IBM Qiskit [IBM 2023], inicializando um circuito quântico com três *qubits*. Aplicamos a porta de Hadamard ao *qubit* 1 (segundo policial) para criar um estado de superposição, e usamos duas portas CNOT para emaranhar os estados dos policiais e do

```

1      from qiskit import QuantumRegister, ClassicalRegister,
        QuantumCircuit, execute, Aer
2 from qiskit.visualization import plot_histogram
3
4 Policial1 = QuantumRegister(1, 'Policial1_(X)')
5 Policial2 = QuantumRegister(1, 'Policial2_(Y)')
6 Prisioneiro = QuantumRegister(1, 'Prisioneiro_(1)')
7
8 medida = ClassicalRegister(1, 'Medida')
9
10 circuit = QuantumCircuit(Policial1, Policial2, Prisioneiro, medida)
11
12 circuit.h(Policial2)
13 circuit.cx(Policial1, Prisioneiro)
14 circuit.cx(Policial2, Prisioneiro)
15 circuit.x(Prisioneiro)
16 circuit.measure(Prisioneiro, medida)
17
18 circuit.draw(output='mpl')
19
20 simulator = Aer.get_backend('qasm_simulator')
21 result = execute(circuit, backend=simulator, shots = 100000).result()
22 counts = result.get_counts()
23 print(counts, '\n')
24 plot_histogram(counts)

```

Figura 4. Código de geração do circuito em Python usando a Biblioteca Qiskit

prisioneiro. As medições são realizadas no *qubit* 3 (prisioneiro). O código na Figura 4 é executado 100.000 vezes para obter uma distribuição estatística dos resultados, que é visualizada através do histograma apresentado na Figura 3.

5. Conclusão

Nesta pesquisa, apresentamos um estudo no qual modelamos diferentes cenários utilizando a biblioteca IBM Qiskit. No primeiro cenário, utilizamos portas controladas que não possuíam sobreposição de estados, representando um ambiente clássico. Em seguida, num cenário envolvendo conceitos da mecânica quântica, geramos sobreposições e emaranhamento entre os *qubits* para simular um ambiente quântico. Comparamos os resultados obtidos nos dois casos, buscando compreender as diferenças e as contribuições fornecidas pela computação quântica.

Através da análise dos histogramas gerados a partir da simulação dos circuitos quânticos, pudemos observar padrões distintos nas distribuições de probabilidade. No caso clássico, os resultados estavam mais concentrados em estados específicos. Por sua vez, no caso quântico, observamos uma maior dispersão das probabilidades, refletindo a superposição e o emaranhamento dos *qubits*.

Essa comparação entre os dois cenários nos permitiu analisar como a computação quântica pode oferecer resultados distintos e mais complexos em relação à computação clássica. Os histogramas forneceram *insights* visuais valiosos, permitindo-nos identificar as diferentes distribuições de probabilidade e compreender as implicações práticas de

utilizar a computação quântica para modelar problemas do mundo real.

Esses resultados nos motivam a prosseguir com outras formas de interpretação e análise, explorando abordagens adicionais, além da lógica fuzzy, a fim de uma compreensão mais profunda e precisa das informações capturadas pelos circuitos quânticos. Novas contribuições podem ser prospectadas, com aplicação dos formalismos e fundamentos na área de *quantum-fuzzy* que prevê o uso dessas duas grandes áreas em sistemas híbridos, como por exemplo, a modelagem de interações em robótica [Raghuvanshi and Perkowski 2010].

Agradecimentos

Os autores agradecem as seguintes agências de fomento: CAPES, CNPq (309160/2019-7; 311429/2020-3), PqG/FAPERGS (21/2551-0002057-1) e FAPERGS/CNPq PRONEX (16/2551-0000488-9).

Referências

- Bustince, H., Burillo, P., and Soria, F. (2003). Automorphisms, negations and implication operators. *Fuzzy Sets Syst.*, 134(2):209–229.
- de Avila, A. B., Reiser, R., Pilla, M. L., and Yamin, A. C. (2019). Interpreting Xor intuitionistic fuzzy connectives from quantum fuzzy computing. In Guervós, J. J. M., Garibaldi, J. M., Linares-Barranco, A., Madani, K., and Warwick, K., editors, *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Computational Intelligence, IJCCI 2019, Vienna, Austria, September 17-19, 2019*, pages 288–295. ScitePress.
- Deng, R., Huang, Y., and Perkowski, M. A. (2021). Quantum motions and emotions for a humanoid robot actor. In *51st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, ISMVL 2021, Nur-Sultan, Kazakhstan, May 25-27, 2021*, pages 207–214. IEEE.
- Hou, M., Zhang, S., and Xia, J. (2022). Quantum fuzzy k-means algorithm based on fuzzy theory. In Sun, X., Zhang, X., Xia, Z., and Bertino, E., editors, *Artificial Intelligence and Security - 8th International Conference, ICAIS 2022, Qinghai, China, July 15-20, 2022, Proceedings, Part I*, volume 13338 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 348–356. Springer.
- IBM (2023). Qiskit. Disponível em: <https://qiskit.org/>. Acesso em: 03 de julho 2023.
- Klement, E. P. and Navara, M. (1999). A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 101(2):241–251.
- Lin, C.-J., Chung, I.-F., and Chen, C.-H. (2007). An entropy-based quantum neuro-fuzzy inference system for classification applications. *Neurocomputing (Amsterdam)*, 70(13):2502–2516.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.
- Nowak, M. A. and May, R. M. (1993). The spatial dilemmas of evolution. *International Journal of bifurcation and chaos*, 3(01):35–78.

Raghuvanshi, A. and Perkowski, M. (2010). Fuzzy quantum circuits to model emotional behaviors of humanoid robots. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 1–8.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control.*, 8(3):338–353.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I. *Information Sciences*, 8:199–250.