QL-Implications: Quantum-Fuzzy Modeling and Application to Financial Decision-Making

Eduardo Timm Buss[1], Cecília Botelho[1], Diogo Pereira Ribeiro[1], Ramiro Paz[1], Miguel Rosa[1], Rafaella M. Rodrigues[2], Helida Santos[2], Adenauer Yamin[1], Renata Reiser[1]

[1]Centro de Desenvolvimento Tecnológico (CDTec) – Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Pelotas – RS – Brasil

{etbuss,cscbotelho,dpribeiro,rqpaz,mmdrosa,adenauer,reiser}@inf.ufpel.edu.br

[2]Programa de Pós-Graduação em Computação (PPGComp) – Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande – RS – Brasil

{rafaellamasutti,helida}@furg.br

Abstract. *This work introduces a quantum formulation of QL-implications that integrates fuzzy logic and quantum computing, with an application to financial decision-making. Fuzzy connectives are modeled using quantum states and circuits, where membership degrees correspond to measurement probabilities. Experiments with Qiskit show that the model matches theoretical predictions and approximates expected probabilities. A quantum-classical hybrid credit-decision case study demonstrates the QL-implication's ability to build fuzzy decision relations, with more risk-averse inference than the Reichenbach implication. The results confirm that quantum circuits can represent and compute fuzzy logic operators, enabling the integration of fuzzy inference into quantum computational models and hybrid intelligent systems.*

Resumo. *Este trabalho apresenta uma formulação quântica de implicações QL, integrando lógica fuzzy e computação quântica, com uma aplicação à tomada de decisões financeiras. Conectivos fuzzy são modelados usando estados e circuitos quânticos, em que os graus de pertinência correspondem às probabilidades de medição. Experimentos com o Qiskit mostram que o modelo corresponde às previsões teóricas e se aproxima das probabilidades esperadas. Um estudo de caso híbrido quântico-clássico de decisão de crédito demonstra a capacidade da implicação QL de construir relações de decisão fuzzy, com inferência mais avessa ao risco do que a implicação de Reichenbach. Os resultados confirmam que circuitos quânticos podem representar e computar operadores de lógica fuzzy, possibilitando a integração da inferência fuzzy em modelos computacionais quânticos e sistemas inteligentes híbridos.*

1. Introdução

A lógica fuzzy provê uma formalização matemática para a incerteza do raciocínio humano e para a imprecisão inerentes às linguagens naturais e computacionais [Zadeh 1975]. A computação quântica [Nielsen and Chuang 2003], por sua vez, representa a informação por estados quânticos cujos resultados de medição são probabilísticos.

A exploração de propriedades como o emaranhamento, a sobreposição e a inferência quântica permite formas alternativas de computação para problemas complexos. E, de

forma sinérgica, o novo conhecimento sobre a informação quântica também se propaga por meio de simulações em computadores clássicos, utilizados para desenvolver e validar algoritmos quânticos antes de sua execução nos atuais e mais restritivos hardwares quânticos [Avila et al. 2023]. Essa evolução, mais restrita à pesquisa em grandes laboratórios, pode ser visualizada, de forma didática, nas atuais interfaces gráficas [Qiskit 2023].

Nesse contexto, métodos relacionados a aplicações quantum-fuzzy têm sido propostos [Kreinovich et al. 2009, Botelho et al. 2025]. Neste trabalho, a simulação quântica de sistemas flexíveis baseados em lógica fuzzy considera a codificação de valores fuzzy por estados quânticos e de conectivos fuzzy por registradores quânticos, no contexto do modelo de circuitos quânticos. A motivação para investigar essa representação híbrida, que envolve a fusão de dados *quantum-fuzzy*, é que ambas as abordagens operam com graus contínuos de pertinência ou de amplitude dos dados. Circuitos quânticos formalizam um modelo que estende a noção intuitiva da abordagem clássica, no qual graus de pertinência podem ser codificados como amplitudes de probabilidade e operações fuzzy podem ser mapeadas em portas unitárias. Estudos anteriores relataram a interpretação de conectivos fuzzy (de negação, conjunção, disjunção, X(N)or, overlapping e grouping) por meio de computação quântica, incluindo operadores modais e suas construções duais [Buss et al. 2024, Buss et al. 2025, Botelho et al. 2025].

Implicações *quantum-fuzzy* vêm mostrando um papel fundamental no raciocínio aproximado, formalizando o mecanismo de inferência baseado em regras condicionais, "se antecedente, então consequente", modelando incerteza e gradualidade em sistemas flexíveis [Acampora et al. 2022]. Em particular, classes específicas de implicações fuzzy, como as S-implicações, exemplificadas pela implicação de Reichenbach, também foram exploradas nesse contexto. Dentre as diversas classes propostas na literatura, as QL-implicações (quantum-implicações) distinguem-se pela representabilidade definida por meio da composição de t-conormas, negações fortes e t-normas. E, apesar de sua relevância teórica, ainda não está estabelecido como essas implicações podem ser representadas e processadas em arquiteturas de computação quântica, o que justifica esta pesquisa. Além da interpretação em circuito, este trabalho apresenta uma aplicação ilustrativa em decisão de crédito, na qual a QL-implicação constrói, de forma quântica, a relação de decisão de um sistema de inferência híbrido quântico-clássico.

Este artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta a revisão da literatura. A Seção 3 introduz os conceitos fundamentais da lógica fuzzy e da computação quântica. A Seção 4 descreve a representação de conjuntos fuzzy por meio de transformações quânticas, e a Seção 5, a interpretação quântica das QL-implicações. A Seção 6 analisa as simulações realizadas no Qiskit e a comparação com a implicação de Reichenbach. A Seção 7 apresenta um estudo de caso de decisão de crédito em um modelo híbrido quântico-clássico. Por fim, apresentam-se as conclusões e os trabalhos futuros.

2. Trabalhos Relacionados

A presente Revisão Sistemática da Literatura (RSL), conduzida entre 2019 e 2026, objetivou verificar se a literatura existente aborda essa lacuna, identificando os trabalhos que tratam da implementação de QL-implicações em circuitos quânticos e suas possíveis aplicações. Aplicou-se a string de busca *"fuzzy implication" AND "quantum"* aos títulos e resumos nas bibliotecas digitais da IEEE Xplore, ACM Digital Library, ScienceDirect,

Wiley Online Library e SBC OpenLib. A busca foi realizada em junho de 2026 e recuperou 29 itens no total. Após a remoção de 3 entradas de índice e sumário de conferência, 26 artigos foram analisados por título e resumo com base nos seguintes critérios de exclusão:

- **C1** Ausência de implementação em circuito quântico: trata de implicações fuzzy sem propor ou avaliar um circuito quântico.
- **C2** Revisão ou capítulo de livro sem proposta original de circuito.
- **C3** O termo "quantum" refere-se à nomenclatura histórica das QL-implicações na lógica fuzzy clássica, não a circuitos quânticos computacionais.
- **C4** Aplicação de lógica fuzzy em um domínio específico, sem componente de circuito quântico.
- **C5** Formalismo quântico que não implementa implicações fuzzy, como o circuito quântico padrão.

A aplicação dos critérios resultou na exclusão de 25 artigos: 10 por **C1**, 5 por **C2**, 3 por **C3**, 6 por **C4** e 1 por **C5**. O único trabalho selecionado, proposto por [Dai 2026], sintetiza circuitos quânticos para os esquemas RCI e BKS de inferência relacional fuzzy, com demonstração na plataforma OriginQ, e considera a implicação de Reichenbach. Os graus de pertinência são codificados por meio de representação de amplitude, e a composição relacional é implementada por portas quânticas controladas. É o precedente mais próximo do presente trabalho e, simultaneamente, delimita a lacuna que ele preenche: nenhum trabalho identificado na literatura implementa QL-implicações em circuitos quânticos. Nosso trabalho estende a fundamentação à abordagem *quantum-fuzzy* de regra composicional de inferência (RCI), capaz de representar comportamentos de inferência distintos.

3. Preliminares

Esta seção apresenta os principais conceitos da lógica fuzzy e computação quântica.

3.1. Conectivos fuzzy

Uma **função de pertinência** $f_A(\mathrm{x})\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ define o grau de pertinência de um elemento $x \in \mathcal{X}$ ao conjunto fuzzy A, tal que $0 \leq f_A(\mathrm{x}) \leq 1$. Um **conjunto fuzzy** A sobre um conjunto não vazio $\mathcal{X}$ é definido como $A = \{(x, f_A(\mathrm{x})) : x \in \mathcal{X}\}$.

Uma função $N\colon [0,1] \to [0,1]$ é uma **negação fuzzy** se as seguintes condições são satisfeitas: $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$, e se $x \leq y$, então $N(x) \geq N(y)\ \forall x, y \in [0,1]$. Uma negação fuzzy é chamada forte se satisfaz $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Um exemplo é a negação padrão, expressa por: $N_S(x) = 1 - x$.

Neste trabalho, são consideradas funções de agregação denominadas normas triangulares (t-normas) e conormas triangulares (t-conormas), que estendem a modelagem de operadores, como a intersecção e a união clássicas. Uma **norma triangular** T e uma **conorma triangular** S são funções de $[0,1]^2$ em $[0,1]$ que são comutativas, associativas e monótonas. O elemento neutro de T é 1 e o de S é 0. Consideram-se o produto algébrico e a soma algébrica, definidos por:

$$T_P(x,y) = x \cdot y, \quad S_P(x,y) = x + y - x \cdot y, \quad \forall x, y \in [0,1]. \tag{1}$$

Uma função binária $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ é um **implicador fuzzy** se satisfaz as condições de fronteira: $I(1,1) = I(0,1) = I(0,0) = 1$ e $I(1,0) = 0$. Uma **implicação fuzzy**

é um implicador fuzzy que também satisfaz: (i) se $x \leq z$, então $I(x,y) \geq I(z,y)$; e (ii) se $y \leq z$, então $I(x,y) \leq I(x,z)$. Uma função $I_{S,N,T}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma implicação QL se existem uma t-conorma S, uma negação fuzzy forte N e uma t-norma T, tais que:

$$I_{S,N,T}(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \quad \forall x, y \in [0,1]. \tag{2}$$

Sejam S_P a soma probabilística, N_S a negação fuzzy padrão e T_P a t-norma produto, então tem-se a QL-implicação I_{S_P,N_S,T_P} e a R-implicação I_{S_P,N_S}, as quais são definidas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$I_{S_P,N_S,T_P}(x,y) = 1 - x + x^2 y \quad \text{e} \quad I_{S_P,N_S}(x,y) = 1 - x + xy, \tag{3}$$

E, suas correspondentes construções duais, as QL e R coimplicações, são definidas por:

$$J_{S_P,N_S,T_P}(x,y) = x + y - x^2 + x^2 y - 2xy \quad \text{e} \quad J_{S_P,N_S}(x,y) = y - xy \tag{4}$$

A seguir, estes conceitos são aplicados às suas interpretações quânticas.

3.2. Conceitos Básicos de Computação Quântica

Na computação quântica, o qubit é a unidade básica de informação e representa o sistema quântico mais simples, descrito por um vetor unitário bidimensional. Utilizando a notação de Dirac [Nielsen and Chuang 2003], um qubit é escrito como $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, onde α e β são amplitudes complexas associadas aos estados de base. Essas amplitudes satisfazem a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, e o estado pode ser representado como $(\alpha, \beta)^t$ [Kaye et al. 2007].

O espaço de estados de um sistema quântico com múltiplos qubits é obtido pelo produto tensorial dos espaços de estados de seus subsistemas. Para um sistema com dois qubits, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\varphi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, o produto tensorial é dado por $|\Pi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$.

A evolução de um sistema quântico é descrita por transformações unitárias representadas por matrizes de ordem 2^N, onde N é o número de qubits. Essas transformações preservam a normalização e as amplitudes de probabilidade.

A transformação *Pauli X* aplicada a um sistema de dois qubits é expressa por:

$$X^{\otimes 2}|\Pi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\delta \\ \beta\gamma \end{pmatrix}. \tag{5}$$

A operação controlada de Toffoli opera sobre um sistema de três qubits, aplicando *NOT* (*Pauli X*) ao terceiro qubit se os outros dois qubits estiverem no estado $|1\rangle$.

$$T|\mathcal{X}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ \upsilon \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ \sigma \\ \upsilon \end{pmatrix}.$$

Operadores de medição são descritos por $\{M_m\}$, com $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$. Para um estado $|\psi\rangle$, o resultado m ocorre com probabilidade $p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$, produzindo o estado $M_m|\psi\rangle/\sqrt{p(m)}$. Na base computacional, $M_0 = |0\rangle\langle 0|$ e $M_1 = |1\rangle\langle 1|$, de modo que $p(0) = |\alpha|^2$ e $p(1) = |\beta|^2$.

4. Interpretação Quântica de Operações sobre Conjuntos Fuzzy

Conjuntos fuzzy (CF) podem ser interpretados como a superposição de CF clássicos associados a estados quânticos. Interpretações de operações fuzzy, como complemento, interseção e união, são obtidas pelas transformações quânticas NOT, AND e OR.

Sejam $f_A, f_B \colon \mathcal{X} \to [0,1]$ funções de pertinência em A e B. Os estados quânticos formalizando os valores fuzzy de uma entrada x, em A e B, são dados pelos registradores:

$$|S_{f_A}\rangle = \sqrt{1 - f_A(\mathrm{x})}|0\rangle + \sqrt{f_A(\mathrm{x})}|1\rangle, \qquad |S_{f_B}\rangle = \sqrt{1 - f_B(\mathrm{x})}|0\rangle + \sqrt{f_B(\mathrm{x})}|1\rangle. \tag{6}$$

Considerando a negação padrão, o complemento é obtido pelo operador NOT:

$$NOT(|S_{f_A}\rangle) = \sqrt{f_A(\mathrm{x})}|0\rangle + \sqrt{1 - f_A(\mathrm{x})}|1\rangle. \tag{7}$$

Para um sistema multidimensional, com N elementos, tem-se:

$$NOT^{1,2,\ldots N}|S_{f_A}\rangle = \bigotimes_{1\leq i\leq N} \left(\sqrt{1 - f_A(\mathrm{x_i})}|0\rangle + \sqrt{f_A(\mathrm{x_i})}|1\rangle\right),$$

preservando a estrutura de superposição.

A interseção e a união de conjuntos fuzzy são modeladas pelos operadores AND e OR, definidos por meio da porta Toffoli como:

$$AND(|S_{f_A}\rangle, |S_{f_B}\rangle) = \mathrm{Tof}_3^{1,2}(|S_{f_A}\rangle, |S_{f_B}\rangle, |0\rangle), \tag{8}$$

$$OR(|S_{f_A}\rangle, |S_{f_B}\rangle) = NOT_{1,2,3} \circ \mathrm{Tof}_3^{1,2} \circ NOT_{1,2}(|S_{f_A}\rangle, |S_{f_B}\rangle, |0\rangle). \tag{9}$$

5. Interpretação Quântica das QL-Implicações

Para cada $x_i \in \mathcal{X}$, denotam-se por $f_i = f_A(x_i)$ e $g_i = f_B(x_i)$ os graus de pertinência de x_i aos conjuntos fuzzy A e B, respectivamente. O operador $I_{S,N,T}$, aqui denominado IMP_{QL}, promove a interpretação quântica da QL-implicação dada na Eq. (3):

$$\begin{aligned} I_{S,N,T}(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) &= S(NOT|S_{f_i}\rangle, T(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle)) \\ &= NOT^5(T_5^{1,4}(|S_{f_i}\rangle, NOT^4(T_4^{2,3}(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle, |0\rangle))), |0\rangle). \end{aligned} \tag{10}$$

A Fig. 1 mostra o circuito quântico associado a $I_{S,N,T}$, com portas Toffoli e NOT.

Na Tabela 1, cinco estados quânticos descrevem a evolução temporal do sistema, de T_0 a T_4. Cada estado de dimensão 2^5 corresponde às sobreposições na base computacional. Mas apenas os coeficientes não nulos (totalizando 8 estados clássicos) são relevantes e são apresentados algebricamente por meio de suas amplitudes, correlacionando valores fuzzy de uma entrada x, $f_A(\mathrm{x}) = x$ e $f_B(\mathrm{x}) = y$, aos conjuntos A e B.

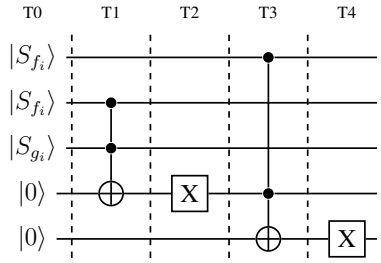


Figura 1. Circuito quântico correspondente ao operador IMP_{QL}.

Tabela 1. Evolução temporal do operador IMP_{QL}

Memória	$T0$	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$(1-f_A)\sqrt{1-f_B}$	00000	00000	00010	00010	00011
$\sqrt{f_A(1-f_A)(1-f_B)}$	00100	00100	00110	00110	00111
$(1-f_A)\sqrt{f_B}$	01000	01000	01010	01010	01011
$\sqrt{f_A f_B(1-f_A)}$	01100	01110	01100	01100	01101
$\sqrt{f_A(1-f_A)(1-f_B)}$	10000	10000	10010	10011	10010
$f_A\sqrt{1-f_B}$	10100	10100	10110	10111	10110
$\sqrt{f_A f_B(1-f_A)}$	11000	11000	11010	11011	11010
$f_A\sqrt{f_B}$	11100	11110	11100	11100	11101

Notação: $f_A \equiv f_A(\mathrm{x})$ e $f_B \equiv f_B(\mathrm{x})$.

A partir do estado final na Tabela 1, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} I_{S,N,T}(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) = {} & (1-f_A)\sqrt{1-f_B}|00011\rangle + (1-f_A)\sqrt{f_B}|00111\rangle \\ & + \sqrt{(1-f_A)f_A(1-f_B)}|01011\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_A f_B}|01101\rangle \\ & + \sqrt{f_A(1-f_A)(1-f_B)}|10010\rangle + \sqrt{f_A(1-f_A)f_B}|10110\rangle \\ & + f_A\sqrt{1-f_B}|11010\rangle + f_A\sqrt{f_B}|11101\rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

A medição realizada no quinto qubit no estado $|1\rangle$ é dada por:

$$\begin{aligned} |S_1'\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{1-f_A+f_A^2 f_B}}\big((1-f_A)\sqrt{1-f_B}|00011\rangle + (1-f_A)\sqrt{f_B}|00111\rangle \\ & + \sqrt{(1-f_A)f_A(1-f_B)}|01011\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_A f_B}|01101\rangle + f_A\sqrt{f_B}|11101\rangle\big). \end{aligned}$$

Assim, $p_1(\mathrm{x}) = 1 - f_A(\mathrm{x}) + f_A^2(\mathrm{x})f_B(\mathrm{x})$ representa a probabilidade de que x_i pertença ao conjunto fuzzy associado à implicação QL entre A e B. Tomando $f_A(\mathrm{x}) = x$ e $f_B(\mathrm{x}) = y$, segue que $p_1(\mathrm{x}) = 1 - x + x^2 y = I_{S_P,N_S,T_P}(x, y)$, de acordo com a Eq. (3).

De forma análoga, a medição realizada no quinto qubit, no estado $|0\rangle$, fornece $p_0(f_A(\mathrm{x})) = x - x^2 y$, indicando a probabilidade de que $f_A(\mathrm{x})$ pertença ao conjunto complementar, pela negação fuzzy padrão N_S, associada à implicação QL entre A e B. Mas $p_0(\mathrm{x}) \neq I_{S_P,N_S,T_P}(f_A(\mathrm{x}), f_B(\mathrm{x}))$, o que mostra que a dualidade não corresponde à interpretação da operação de complemento de conjuntos fuzzy. Uma interpretação quantum-fuzzy análoga à implicação de Reichenbach é apresentada em [Botelho et al. 2026].

6. Análise das Simulações Quânticas

Para avaliar a formulação quântica proposta da implicação QL, foram realizados experimentos com o framework Qiskit [Qiskit 2023]. Dois modos de execução foram considera-

dos: uma abordagem por vetor de estado para estimativa determinística de probabilidades e outra, baseada em disparos, *shots*, para aproximar os resultados de medição sob amostragem finita.

A Tabela 2 apresenta a comparação entre as probabilidades simuladas a partir do vetor de estado e os valores teóricos obtidos pela expressão analítica $I(x, y) = 1-x+x^2y$. Como observado, os valores simulados coincidem exatamente com os resultados teóricos, confirmando a correção da construção quântica proposta.

Tabela 2. Comparação entre valores simulados e teóricos da implicação QL

x	y	Simulado	Teórico
0,20	0,30	0,81	0,81
0,20	0,60	0,82	0,82
0,50	0,30	0,58	0,58
0,50	0,60	0,65	0,65
0,80	0,30	0,39	0,39
0,80	0,60	0,58	0,58

Os valores de entrada x e y foram codificados em estados quânticos por amplitude, em que cada valor $v \in [0, 1]$ é mapeado em um estado de qubit único por meio da porta de rotação $R_y(\theta)$, com $\theta = 2\arcsin(\sqrt{v})$. Essa codificação garante que a probabilidade de medir o estado $|1\rangle$ é proporcional ao grau de pertinência.

O circuito na Figura 1 é implementado com cinco qubits, sendo o último o qubit de saída da implicação QL. A simulação considerou o método de vetor de estado e a abordagem baseada em *shots*, com 10.000 medições. Adicionalmente, apresenta-se o comportamento estatístico do circuito sob amostragem finita. A Figura 2 mostra os resultados das medições, após simulação na plataforma Qiskit/IBM [Qiskit 2023], para os casos $x = 0{,}6$ e $y = 0{,}4$, nos quais a probabilidade de medir o estado $|1\rangle$ aproxima-se do valor teórico.

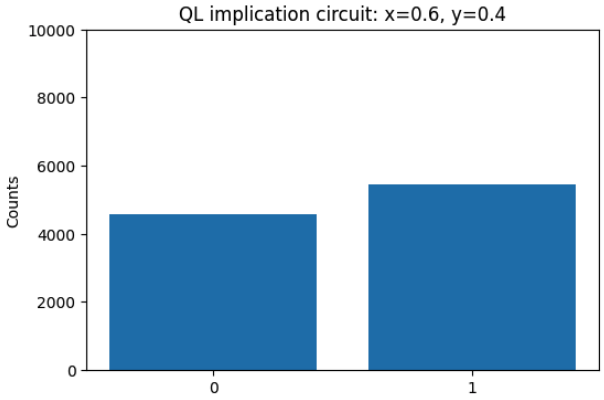


Figura 2. Histograma de medições para o circuito da implicação QL com $x = 0{,}6$ e $y = 0{,}4$.

Os resultados demonstram que o circuito quântico reproduz com precisão a expressão analítica da implicação QL. Enquanto a simulação por vetor de estado fornece concordância exata, a simulação baseada em *shots* aproxima os valores teóricos com um desvio estatístico desprezível, confirmando a robustez da abordagem proposta.

6.1. Comparação com a Implicação de Reichenbach

A fim de avaliar melhor o comportamento da formulação quântica proposta, uma comparação com a implicação de Reichenbach foi realizada no mesmo cenário de simulação. A implicação de Reichenbach é definida como $I_R(x, y) = 1 - x + xy$ [Dai 2026], enquanto a implicação QL adotada neste trabalho é dada por $I_{QL}(x, y) = 1 - x + x^2y$.

Ambas as implicações foram implementadas no mesmo circuito quântico e com a mesma estratégia de codificação, o que permite uma comparação direta entre suas saídas. Os resultados numéricos foram obtidos por simulação com vetor de estado, para garantir uma estimativa exata das probabilidades.

Esses resultados sugerem que a implicação de Reichenbach produz, consistentemente, valores de saída mais altos do que a implicação QL para os mesmos pares de entrada (x, y). Esse comportamento indica que a formulação de Reichenbach é menos restritiva, enquanto a implicação QL introduz uma dependência mais forte em relação ao antecedente por meio do termo quadrático x^2y, o que leva a resultados mais seletivos. Essas diferenças podem impactar a inferência na escolha da implicação em aplicações como sistemas de tomada de decisão, nos quais se requer um comportamento de inferência mais estrito ou mais suave.

A Tabela 3 apresenta uma comparação numérica entre ambas as implicações para valores de entrada selecionados.

Tabela 3. Comparação entre as implicações QL e de Reichenbach

x	y	QL ($I(x, y) = 1 - x + x^2y$)	Reichenbach ($I(x, y) = 1 - x + xy$)
0,20	0,30	0,81	0,86
0,20	0,60	0,82	0,92
0,50	0,30	0,58	0,65
0,50	0,60	0,65	0,80
0,80	0,30	0,39	0,44
0,80	0,60	0,58	0,68

Esses resultados indicam que ambas as implicações podem ser implementadas no mesmo arcabouço quântico, sem modificações estruturais no circuito. No entanto, suas diferentes formas algébricas conduzem a comportamentos de inferência distintos. Enquanto a implicação de Reichenbach fornece saídas mais suaves e menos restritivas, a formulação QL enfatiza a contribuição do antecedente, o que pode ser desejável em aplicações que requerem fronteiras de decisão mais estritas.

7. Estudo de Caso: Inferência de Crédito Híbrida Quantum-Fuzzy

Para ilustrar a aplicabilidade da formulação proposta, esta seção apresenta um estudo de caso de decisão de crédito baseado em um modelo híbrido quântico-clássico. A relação fuzzy de decisão é construída quanticamente por meio do operador IMP_{QL} introduzido na Seção 5, ao passo que a etapa de inferência emprega a Regra Composicional de Inferência (RCI) [Acampora et al. 2022]. A construção é uma recodificação quântica exata do operador fuzzy clássico e não estabelece vantagem computacional; sua contribuição é tornar a QL-implicação compatível com o modelo de circuitos e com uma futura composição inteiramente quântica. Nesse sentido, a construção generaliza o estudo de [Dai 2026],

que aplica o esquema de RCI quântico à implicação de Reichenbach, ao caso das QL-implicações.

7.1. Modelagem do Problema

Considera-se o universo de entrada $X = \{x_1, \ldots, x_5\}$, em que cada x_j corresponde a uma condição creditícia (renda alta, idade estável, pontuação adequada, baixo endividamento e garantia suficiente), e o universo de saída $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, associado aos termos de decisão: "aprovado", "revisar" e "rejeitado". O conjunto fuzzy A codifica o perfil favorável de referência da regra "*se* o perfil é A, *então* a decisão é B", com graus $A_j = \mu_A(x_j)$, ao passo que o conjunto fuzzy B codifica o consequente, com graus de pertinência $B_i = \mu_B(y_i)$. Os dados de cada cliente são representados por uma observação $C = A'$, com graus $c_j = \mu_{A'}(x_j)$. Avaliam-se três clientes de perfis distintos: C_1 (favorável), C_2 (limítrofe) e C_3 (desfavorável). Trata-se de uma aplicação ilustrativa, na qual X é interpretado como um índice de aptidão discretizado em condições heterogêneas. Os valores do antecedente A, do consequente B e das observações constam da Tabela 4. Em uma modelagem completa, cada critério seria tratado como uma variável linguística própria, exigindo fuzzificação, uma base de regras e a representação conjunta dos antecedentes por meio de produtos tensoriais. Neste trabalho, essas etapas são simplificadas para isolar a implementação da QL-implicação.

Tabela 4. Antecedente A com observações dos clientes (C_1, C_2, C_3) e consequente B.

Antecedente e observações					Consequente	
Condição x_j	A_j	C_1	C_2	C_3	Decisão y_i	B_i
renda alta	0,9	0,70	0,35	0,15	aprovado	0,8
idade estável	0,7	0,60	0,30	0,10	revisar	0,5
pontuação adequada	0,8	0,62	0,30	0,15	rejeitado	0,2
baixo endividamento	0,6	0,50	0,20	0,10		
garantia suficiente	0,5	0,55	0,28	0,10		

7.2. Construção Quântica da Relação de Decisão

A relação fuzzy de decisão $R \in [0,1]^{5\times 3}$ é obtida aplicando-se a QL-implicação a cada par condição–decisão,

$$R_{ji} = I_{QL}(A_j, B_i) = 1 - A_j + A_j^2\, B_i, \qquad 1 \le j \le 5,\ 1 \le i \le 3, \tag{12}$$

na qual cada entrada corresponde à probabilidade $p(|1\rangle)$ medida no qubit de saída do circuito da Figura 1. Cada valor $v \in \{A_j, B_i\}$ é codificado em amplitude no estado $|S_v\rangle = \sqrt{1-v}\,|0\rangle + \sqrt{v}\,|1\rangle$ por meio da porta de rotação $R_y(\theta_v)$, com $\theta_v = 2\arcsin\big(\sqrt{v}\big)$, de modo que $p(|1\rangle) = v$, conforme a codificação descrita na Seção 6.

A relação foi obtida em dois modos de execução: a simulação por vetor de estado (determinística), que fornece R^{sv}, e a execução com $N = 10\,000$ *shots*, que fornece a estimativa $\hat{R}$. Com as linhas na ordem das condições da Tabela 4 e as colunas $(\text{aprovado}, \text{revisar}, \text{rejeitado})$, obtém-se

$$R^{\mathrm{sv}} = \begin{pmatrix} 0{,}748 & 0{,}505 & 0{,}262 \\ 0{,}692 & 0{,}545 & 0{,}398 \\ 0{,}712 & 0{,}520 & 0{,}328 \\ 0{,}688 & 0{,}580 & 0{,}472 \\ 0{,}700 & 0{,}625 & 0{,}550 \end{pmatrix}, \qquad \hat{R} = \begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}508 & 0{,}261 \\ 0{,}700 & 0{,}549 & 0{,}401 \\ 0{,}721 & 0{,}524 & 0{,}330 \\ 0{,}697 & 0{,}584 & 0{,}475 \\ 0{,}708 & 0{,}630 & 0{,}556 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

A concordância entre R^{sv} e $\hat{R}$ é coerente com o erro de amostragem esperado: a estimativa $\hat{p}$ de uma probabilidade p a partir de N medições possui desvio-padrão $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/N} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} = 5 \times 10^{-3}$ para $N = 10^4$. Os desvios observados entre as duas matrizes, no máximo de $\approx 9 \times 10^{-3}$, situam-se em torno de $2\,\sigma$, confirmando que a execução por *shots* reproduz a relação exata dentro da flutuação estatística prevista.

7.3. Inferência por Composição e Decisão

A classificação de cada cliente segue o método de RCI modificado de [Dai 2026], em duas etapas. Na primeira, a regra é traduzida na relação R (Seção 7). Na segunda, a observação C é realizada com R pela composição soma–produto $\biguplus$ (t-conorma da soma probabilística S_P), produzindo o conjunto fuzzy de saída D sobre Y, cuja pertinência em cada decisão y_i é

$$D(y_i) = \biguplus_{j=1}^{5} \left(c_j \cdot R^{\text{sv}}_{ji}\right) = 1 - \prod_{j=1}^{5} \left(1 - c_j\, R^{\text{sv}}_{ji}\right), \qquad i \in \{1,2,3\}. \tag{14}$$

Cada produto $c_j \cdot R^{\text{sv}}_{ji}$ pondera a compatibilidade do cliente com a condição x_j pela força da regra, e a soma–produto acumula essas cinco contribuições: $D(y_i)$ só é baixa se nenhuma condição sustentar a decisão y_i. Para o cliente C_2 e a decisão de aprovação y_1, o cálculo ocorre em três passos. Primeiro, as contribuições por condição $c_j \cdot R^{\text{sv}}_{j1}$: $(0{,}262;\ 0{,}208;\ 0{,}214;\ 0{,}138;\ 0{,}196)$. Em seguida, os complementos $1 - c_j \cdot R^{\text{sv}}_{j1}$, cujo produto é $0{,}319$; por fim, $D(y_1) = 1 - 0{,}319 = 0{,}681$.

A decisão final aplica duas faixas sobre a pertinência de aprovação $D(y_1)$ (sendo y_1 a decisão "aprovado"): o crédito é *aprovado* se $D(y_1) \geq \tau_a$, *rejeitado* se $D(y_1) < \tau_r$, e encaminhado à *revisão* manual no intervalo $[\tau_r, \tau_a)$, com $\tau_a = 0{,}70$ e $\tau_r = 0{,}50$. Quanto maior a aderência do cliente ao perfil favorável A, maior é $D(y_1)$ e mais permissiva é a decisão. A Tabela 5 reúne as saídas inferidas: as três primeiras linhas correspondem aos clientes sob a relação QL, que recaem, respectivamente, em aprovação, revisão e rejeição; a última linha apresenta, para o cliente limítrofe C_2, a inferência sob a relação de Reichenbach $R^R_{ji} = 1 - A_j + A_j B_i$. Para o mesmo C_2, Reichenbach resulta em $D(y_1) = 0{,}756 \geq \tau_a$ (aprovação), enquanto a QL-implicação ($0{,}681 < \tau_a$) o encaminha à revisão: a escolha do operador altera a decisão final, ainda que o circuito e a codificação permaneçam inalterados.

Tabela 5. Saídas RCI $D(y_i)$ e decisão final ($\tau_a = 0{,}70$, $\tau_r = 0{,}50$). As três primeiras linhas usam a relação QL; a última, a de Reichenbach para C_2.

Cliente	Implicação	aprovado	revisar	rejeitado	Decisão
C_1 (favorável)	QL	0,937	0,863	0,736	aprovado
C_2 (limítrofe)	QL	0,681	0,576	0,448	revisar
C_3 (desfavorável)	QL	0,361	0,288	0,210	rejeitado
C_2 (limítrofe)	Reichenbach	0,756	0,638	0,479	aprovado

Tal comportamento não é particular ao cliente em questão, mas decorre de uma propriedade estrutural das duas implicações, formalizada a seguir.

Proposição 1. *Para quaisquer conjuntos, antecedente A e consequente B, e uma observação C, a inferência baseada em QL-implicação é uniformemente mais conservadora do que a baseada em implicação de Reichenbach, isto é, $D^{QL}(y_i) \leq D^R(y_i)$, $\forall i$.*

Demonstração. Como $x^2y \leq xy$, $\forall x, y \in [0,1]$, tem-se $I_{QL}(A_j, B_i) \leq I_R(A_j, B_i)$ e, portanto, $R_{ji}^{QL} \leq R_{ji}^{R}$ para cada entrada em (A_j, B_i). Multiplicando por $c_j \geq 0$, preserva-se a desigualdade, $c_j R_{ji}^{QL} \leq c_j R_{ji}^{R}$. Como T_P e S_P são ambas operações monótonas, não decrescentes, em cada argumento, segue que $D^{QL}(y_i) \leq D^{R}(y_i)$, $\forall y_i$. □

Sob a ótica do risco de crédito, a Proposição 1 formaliza que a política QL aprova um subconjunto dos clientes aprovados pela política de Reichenbach, reduzindo a exposição a falsos positivos (inadimplência). O termo quadrático x^2y traduz-se, assim, em uma política de concessão avessa ao risco, desejável em cenários que requerem fronteiras de decisão mais estritas, ao passo que a implicação de Reichenbach favorece uma concessão mais permissiva.

8. Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma formulação quântica de implicações QL, baseada na integração entre lógica fuzzy e computação quântica. A abordagem proposta modela conectivos fuzzy por meio de estados quânticos e operações em circuitos quânticos, permitindo a interpretação de graus de pertinência como probabilidades de medição. Mostrou-se que a construção preserva o comportamento analítico da implicação fuzzy. Experimentos realizados com o Qiskit validaram o modelo proposto. A abordagem determinística por vetor de estado coincide com a formulação teórica até a precisão numérica, confirmando a corretude da construção quântica.

Uma análise comparativa com a implicação de Reichenbach demonstrou, ainda, que o arcabouço quântico proposto não se limita a um único operador de implicação. Os resultados mostraram que diferentes implicações fuzzy podem ser implementadas na mesma estrutura de circuito, produzindo comportamentos de inferência distintos, conforme sua formulação algébrica. Adicionalmente, um estudo de caso de decisão de crédito ilustrou a aplicabilidade da abordagem em um modelo híbrido quântico-clássico, no qual a relação de decisão é construída quanticamente pela QL-implicação e composta por inferência relacional (método RCI), evidenciando, inclusive de forma analítica, o comportamento mais conservador da QL frente à implicação de Reichenbach. Conclui-se que circuitos quânticos podem representar e computar operadores lógicos fuzzy, fornecendo uma base para a integração de mecanismos de inferência fuzzy em modelos computacionais quânticos. A formulação proposta contribui para o desenvolvimento de abordagens *quantum-fuzzy* e sistemas inteligentes híbridos.

Como limitações, a validação restringe-se a simulações sem ruído e a um estudo de caso ilustrativo, não demonstrando vantagem computacional ou generalização para outros domínios. Trabalhos futuros incluem execução em hardware quântico, análise de escalabilidade, profundidade e custo dos circuitos, além da implementação quântica de modelos de inferência simplificados e da etapa de composição (RCI).

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelas seguintes agências de fomento CAPES, FAPERGS, CNPq -processo 309559/2022-7.

Referências

Acampora, G., Schiattarella, R., and Vitiello, A. (2022). On the implementation of fuzzy inference engines on quantum computers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30(11):4845–4856.

Avila, A., Santos, H., Cruz, A., Xavier-de Souza, S., Lucca, G., Moura, B., Yamin, A., and Reiser, R. (2023). Hybrid-gm: A framework for quantum computing simulation targeted to hybrid parallel architectures. *Entropy*, 25(3).

Botelho, C., Buss, E., Yamin, A., Santos, H., Lucca, G., and Reiser, R. (2026). A hybrid classical–quantum formulation of fuzzy cri inference with a triage case study. In *IEEE World Congress on Computational Intelligence, CEC 2026, Maastricht, Netherlands, June 21-26, 2026*, pages 1–6. IEEE.

Botelho, C., Schonhofen, L., Santos, H. S., Lucca, G., Yamin, A. C., and Reiser, R. H. S. (2025). Toward a quantum fuzzy approach for emotion modeling in parent-child interactivity. In Rocha, A. P., Steels, L., and van den Herik, H. J., editors, *Proceedings of the 17th Int. Conf. on Agents and Artificial Intelligence, ICAART 2025 - Volume 3, Porto, Portugal, February 23-25, 2025*, pages 1297–1303. SCITEPRESS.

Buss, J., Novack, B., Botelho, C., Santos, H. S., Lucca, G., Cruz, A. P., Yamin, A. C., and Reiser, R. (2024). Fusion data on fuzzy modality: From algebraic interpretations to quantum simulations via qiskit platform. In *IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics, SMC 2024, Kuching, Malaysia, Oct. 6-10, 2024*, pages 3602–3607. IEEE.

Buss, J., Novack, B., Santos, H. S., Lucca, G., de Souza Oliveira, L., Yamin, A. C., Cruz, A. P., and Reiser, R. H. S. (2025). IBM-qiskit simulations for quantum-fuzzy interpretations of x(n)or-connectives using overlapping and grouping aggregations. In *IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, FUZZ 2025, Reims, France, July 6-10, 2025*, pages 1–6. IEEE.

Dai, S. (2026). On the quantum circuit implementation of fuzzy reasoning. *Fuzzy Sets and Systems*, 522:109611.

Kaye, P., Laflamme, R., and Mosca, M. (2007). *An Introduction to Quantum Computing*. Oxford University Press.

Kreinovich, V., Kohout, L., and Kim, E. (2009). Similarity between quantum logic and fuzzy logic.

Nielsen, M. and Chuang, I. (2003). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Publisher, Cambridge.

Qiskit (2023). Qiskit: An open-source framework for quantum computing. `https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/qiskit.circuit.library.U3Gate` [Accessed: (May 06, 2026)].

Zadeh, L. A. (1975). Fuzzy logics and approximate reasoning. *Synthese*, 30:407–428.