Model-Based Reasoning under Bounded Parameter Uncertainty: Polynomial-Chaos Robustness of Normative Power-Quality Verdicts

Douglas de Tarso da Silva[1], **Eduardo Crestana Guardia**[1], **Roberto Akira Yamachita**[1], **Gabriel Antônio Fanelli de Souza**[1]

[1]Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE)
Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) – Itajubá, MG – Brasil

eng.douglas.tarso.dts@outlook.com, eduardo.guardia@unifei.edu.br

akira@unifei.edu.br, fanelli@unifei.edu.br

Abstract. *Power-quality threshold assessments based only on nominal model parameters can miss changes within declared parameter bounds. We cast this model-level comparison as model-based reasoning under bounded uncertainty: an explicit physical model, deterministic computation over polynomial nodes, and a threshold decision that carries a quantified model margin. A non-intrusive Chebyshev tensor-collocation scheme, drawn from polynomial-chaos machinery, reasons over an explicit series-RLC grid model, propagating bounded uncertainty to the total harmonic distortion and to the declared threshold boundary — bounded-uncertainty envelope, model margin, normalized local-sensitivity impact ranking, and threshold-pass probability under declared distributions. Model explicitness lets us verify per-axis monotonicity and compute an exact vertex reference. In a controlled boundary case, the nominal model output lies 0.47 percentage points below the IEEE 519 threshold, yet the exact worst case exceeds it by 0.66 pp, while the exact maximum remains below the PRODIST 10% threshold. The deterministic order-7 grid uses 512 model evaluations; probabilities are estimated separately with 50,000 Monte Carlo samples. Two sweeps quantify measured failure modes: Chebyshev–Gauss grids underestimate the worst case along a verified scaling law* $u_N \approx 1.565\,(N{+}1)^{-2}$ *pp (0.36 pp at order 1, still 0.006 pp at order 15), providing a case-specific refinement diagnostic, not a certificate; and threshold-pass probability spans 87.7–98.4% under identical bounds, while the envelope is distribution-free. Reproduction drivers regenerate the deterministic values, and the new stochastic sweeps use fixed seeds.*

Resumo. *Comparações com limiares de QEE baseadas apenas em parâmetros nominais podem não capturar mudanças dentro de faixas paramétricas declaradas. Tratamos essa comparação no nível do modelo como raciocínio baseado em modelos sob incerteza limitada: um modelo físico explícito, computação determinística em nós polinomiais e uma decisão de limiar com margem do modelo quantificada. Um esquema não intrusivo de colocação tensorial de Chebyshev, derivado da maquinaria de caos polinomial, raciocina sobre um*

modelo RLC série explícito da rede, propagando incerteza limitada até a distorção harmônica total e até a fronteira declarada — envelope sob limites declarados, margem, ranking *de impacto local normalizado e probabilidade de ficar abaixo do limiar sob distribuições declaradas. A explicitude permite verificar a monotonia por eixo e computar uma referência exata por vértices. No caso de fronteira controlado, a saída nominal fica* $0{,}47$ *ponto percentual abaixo do limiar IEEE 519, mas o pior caso exato o excede em* $0{,}66$ *pp; o máximo exato permanece abaixo do limiar PRODIST de* 10%*. A grade determinística de ordem 7 usa 512 avaliações; as probabilidades são estimadas separadamente com* $50\,000$ *amostras de Monte Carlo. Varreduras quantificam dois modos de falha medidos: grades de Chebyshev–Gauss subestimam o pior caso segundo a lei de escala verificada* $u_N \approx 1{,}565\,(N{+}1)^{-2}$ *pp (*$0{,}36$ *na ordem 1; ainda* $0{,}006$ *na ordem 15), fornecendo um diagnóstico de refinamento específico deste caso, não um certificado; e a probabilidade de ficar abaixo do limiar varia de* $87{,}7\%$ *a* $98{,}4\%$ *sob os mesmos limites, enquanto o envelope independe da distribuição. Os valores determinísticos são regenerados por* drivers*; as novas varreduras estocásticas usam sementes fixas.*

1. Introdução

Este artigo trata a comparação de uma saída de modelo com limiares normativos como *raciocínio baseado em modelos* sob incerteza limitada: modelo físico explícito, computação em nós de Chebyshev e margem quantificada. O domínio é a qualidade de energia elétrica (QEE), e o exemplo central é a distorção harmônica total de tensão (THD), confrontada com o limite de 8% do IEEE Std 519 no PCC até 1 kV [IEEE 2022] e com o limite de 10% do Módulo 8 do PRODIST para o nível de baixa tensão [ANEEL 2025]. Essa comparação é feita no modelo controlado e não adjudica a conformidade de uma instalação. Uma análise restrita aos *valores nominais* de um modelo de rede — impedância de curto-circuito, parâmetros de filtro, carga — pode ocultar a sensibilidade da decisão. Neste estudo atribuímos faixas limitadas e declaradas aos três parâmetros do caso controlado; não pressupomos que esses limites sejam conhecidos para toda instalação. Fixamos os limiares e investigamos a inversão da classificação do modelo quando apenas os parâmetros variam dentro dessas faixas.

A classificação, aqui, não é aprendida de dados nem derivada de regras associativas, e sim computada sobre um modelo físico explícito da rede — um equivalente série RLC com indicador de THD — na tradição, em IA, do diagnóstico a partir de primeiros princípios [Reiter 1987, de Kleer and Williams 1987]. Dado um vetor de parâmetros incertos $p \in [p_{\min}, p_{\max}]$, propagamos a incerteza até o indicador $y(p)$ e até a fronteira de limiar $y = \tau$, obtendo: (i) o envelope de variação de y; (ii) a margem de pior caso ao limite; (iii) o *ranking* do impacto local normalizado dos parâmetros que mais ameaçam exceder o limiar; e (iv) a probabilidade de ficar abaixo do limiar sob distribuições alternativas dentro dos mesmos limites. O caminho unidimensional forma uma expansão em base de Chebyshev, na linhagem do caos polinomial generalizado [Wiener 1938, Xiu and Karniadakis 2002]; no experimento multiparâmetro, a implementação usa os nós como grade de colocação e não forma coeficientes multivariados. A grade determinística estima o envelope com poucas avaliações; as probabilidades são calculadas separadamente por Monte Carlo. A explicitude do modelo é o que torna o

raciocínio auditável: a monotonia por eixo pode ser *verificada*, uma referência exata por vértices pode ser computada, e o impacto de sensibilidade normalizado tem explicação mecanicista — propriedades não disponíveis diretamente e que exigem verificação adicional em modelos aprendidos.

Essa escolha dialoga com a agenda de IA física e confiável: em vez de um regressor inteiramente caixa-preta, raciocinamos sobre o modelo simbólico/polinomial. Modelos aprendidos podem incorporar restrições físicas, como redes físico-informadas [Raissi et al. 2019], ou estimar o estado harmônico [Mack et al. 2024], mas isso não fornece automaticamente monotonia ou cotas verificadas. Aqui a escolha explícita favorece uma derivação inspecionável.

As contribuições específicas são:

1. a formalização da decisão de limiar no modelo com orçamento de incerteza (envelope, margem estimada e impacto de sensibilidade normalizado) como raciocínio sobre um modelo físico explícito, descrita como implementada no módulo reutilizado (Seções 3 e 4);
2. um estudo de caso controlado de fronteira em que a saída nominal fica $0{,}47$ pp abaixo do limiar IEEE 519, mas o pior caso exato o excede em $0{,}66$ pp, enquanto o máximo permanece abaixo do limiar PRODIST (Seção 6.1);
3. uma varredura de ordem ($N = 1, \ldots, 15$) que quantifica um modo de falha pouco reportado: grades de Chebyshev–Gauss excluem os extremos do intervalo e subestimam o pior caso, tornando a margem estimada *otimista* em até $0{,}36$ pp na ordem 1; a subestimação obedece a uma lei de escala verificada $O(N^{-2})$ que fornece um diagnóstico de refinamento específico do caso (Seção 6.2);
4. uma varredura de distribuições que separa o que depende da forma da distribuição (probabilidade de conformidade: de $87{,}7\%$ a $98{,}4\%$) do que não depende (o envelope de pior caso), incluindo a documentação transparente de um *fallback* do código (Seção 6.3).

Delimitação. Este trabalho não identifica a impedância da rede nem resolve a varredura harmônica determinística. Ambos são tratados como modelos-base avaliáveis: a propagação aceita qualquer $y = f(p_1, \ldots, p_d)$ ponto a ponto; a demonstração de monotonia, porém, depende do modelo explícito usado neste estudo.

2. Fundamentos e trabalhos relacionados

2.1. Caos polinomial, colocação estocástica e base de Chebyshev

A representação de respostas estocásticas por polinômios ortogonais remonta ao caos homogêneo de Wiener [Wiener 1938], ganhou uso de engenharia com os elementos finitos estocásticos de Ghanem e Spanos [Ghanem and Spanos 1991] e foi generalizada ao esquema de Wiener–Askey por Xiu e Karniadakis [Xiu and Karniadakis 2002], podendo apresentar convergência espectral sob regularidade adequada; o caos polinomial arbitrário (aPC) [Oladyshkin and Nowak 2012] constrói a base de momentos amostrais, sem forma fechada da distribuição. Não o usamos aqui: limites, sozinhos, não determinam os momentos exigidos pelo aPC.

Na vertente *não intrusiva*, o modelo é avaliado como caixa-preta em pontos escolhidos: a colocação estocástica, formalizada por Xiu e Hestha-

ven [Xiu and Hesthaven 2005] e analisada por Babuška et al. [Babuška et al. 2007], aproxima o caos não intrusivo para respostas suaves [Eldred and Burkardt 2009]. O caminho multiparâmetro deste artigo (Seção 4.2) reutiliza os nós de uma grade tensorial apenas como amostrador: como não forma nem avalia o interpolante, não herda por si só a convergência espectral da aproximação polinomial [Najm 2009]. Para o envelope deste caso, a aproximação aos extremos é $O(N^{-2})$.

Sobre expansões de caos também se constroem análises de sensibilidade global — índices de Sobol' saem analiticamente dos coeficientes [Sudret 2008, Crestaux et al. 2009] — mas nosso uso é mais modesto e orientado à decisão: derivadas locais no ponto nominal, normalizadas pela meia-largura da faixa para remover a dependência de unidade, ordenam quais parâmetros mais ameaçam a conformidade (Seção 4). Para escalar em dimensão, a literatura oferece expansões esparsas [Blatman and Sudret 2011], grades de Smolyak [Bungartz and Griebel 2004] e *surrogates* por processos gaussianos [Rasmussen and Williams 2005], maduras no UQLab [Marelli and Sudret 2014] — extensão natural, não contribuição.

Os polinômios de Chebyshev usados aqui são o caso Jacobi com $\alpha = \beta = -1/2$ (medida arco-seno); a escolha dos nós é motivada pela aproximação, não pela distribuição de entrada. No sentido estrito de PCE, outras medidas exigiriam bases ortogonais compatíveis; as probabilidades deste artigo vêm de Monte Carlo direto, não dos coeficientes de Chebyshev. Os nós reduzem o fenômeno de Runge e são quase ótimos na norma do supremo [Trefethen 2008], embora o caminho multiparâmetro use somente os valores nodais. O envelope distribuição-livre aproxima este trabalho da tradição de análise intervalar [Moore et al. 2009], de cotas garantidas; a diferença, quantificada na Seção 6.2, é que o envelope amostrado em grade é *limitante inferior* da faixa verdadeira, não cota garantida.

2.2. Raciocínio baseado em modelos e decisão confiável

Em IA, raciocínio baseado em modelos deriva conclusões de um modelo explícito da estrutura e do comportamento do sistema, por oposição a regras empíricas ou associação estatística: é a base do diagnóstico a partir de primeiros princípios de Reiter [Reiter 1987] e do diagnóstico de múltiplas falhas de de Kleer e Williams [de Kleer and Williams 1987], em que a discrepância entre previsão e observação localiza o componente responsável. Este artigo opera o análogo numérico-probabilístico dessa tradição sobre um modelo contínuo de circuito: em vez de localizar o componente que *causou* uma falha observada, o impacto local normalizado identifica o componente cuja tolerância mais *ameaça* a conformidade futura — raciocínio prospectivo sobre o mesmo tipo de modelo explícito. Não reivindicamos um motor de diagnóstico lógico, e sim a linhagem conceitual e seus dividendos: hipóteses estruturais verificáveis (monotonia, Seção 5) e explicação mecanicista do resultado (Seção 3).

A distinção entre incerteza *epistêmica* (redutível, de conhecimento) e *aleatória* (variabilidade intrínseca), central na literatura de aprendizado de máquina [Hüllermeier and Waegeman 2021], organiza a leitura dos resultados: a caixa $[p_{\min}, p_{\max}]$ é uma descrição epistêmica baseada em conjuntos — sabemos os limites, não a distribuição — e cada forma distribucional testada na Seção 6.3 é uma hipótese aleatória adicional. O envelope responde à descrição epistêmica e não muda; a probabilidade de

conformidade responde à hipótese aleatória e muda em até $10{,}7$ pontos percentuais. Reportar os dois, separadamente, torna explícita a premissa distribucional da probabilidade.

2.3. Contexto normativo de qualidade de energia

Distúrbios harmônicos e seus efeitos em redes de distribuição são matéria clássica de QEE [Bollen 1999]. O IEEE Std 519-2022 fixa no ponto de acoplamento comum limite de THD de tensão de 8% para tensão nominal até 1 kV [IEEE 2022]; no Brasil, o Módulo 8 do PRODIST fixa o indicador DTT95% em 10% para a faixa de menor tensão nominal (até 2,3 kV na revisão vigente) [ANEEL 2025]. Ambos os limites são confrontados no estudo de caso; o recorte normativo é detalhado na Seção 7.

3. O modelo físico explícito

O objeto sobre o qual o método raciocina é um equivalente série RLC da rede visto do ponto de acoplamento — resistência de rede R (equivalente de Thévenin), indutância de filtro L e capacitância de filtro C — acoplado a um *surrogate* explícito de THD, afim no módulo da impedância série na frequência fundamental:

$$\mathrm{THD}(R, L, C) \;=\; 4{,}0 + 0{,}28 \left| R + j\omega L + \tfrac{1}{j\omega C} \right|, \qquad \omega = 2\pi \cdot 60\ \mathrm{rad/s}. \tag{1}$$

É um estudo controlado, escolhido para exercitar a fronteira normativa — não é medição de campo; a contribuição é a cadeia de decisão, não o *surrogate*.

A explicitude do modelo dá acesso direto à sua mecânica. Nos valores nominais ($R = 10\ \Omega$, $L = 50$ mH, $C = 100\ \mu$F), $\omega L = 18{,}85\ \Omega$ e $1/(\omega C) = 26{,}53\ \Omega$: a reatância líquida é $X = -7{,}68\ \Omega$ (rede capacitiva) e $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = 12{,}61\ \Omega$ — derivados dos nominais e conferidos contra o campo `Z_nom_ohm` do artefato. A ressonância série do mesmo modelo, $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) \approx 71{,}2$ Hz, fica acima da fundamental: o ponto de operação está em uma região capacitiva sensível do modelo, o que explica o espalhamento de THD sob as faixas declaradas na Seção 6.1 e por que C — o parâmetro com maior impacto local normalizado na vizinhança nominal — domina o *ranking*. Essa explicação, lida da estrutura do modelo, é um dividendo do raciocínio baseado em modelos: com um *surrogate* opaco, a dominância de C não teria mecanismo físico inspecionável.

4. Método: propagação com nós de Chebyshev

Descrevemos o método *exatamente como implementado* no módulo reutilizado, sem idealizações, em dois caminhos: o unidimensional, que forma explicitamente os coeficientes, e o multiparâmetro, por colocação em grade tensorial.

4.1. Mapeamento e expansão unidimensional

Cada parâmetro incerto $p \in [p_{\min}, p_{\max}]$ é mapeado ao domínio canônico $x \in [-1, 1]$ por

$$x \;=\; \frac{2p - (p_{\max} + p_{\min})}{p_{\max} - p_{\min}}. \tag{2}$$

No caso de um único parâmetro, o indicador $y(p)$ é aproximado pela expansão truncada

$$y(x) \;\approx\; \sum_{k=0}^{N} c_k\, T_k(x), \qquad T_{k+1}(x) = 2x\, T_k(x) - T_{k-1}(x), \tag{3}$$

com $T_0 = 1$, $T_1 = x$. Os coeficientes c_k são ajustados por mínimos quadrados (equações normais sobre a matriz de base) nos $N{+}1$ nós de Chebyshev–Gauss $x_i = \cos\big((2i + 1)\pi/(2(N{+}1))\big)$, $i = 0, \ldots, N$, que exigem $N{+}1$ avaliações do modelo; a avaliação da série usa a recorrência de Clenshaw, numericamente estável. O envelope $[\min_x y, \max_x y]$ é extraído avaliando a expansão em uma malha densa de 100 pontos de $[-1, 1]$ (incluindo os extremos), e a sensibilidade no ponto nominal sai em forma fechada da recorrência dos coeficientes da derivada,

$$d_{N-1} = 2Nc_N, \qquad d_{k-1} = d_{k+1} + 2k\,c_k \;\; (k = N{-}1, \ldots, 2), \qquad d_0 = \tfrac{1}{2}d_2 + c_1, \quad (4)$$

reescalada pela largura do intervalo físico via Eq. (2).

4.2. Caso multiparâmetro: colocação em grade tensorial

Para d parâmetros, a implementação avalia o modelo na grade tensorial $G_N = \{x_0, \ldots, x_N\}^d$ de nós de Chebyshev–Gauss mapeados a cada intervalo físico, com custo $(N{+}1)^d$ avaliações, e extrai o envelope diretamente dos valores amostrados:

$$\hat{y}_{\min} = \min_{\xi \in G_N} y(\xi), \qquad \hat{y}_{\max} = \max_{\xi \in G_N} y(\xi). \quad (5)$$

Neste caminho os coeficientes da expansão *não* são formados: a grade de colocação atua como amostrador determinístico quase-ótimo da resposta. Duas consequências práticas, declaradas desde já, são quantificadas na Seção 6.2: (i) $\hat{y}_{\max}$ é um *limitante inferior* do máximo verdadeiro (toda amostragem finita o é), logo a margem de pior caso estimada é otimista; (ii) os nós de Chebyshev–Gauss não incluem os extremos ± 1 — o nó mais externo fica em $\cos\big(\pi/(2(N{+}1))\big)$ — de modo que vértices da caixa de incerteza nunca são avaliados, e a subestimação tem mecanismo conhecido e taxa $1 - \cos\big(\pi/(2(N{+}1))\big) = O(N^{-2})$ por semieixo. A grade de Chebyshev–Gauss foi mantida por compatibilidade com o módulo numérico legado reutilizado. O motor subjacente implementa também nós de Chebyshev–Lobatto (extremos inclusos), mas o propagador usado neste experimento fixa os nós de Gauss e precisaria expor essa configuração. A lei $O(N^{-2})$ observada na Seção 6.2 é um diagnóstico de refinamento específico deste caso, não um critério certificado de parada.

A sensibilidade no caso multiparâmetro é calculada por diferenças centrais no ponto nominal, com passo $\varepsilon_j = 0{,}01\,(p_{j,\max} - p_{j,\min})$:

$$S_j \;=\; \left.\frac{\partial y}{\partial p_j}\right|_{p^{\mathrm{nom}}} \;\approx\; \frac{y(p^{\mathrm{nom}} + \varepsilon_j e_j) - y(p^{\mathrm{nom}} - \varepsilon_j e_j)}{2\varepsilon_j}, \qquad I_j = |S_j|\,\frac{p_{j,\max} - p_{j,\min}}{2}, \quad (6)$$

e o *ranking* ordena o impacto normalizado I_j, expresso na mesma unidade de y. Ordenar diretamente $|S_j|$ seria dimensionalmente inválido porque R, L e C usam unidades SI diferentes; os valores brutos são mantidos apenas como saída diagnóstica do código. Trata-se de medida local; índices globais (Sobol' via coeficientes [Sudret 2008, Crestaux et al. 2009]) ficam como extensão natural.

4.3. Margem normativa e leitura de decisão

Dado um limite normativo superior τ, definimos a margem nominal $m_{\mathrm{nom}} = \tau - y(p^{\mathrm{nom}})$ e a margem estimada pela grade

$$\hat{m}_{\mathrm{grid},N} \;=\; \tau - \hat{y}_{\max}. \quad (7)$$

Como $\hat{y}_{\max}$ é somente um limitante inferior amostral, o sinal positivo de $\hat{m}_{\mathrm{grid},N}$ não certifica robustez. Um veredito robusto exige um limitante superior válido para y; neste estudo controlado, ele vem da referência exata por vértices sob monotonia demonstrada. A saída auditável registra o tipo de margem, as faixas dos parâmetros e o impacto local normalizado dominante.

4.4. Referência Monte Carlo e distribuições suportadas

A validação probabilística usa amostragem Monte Carlo i.i.d. com quatro tipos declarados de incerteza por parâmetro: *uniforme* no intervalo; *triangular* com moda no nominal; *gaussiana censurada nos limites*, gerada com $\sigma = (p_{\max} - p_{\min})/6$ e saturação por `clip` (portanto com massa nos limites, não uma normal truncada); e *beta*. A probabilidade de conformidade é estimada por $\hat{P}(y \le \tau) = M^{-1} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{1}\{y^{(m)} \le \tau\}$. Registro de transparência: inspecionando o código do amostrador, o tipo *beta* consta da enumeração, mas não possui ramo próprio e é amostrado como uniforme; a Seção 6.3 verifica o *fallback* empiricamente (igualdade bit a bit sob a mesma semente). O envelope da Seção 4.2 usa apenas os limites do intervalo, sendo idêntico para qualquer distribuição suportada — a forma da distribuição altera a massa de probabilidade perto da fronteira, não o pior caso.

5. Protocolo experimental

Caso de fronteira controlado. Avaliamos a cadeia completa (propagação → envelope → margem → decisão) no modelo da Seção 3, com parâmetros incertos $R = 10\ \Omega \pm 10\%$, $L = 50$ mH $\pm 10\%$ e $C = 100\ \mu$F $\pm 10\%$. Os limites confrontados são IEEE 519 BT ($\tau = 8{,}0\%$) e PRODIST BT ($\tau = 10{,}0\%$).

Referência exata do pior caso. No intervalo considerado, a reatância líquida $X = \omega L - 1/(\omega C)$ varia em $[-12{,}51, -3{,}38]\ \Omega$ — sempre negativa (rede capacitiva no fundamental). Como $R > 0$, tem-se $\partial|Z|/\partial R > 0$; como $\partial X/\partial L = \omega > 0$ e $\partial X/\partial C = 1/(\omega C^2) > 0$, o sinal $X < 0$ implica $\partial|Z|/\partial L < 0$ e $\partial|Z|/\partial C < 0$ em toda a caixa. Essa demonstração analítica foi ainda confrontada numericamente em uma malha 5^3 com extremos inclusos. Sob monotonia por eixo, os extremos exatos de (1) ocorrem em vértices da caixa, e a enumeração dos $2^3 = 8$ vértices dá a referência exata: $\mathrm{THD} \in [6{,}692,\ 8{,}664]\%$, com máximo no vértice (R máximo, L mínimo, C mínimo).

Execuções e reprodutibilidade. Três blocos de evidência sustentam os números do artigo: (i) o caso-base (ordem 7, 512 avaliações; Monte Carlo uniforme com 50 000 amostras), registrado em artefato JSON e reproduzido por um *driver* dedicado com semente fixa (semente 42; o bloco determinístico reproduz bit a bit, o bloco Monte Carlo da corrida original não registrou semente e é comparado sob deriva estocástica $< 1\%$); (ii) a varredura de ordens $N = 1, \ldots, 15$ (determinística; $N{=}1, \ldots, 7$ na Tabela 2 e na figura, $N{\le}15$ na lei de escala da Seção 6.2); e (iii) a varredura de distribuições (50 000 amostras por distribuição, semente 20260610). As varreduras (ii) e (iii) são ancoradas no caso-base: a linha $N = 7$ coincide com o artefato original (desvio relativo $\le 10^{-13}$). Os erros-padrão de Monte Carlo com $M = 50\,000$ são $\approx 0{,}15$ pp para probabilidades de conformidade próximas de $0{,}88$ e $\approx 0{,}002$ pp para a média.

6. Resultados

6.1. Caso-base: veredito nominal não é veredito robusto

A Tabela 1 resume a decisão normativa do caso-base e a Figura 1 mostra a distribuição Monte Carlo contra o envelope da grade. O envelope de ordem 7 foi $[6{,}70,\ 8{,}64]\%$ de THD para valor nominal $7{,}53\%$ (faixa de $1{,}94$ pp, $25{,}7\%$ do nominal, sob as faixas declaradas de $\pm 10\%$ — consequência da região capacitiva sensível do modelo, Seção 3).

Tabela 1. Margens estimadas pela grade sob incerteza paramétrica limitada ($\pm 10\%$ em R, L, C), caso-base de ordem $N = 7$. Margem negativa indica veredito nominal não robusto. P_{MC}: probabilidade de conformidade estimada com $50\,000$ amostras uniformes. O $87{,}5\%$ difere do $87{,}66\%$ da Tabela 3 por deriva de Monte Carlo sem semente registrada (< 1 p.p.; Seção 5).

Norma	τ (THD)	margem nominal	$\hat{m}_{\mathrm{grid},7}$	P_{MC}	impacto dom.
IEEE 519 BT	$8{,}0\%$	$+0{,}47$ pp	$-0{,}64$ pp	$87{,}5\%$	C
PRODIST BT	$10{,}0\%$	$+2{,}47$ pp	$+1{,}36$ pp	100%	C

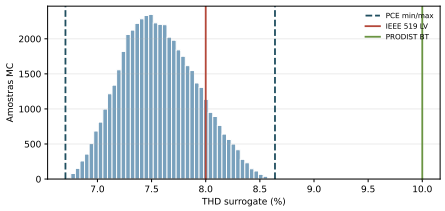


Figura 1. Distribuição Monte Carlo do *surrogate* de THD ($50\,000$ amostras uniformes), envelope da grade (tracejado) e limites normativos. O caso fica nominalmente abaixo de IEEE 519, mas o envelope cruza a fronteira sob a faixa paramétrica declarada.

Para IEEE 519 BT, o veredito nominal é "passa" com folga aparente de $+0{,}47$ pp; o pior caso da grade, porém, viola o limite em $0{,}64$ pp e a referência exata por vértices viola em $0{,}66$ pp — a decisão nominal *se inverte* dentro da faixa declarada de tolerâncias, e $87{,}5\%$ das amostras uniformes são conformes. Para PRODIST BT, o mesmo envelope permanece abaixo de 10% com margem estimada pela grade $+1{,}36$ pp e 100% das amostras conformes; a referência exata por vértices também permanece abaixo do limiar, com margem $+1{,}34$ pp. Isso é uma comparação do modelo controlado com o limiar, não uma adjudicação de conformidade de uma instalação, pois o DTT95 e seu protocolo temporal não foram modelados. O impacto local normalizado (Eq. (6)) resultou $C \succ L \succ R$, com $I_C = 0{,}4523$ pp, $I_L = 0{,}3214$ pp e $I_R = 0{,}2221$ pp. Para estas faixas relativas iguais, reduzir a faixa de C oferece o maior ganho local de primeira ordem.

6.2. Varredura de ordem: quando a margem estimada é otimista

A Tabela 2 e a Figura 2 apresentam a varredura de ordens $N = 1, \ldots, 7$ contra a referência exata por vértices. O comportamento medido confirma o mecanismo declarado na Seção 4.2: o envelope da grade converge monotonicamente para os limites exatos por dentro — nunca os alcança — porque o nó mais externo cobre apenas a fração $\cos\big(\pi/(2(N{+}1))\big)$ de cada semieixo (de $70{,}7\%$ em $N = 1$ a $98{,}1\%$ em $N = 7$). Estendendo a varredura a

$N = 15$ (4096 avaliações), a subestimação $u_N = \mathrm{THD}_{\max}^{\mathrm{exato}} - \hat{y}_{\max}$ obedece a uma lei de escala limpa neste modelo: $u_N\,(N{+}1)^2$ converge para $1{,}565$ pp (de $1{,}44$ em $N = 1$ a $1{,}564$ em $N = 15$; variação 3×10^{-4} no último passo), consistente com a taxa assintótica $O(N^{-2})$. A constante é explicada pela derivada direcional na trajetória diagonal até o vértice crítico multiplicada pelo déficit de cobertura $1{-}\cos(\pi/(2(N{+}1))) \sim \pi^2/[8(N{+}1)^2]$. Ainda em $N = 15$ o resíduo é $0{,}006$ pp e não nulo: nenhuma ordem finita de colocação certifica o pior caso.

Tabela 2. Varredura de ordem N (por dimensão) da grade tensorial de Chebyshev–Gauss. "Alcance": fração do semieixo coberta pelo nó mais externo; $u_N = \mathrm{THD}_{\max}^{\mathrm{exato}} - \hat{y}_{\max}$; $\hat{m}_I$ e $\hat{m}_P$: margens da grade para IEEE e PRODIST, em pp. Linha "exato": vértices sob monotonia verificada.

N	aval.	alcance	THD $[\min; \max]$	$\hat{m}_I$	$\hat{m}_P$	u_N
1	8	0,707	[6,90; 8,30]	−0,30	+1,70	0,360
2	27	0,866	[6,78; 8,50]	−0,50	+1,50	0,168
3	64	0,924	[6,74; 8,57]	−0,57	+1,43	0,096
4	125	0,951	[6,72; 8,60]	−0,60	+1,40	0,062
5	216	0,966	[6,71; 8,62]	−0,62	+1,38	0,043
6	343	0,975	[6,71; 8,63]	−0,63	+1,37	0,032
7	512	0,981	[6,70; 8,64]	−0,64	+1,36	0,024
exato	8 (vértices)	1	[6,69; 8,66]	−0,66	+1,34	0

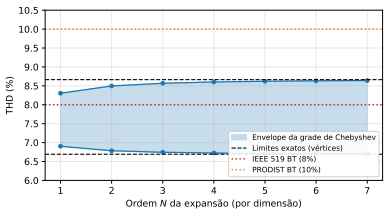


Figura 2. Convergência do envelope da grade de Chebyshev para os limites exatos (vértices) com a ordem N. O envelope converge por dentro: em ordem baixa o pior caso é subestimado e a margem normativa parece melhor do que é. Gerada de `results_repro_ext.json`.

Três leituras de decisão importam. Primeira: a subestimação do máximo é sempre *não conservadora* para conformidade — em $N = 1$ a violação IEEE 519 aparenta ser de $0{,}30$ pp quando é de $0{,}66$ pp, ou seja, 54% da profundidade de violação fica invisível; em $N = 7$ restam $0{,}024$ pp. Segunda: neste caso nenhuma ordem $N \geq 1$ inverte o veredito (a violação exata, $0{,}66$ pp, excede a subestimação máxima, $0{,}36$ pp); mas em casos cuja margem exata seja menor que a subestimação da ordem usada, o veredito estimado poderá ser um falso "passa". Neste caso suave, a relação empírica $u_N \approx 1{,}565\,(N{+}1)^{-2}$ pp permite estimar a ordem necessária para uma discrepância-alvo δ como $N \gtrsim \sqrt{1{,}565/\delta} - 1$. Ela não é cota universal nem certificado: um "passa robusto" requer vértices sob monotonia demonstrada, aritmética intervalar ou outro limitante superior válido. Terceira: há um compromisso explícito entre custo e alcance — a grade de $N = 1$ usa 8 avaliações determinísticas e já detecta a violação IEEE 519 neste caso, embora com profundidade errada. As $50\,000$ avaliações Monte Carlo estimam outra grandeza, a probabilidade, e não constituem um denominador de *speedup*. O caso degenerado de um único ponto (o

veredito *nominal*) é o que de fato se inverte aqui ($+0{,}47$ pp nominal contra $-0{,}66$ pp exato).

6.3. Varredura de distribuições: o que muda e o que não muda

A Tabela 3 fixa os mesmos limites $\pm 10\%$ e varia a forma da distribuição dentro deles. Por construção (Seção 4.4), o envelope de pior caso é idêntico nas quatro linhas; o que muda é a concentração de massa perto da fronteira.

Tabela 3. Varredura de distribuições com limites idênticos ($\pm 10\%$), $50\,000$ amostras por linha, semente 20260610. THD em %; o envelope de pior caso (Tabela 2) independe da distribuição. † *fallback* uniforme do amostrador, verificado bit a bit (Seção 4.4).

Distribuição	média	desvio	p_{95}	p_{99}	$P(\mathrm{THD} \leq 8\%)$	$P(\mathrm{THD} \leq 10\%)$
uniforme	7,569	0,347	8,178	8,382	87,66%	100%
triangular	7,549	0,245	7,976	8,151	95,84%	100%
gaussiana censurada	7,544	0,201	7,889	8,047	98,37%	100%
beta†	7,569	0,347	8,178	8,382	87,66%	100%

A leitura dos limiares é direta: sob o limiar PRODIST de 10%, todas as amostras das quatro simulações ficam abaixo do valor, coerentemente com a margem exata positiva do modelo. Sob IEEE 519, a probabilidade de conformidade varia $10{,}7$ pontos percentuais apenas pela forma da distribuição ($87{,}66\%$ uniforme; $95{,}84\%$ triangular; $98{,}37\%$ gaussiana censurada): quem reporta "probabilidade de conformidade" sem declarar a distribuição suposta está reportando um número mal definido. Na linguagem da Seção 2.2, o envelope responde à parcela epistêmica e cada probabilidade a uma hipótese aleatória sobre a forma [Hüllermeier and Waegeman 2021] — só a primeira tem resposta invariante. Note-se que mesmo a distribuição mais concentrada mantém $p_{99} = 8{,}05\% > 8\%$: a cauda viola o limite em todas as hipóteses distribucionais, e somente a margem de pior caso (negativa) captura esse fato de forma estável. Esse é o argumento central para reportar *simultaneamente* o envelope (invariante) e a probabilidade (condicional à distribuição declarada).

7. Discussão e ameaças à validade

Validade interna. O estudo é controlado de ponta a ponta: o *surrogate* (1) é explícito, a referência de pior caso é exata (vértices sob monotonia verificada) e os *drivers* de reprodução têm semente fixa. O bloco determinístico reproduz bit a bit o artefato original; o Monte Carlo original não registrou semente — limitação de proveniência que documentamos e mitigamos fixando sementes nas execuções novas.

Validade externa. O *surrogate* é deliberadamente simples e suave; permite reexecutar a cadeia de decisão, mas não substitui ensaio físico nem calibração de campo. Em redes reais, ressonâncias agudas degradam a aproximação polinomial (remédio: particionar o domínio ou elevar a ordem localmente, com custo $(N+1)^d$ crescendo rápido), e a maldição da dimensionalidade limita a grade tensorial a poucos parâmetros; o limite prático depende de N, do orçamento e do custo do modelo: expansões esparsas [Blatman and Sudret 2011] e grades de Smolyak [Bungartz and Griebel 2004] são as extensões naturais.

O envelope não é um certificado. A Seção 6.2 quantifica o ponto mais importante para uso normativo: o envelope por colocação é um *limitante inferior* da faixa verdadeira — ao contrário da aritmética intervalar [Moore et al. 2009], que produz cotas garantidas ao custo de conservadorismo. Para respostas monótonas por eixo, a enumeração de vértices (2^d avaliações; linha "exato" da Tabela 2) é exata e mais barata que qualquer grade, sendo a correção de baixo custo recomendada sempre que a monotonia for verificável; nós de Chebyshev–Lobatto (extremos inclusos [Trefethen 2008]), já suportados pelo motor numérico subjacente, são uma alternativa de baixo esforço, mas exigem conectar essa opção ao propagador atualmente fixo em Gauss. Incluir vértices torna a grade exata nos vértices, não necessariamente no interior de uma resposta não monótona.

Leitura de raciocínio baseado em modelos. Três passos da cadeia são diretamente verificáveis aqui devido à explicitude do modelo: a monotonia que habilita a referência exata por vértices, a explicação mecanicista do *ranking* de impacto local normalizado pela estrutura da resposta (Seção 3) e a sentença de decisão auditável da Seção 4.3. Nada disso é dedução lógica no sentido clássico de diagnóstico [Reiter 1987, de Kleer and Williams 1987]; é o análogo contínuo: hipóteses estruturais checadas contra o modelo, conclusões com mecanismo e orçamento declarado — não um certificado, mas uma comparação com limiar cujo processo inteiro de derivação é inspecionável e reexecutável.

Limitações do amostrador. O *fallback* beta→uniforme e a censura da gaussiana (Seção 4.4, Tabela 3) reproduzem as execuções, mas não representam beta genuína nem normal truncada.

Recorte normativo. Tratamos um único indicador (THD de tensão) e um único limite por norma; limites por harmônico individual e protocolos de medição e agregação temporal (e.g. o percentil 95 semanal do PRODIST [ANEEL 2025]) não são modelados. A leitura correta é metodológica — como transformar qualquer veredito pontual em veredito com orçamento de incerteza — e não a avaliação de conformidade de uma instalação real.

8. Conclusão

Comparamos a saída do modelo com os limiares sob variação limitada por nós de Chebyshev: envelope, margem, impacto local normalizado e probabilidade sob distribuição declarada. A grade de ordem 7 usa 512 avaliações; as probabilidades usam, separadamente, $50\,000$ amostras Monte Carlo. Sob $\pm 10\%$, a classificação nominal IEEE 519 se inverte, enquanto o máximo exato do modelo permanece abaixo de 10%; isso não substitui o DTT95 de uma instalação. As varreduras delimitam o método com números: a margem estimada é otimista em ordem baixa (até $0{,}36$ pp em $N{=}1$), segundo a lei verificada $u_N \approx 1{,}565\,(N{+}1)^{-2}$ pp (N até 15), útil como diagnóstico de refinamento deste caso, mas não como certificado; e a probabilidade de conformidade depende fortemente da distribuição suposta ($87{,}7$ a $98{,}4\%$ sob os mesmos limites), enquanto o envelope não depende. Trabalhos futuros: modelos calibrados de rede e carga, nós de Lobatto [Trefethen 2008] e grades esparsas [Blatman and Sudret 2011, Bungartz and Griebel 2004].

Agradecimentos

Ao PPGEE/IESTI–UNIFEI. Ferramentas de IA generativa (Anthropic Claude e OpenAI Codex) auxiliaram na organização de experimentos, auditoria do código, checagens de consistência/reprodutibilidade e revisão editorial; o conteúdo científico foi verificado pelos autores, que assumem integral responsabilidade.

Referências

ANEEL (2025). PRODIST — Módulo 8: Qualidade do Fornecimento de Energia Elétrica. Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional, Agência Nacional de Energia Elétrica. Versão 14 (anexo da REN n. 1.137/2025); Tabela 2: limite de DTT95% de 10% para tensão nominal até 2,3 kV. Fonte oficial ANEEL, acesso em 11/08/2026.

Babuška, I., Nobile, F., and Tempone, R. (2007). A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3):1005–1034.

Blatman, G. and Sudret, B. (2011). Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 230(6):2345–2367.

Bollen, M. H. (1999). *Understanding Power Quality Problems*. IEEE.

Bungartz, H.-J. and Griebel, M. (2004). Sparse grids. *Acta Numerica*, 13:147–269.

Crestaux, T., Le Maître, O., and Martinez, J.-M. (2009). Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7):1161–1172.

de Kleer, J. and Williams, B. C. (1987). Diagnosing multiple faults. *Artificial Intelligence*, 32(1):97–130.

Eldred, M. and Burkardt, J. (2009). Comparison of non-intrusive polynomial chaos and stochastic collocation methods for uncertainty quantification. In *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Orlando.

Ghanem, R. G. and Spanos, P. D. (1991). *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer, New York.

Hüllermeier, E. and Waegeman, W. (2021). Aleatoric and epistemic uncertainty in machine learning: An introduction to concepts and methods. *Machine Learning*, 110(3):457–506.

IEEE (2022). IEEE Std 519-2022: IEEE Standard for Harmonic Control in Electric Power Systems. IEEE. DOI: 10.1109/IEEESTD.2022.9848440.

Mack, P., de Koster, M., Lehnen, P., Waffenschmidt, E., and Stadler, I. (2024). Power quality state estimation for distribution grids based on physics-aware neural networks—harmonic state estimation. *Energies*, 17(21).

Marelli, S. and Sudret, B. (2014). UQLab: A framework for uncertainty quantification in Matlab. In *Vulnerability, Uncertainty, and Risk*, pages 2554–2563.

Moore, R. E., Kearfott, R. B., and Cloud, M. J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia.

Najm, H. N. (2009). Uncertainty quantification and polynomial chaos techniques in computational fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1):35–52.

Oladyshkin, S. and Nowak, W. (2012). Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion. *Reliability Engineering & System Safety*, 106:179–190.

Raissi, M., Perdikaris, P., and Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378:686–707.

Rasmussen, C. E. and Williams, C. K. I. (2005). *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press.

Reiter, R. (1987). A theory of diagnosis from first principles. *Artificial Intelligence*, 32(1):57–95.

Sudret, B. (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7):964–979.

Trefethen, L. N. (2008). Is Gauss quadrature better than Clenshaw–Curtis? *SIAM Review*, 50(1):67–87.

Wiener, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936.

Xiu, D. and Hesthaven, J. S. (2005). High-order collocation methods for differential equations with random inputs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(3):1118–1139.

Xiu, D. and Karniadakis, G. E. (2002). The Wiener–Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2):619–644.