

# Artefato Computacional para o Auxílio no Ensino-Aprendizagem da Série de Fourier: Aplicação para o problema de difusão de calor em uma barra de metal

Felipe Antunes dos Santos<sup>1</sup>, Geovana Pires A. Lima<sup>2</sup>, Leno Matos Lisboa<sup>3</sup>, Romilson dos Santos Souza<sup>4</sup>, Victor Porto Lopes<sup>5</sup>, Eduardo Silva Palmeira<sup>6</sup>

Universidade Estadual de Santa Cruz- UESC, Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional- PPGMC

fante.antunes@outlook.com, gpalima@uesc.br {leno\_matos, romi.souza}@hotmail.com, {victorporto.eng, espalmeira}@gmail.com

**Abstract.** *This project uses the Fourier series to model the heat conduction behavior in a rod. The Fourier series have a great value in the engineering, physics and mathematics because it can represent a periodic function, however complex that may be, through an infinite sinusoidal series. A computational model of this problem was created, in which was analyzed the heat diffusion behavior over time and under different quantities of terms in the series sum. Concluding that, for more series terms, more accuracy the obtained solution had, and more computational time was needed.*

**Resumo.** *Este trabalho apresenta o uso das séries de Fourier no problema de difusão de calor em uma barra de metal. A Série de Fourier possui grande importância nas áreas da engenharia, física e matemática pois consegue representar uma função periódica, por mais complexa que seja, por meio de uma série senoidal infinita. Desta forma, realizou-se a modelagem computacional do problema de difusão do calor na barra, no qual foi analisado o seu comportamento a partir da Série de Fourier, em que verificou-se o comportamento da barra ao longo do tempo e com diferentes termos no somatório da série, valor de  $n$ , chegando à conclusão que para um maior número de termos da série, mais precisa é a solução obtida, porém exige um grande esforço computacional.*

## 1. Introdução

A Série de Fourier consiste na representação de funções com séries senoidais infinitas. E pode ser representada como sendo (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

Onde,  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são coeficientes, que variam de acordo a função;  $n$  é o índice que faz o somatório variar de 1 ao  $\infty$ ;  $L$  corresponde ao período. A notação para uma função contínua por partes,  $f(x+0)$  e  $f(x-0)$  com limites laterais  $f(x+0) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$  e  $f(x-0) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ .

Segundo o Teorema de Fourier, seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2L$ -periódica contínua por partes em que a primeira derivada da função  $f'(x)$  também seja contínua por partes. Sejam  $a_n$  e  $b_n$  respectivamente definidas por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (3)$$

Considerando a Série de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T}) \quad (4)$$

Logo a Série de Fourier converge para todo  $x$  tendo a soma equivalente a:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T}) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ é pt. continuidade} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{se } x \text{ é pt. descontinuidade} \end{cases} \quad (5)$$

Há uma vasta aplicação da Série de Fourier na física e química quântica, engenharias, oceanografia, processamento de sinal. Por exemplo é usada no método de separação de variáveis de equações diferenciais, também tem larga aplicação para a solução de equações diferenciais parciais, na área da elétrica para a análise de circuitos elétricos. Neste artigo será trabalhado com a difusão de calor em uma barra de metal, sendo este o problema que motivou o Fourier desenvolver seus estudos no qual analisou a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, e mostrou que qualquer função, por mais complexa que fosse, pode ser decomposta em uma soma de senos e cossenos, ou seja, é possível expressá-la por meio de funções elementares familiares (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

## 2. Materiais e métodos

A linguagem R e o ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) RStudio foram utilizados para a implementação deste modelo e para a plotagem dos gráficos e animações; a aplicação FFmpeg foi utilizada para a edição e criação dos vídeos.

Além do modelo criado em R, um outro foi criado na linguagem C, para proporcionar uma versão da aplicação com maior eficiência computacional e usabilidade. A linguagem R foi escolhida para a criação do primeiro modelo e plotagem dos gráficos por possibilitar a geração de imagens, vídeos e demais aparatos capazes de facilitar o fluxo do conhecimento na apresentação deste trabalho. Já a linguagem C foi escolhida devido à alta possibilidade de otimização computacional e de compilação dos algoritmos, possibilitando a criação de um programa e diminuindo assim os requisitos para a utilização do modelo.

## 3. Série de Fourier

Estudaremos agora às séries trigonométricas da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) \quad (6)$$

na qual observamos que todas as infinitas parcelas são periódicas de período  $T$ . Para Boyce e Diprima (2006) no conjunto de valores de  $x$  para os quais a série (1) converge ela define uma função periódica  $f$  de período  $T$ .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) \quad (7)$$

onde os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}_+^*$ , são chamados Coeficientes de Fourier. Pela afirmação anteriormente apresentada temos que a série (1) é convergente logo a função (2) também é convergente e dizemos então que a série (2) é a Série de Fourier para  $f$ . O estudo da Série de Fourier nos leva ao conjunto de funções que podem ser representadas por meio dessa série, logo, toda função desse conjunto pode ser representada por ela, portanto ela gera o espaço de funções para as funções seccionalmente diferenciáveis e periódicas de período  $T$ . O fato de ser espaço vetorial está implícito na existência do produto interno, além disso, de acordo com o teorema 2 abaixo.

**Teorema 2:** Se  $V$  é um conjunto de vetores não nulos dois a dois ortogonais, então  $V$  é linearmente independente. Com essas duas afirmações, temos que as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  formam uma base para um espaço vetorial.

### 3.1. Determinação dos coeficientes de Fourier

Dada uma função  $f$  periódica de período  $T$  nosso objetivo é determinar os Coeficientes de Fourier para esta função em particular. Em outras palavras, determinar os coeficientes de Fourier da representação em Série de Fourier para a dada função. Da álgebra linear temos o resultado:

**Teorema 3:** Se  $V$  é o espaço das funções contínuas por partes no intervalo  $[a, b]$ . Seja  $\{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots\}$  um subconjunto de  $V$  de vetores ortogonais não nulos.

Se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) \quad (8)$$

Então

$$c_m = \frac{\langle f(x), g_m(x) \rangle}{\|g_m\|^2} \quad (9)$$

Para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Teremos que os coeficiente da série será dada por :

$$a_m = \frac{\langle f(x), \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \rangle}{\left\| \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (10)$$

$$b_m = \frac{\langle f(x), \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \rangle}{\left\| \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (11)$$

Para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

### 3.2. Equação do calor em uma barra

Segundo Boyce e Diprima (2006, p. 345) “se duas seções retas paralelas de mesma área  $A$  e temperaturas diferentes  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, estiverem separadas por uma pequena distancia  $d$ , uma quantidade de calor por unidade de tempo vai passar da seção mais quente para a mais fria”.

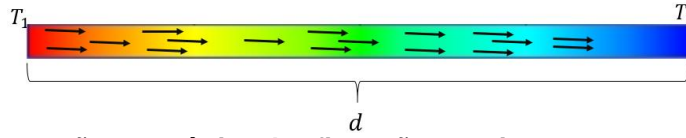


Figura 1. Representação geométrica da afirmação anterior, as setas representam a direção e sentido da dispersão de calor. Fonte: autoria própria.

Pretendemos considerar um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo. Escolhido o eixo dos  $x$  para formar o eixo da barra de modo que  $x = 0$  e  $x = L$  correspondente as extremidades da barra.

Considerando que as extremidades da barra sejam isoladas, de modo, que possuam a temperaturas fixas. Vamos considerar que a temperatura  $u$  dependa apenas da posição do eixo  $x$  e do tempo  $t$  e não de  $y, z$ , ou seja, a temperatura é constante em qualquer outra seção reta da barra. Segundo Boyce e DiPrima (2006, p. 345) “essa hipótese é satisfatória, em geral, quando dimensões laterais da barra são pequenas comparadas com seu comprimento”. Considere também que inicialmente, instante  $t_0$  a barra possua uma temperatura uniforme em toda ela, exceto nos extremos isolados.

A variação da temperatura em uma barra é governada por uma equação diferencial denominada equação do calor e tem a forma.

$$\alpha^2 u(x, t)_{xx} = u(x, t)_t \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (12)$$

Onde o índice  $xx$  significa segunda derivada parcial da função  $u$  em relação a  $x$  e o índice  $t$  significa derivada primeira de  $u$  em relação a  $t$ . Tem-se ainda que  $\alpha^2$  é uma constante conhecida como difusidade térmica.

Considerando que a distribuição inicial de temperatura da barra é dada por:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad (13)$$

Onde  $f$  é uma função dada. Supondo que as extremidades sejam mantidas a uma temperatura fixa, ou seja, vamos inicialmente resolver o problema com  $T_1 = T_2 = 0$ , que é denominada condições Homogêneas.

Para  $x = 0$  e  $x = L$  respectivamente temos:

$$u(0, t) = 0 \quad e \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (14)$$

O problema fundamental da condução do calor é determinar Equação Diferencial  $u(x, t)$  que satisfaça (8) no intervalo  $0 < x < L$ , para  $t > 0$ , e condição inicial

$u(x, 0) = f(x)$  e para valor de contorno  $x = 0$  e  $x = L$ . Utilizaremos método denominado separação de variáveis para solucionar o problema. Para tal fim procuramos uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (15)$$

Derivando (6) e substituindo-se na equação substituído  $u(x, t)$  da equação (12), temos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad (16)$$

Separado as variáveis:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (17)$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ , a igualdade só é possível se eles forem iguais a uma constante, chamaremos essa constante de  $-\lambda$ , portanto:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (18)$$

logo,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (19)$$

e

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (20)$$

Acarretando em obtermos duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \alpha^2 T(t) \lambda = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$(22)$$

Tomando  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$  e analisando para  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  na condição de contorno (5) tem-se:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad (23)$$

Como não é interessante que  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$  (pois não queremos temperatura sempre nula), então resta

$$X(0) = 0 \quad (24)$$

Analogamente

$$X(L) = 0 \quad (25)$$

A equação 21 sujeita as condições de contorno 19 e 20 gera um problema de autovalores cuja as únicas soluções das equações 17, 19 e 20, não triviais, são as autofunções:

$$X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (26)$$

Associado aos autovalores

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (27)$$

Voltando para  $\mathbf{T}'(t) + \alpha^2 \mathbf{T}(t) \lambda = \mathbf{0}$  e substituído  $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$

$$T'(t) + \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} T(t) = 0 \quad (28)$$

Perceba que a igualdade é válida se

$$T(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \quad (29)$$

Ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X_n(x) = C_1 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (30)$$

Assim a segunda equação diferencial tem solução

$$T_n(t) = C_2 e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \quad (31)$$

Portanto, substituído  $X(x)$  e  $T(t)$  em (4) tem-se

$$u_n(x, t) = c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (32)$$

As funções  $u_n$  são chamadas soluções fundamentais do problema de condução de calor (8), (9) e (10)

Além disso, combinações lineares dessas soluções são solução

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (33)$$

Que é a solução para problema da condução de calor.

Mas para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (34)$$

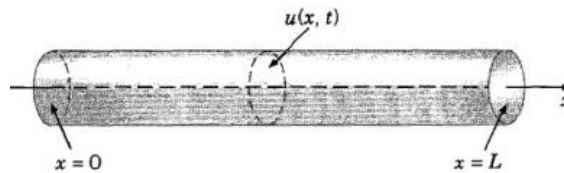
Precisamos escolher coeficientes  $c_n$  tais que a série de funções seno na equação (34) convirja para a distribuição inicial de temperatura  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq L$ . A série anterior é a Série de Fourier dos senos de  $f$  e seus coeficiente são dados por:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (35)$$

Solução anterior é dada para situação em que as duas extremidades da barra são mantidas a uma mesma temperatura constante  $T_1 = T_2 = 0$ . Que são denominadas condições de contorno Homogêneas.

#### 4. Aplicação da Série de Fourier

No problema proposto uma barra está sujeita a uma determinada temperatura ( $T_i$ ), quando suas extremidades são submetidas a uma variação de temperatura ( $T_0$ ), deseja-se saber a temperatura em um determinado tempo e período  $u(x, t)$ . A Figura 2 apresenta a barra modelada no trabalho.



**Figura 2. Ilustração da difusão de calor na barra**  
**Fonte: Boyce e DiPrima (2012).**

Para isto o presente trabalho utilizou a Série de Fourier para calcular a temperatura em qualquer instante em uma barra, implementando modelo computacional capaz de receber como dados de entrada a difusividade térmica do material ( $\alpha$ ), o comprimento da barra ( $L$ ), a temperatura das extremidades da barra ( $T_0$ ) e temperatura inicial da barra ( $T_i$ ) e após o processamento fornecer como dado saída a temperatura em diversos instantes de forma gráfica.

Na fase de processamento o algoritmo terá as seguintes etapas:

1ª ETAPA: determinação da equação do calor:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 \alpha^2 t / L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Onde:

u=temperatura

n=número de iterações

x= Posição da barra

L= Comprimento da barra

t= Instante

Cn= Coeficientes para cada

2ª ETAPA: encontrar os coeficientes  $C_n$  para cada iteração (n):

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

$f(x) = (u, 0) = \text{temperatura inicial da barra}$

### 3ª ETAPA: SUBSTITUIR VALORES NA EQUAÇÃO DO CALOR:

Nesta etapa deve-se substituir os valores alimentados no sistema como dado de entrada, na equação do calor, para o processamento.

### 4ª ETAPA: DADOS DE SAÍDA:

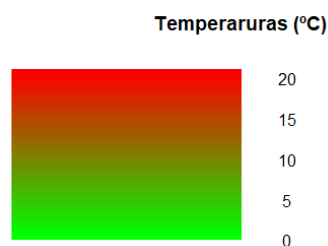
Após receber a posição e tempo desejados e realizadas as etapas anteriores, obtém-se ao final como dado de saída a temperatura desejada.

## 5. Resultados

A temperatura é medida no interior da barra e será representada, com a finalidade de proporcionar uma melhor visibilidade, por cores variando, sob uma perspectiva RGB, de verde puro a vermelho puro, representando 0°C e 20°C, respectivamente, e com as outras temperaturas sendo uma combinação de verde e vermelho, de modo que, se considerando  $T(x, t)$  como sendo a temperatura do ponto  $x$  no tempo  $t$  e  $T_i$  a temperatura inicial da barra, neste caso 20 °C:

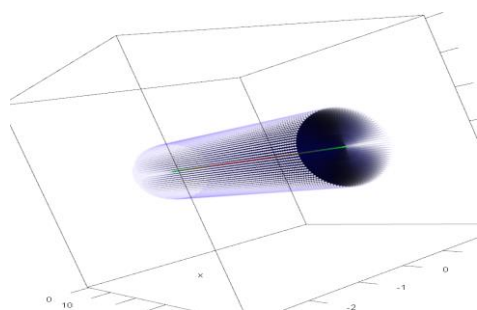
$$\text{Vermelho} = T(x, t)/T_i; \text{ Verde} = 1 - T(x, t)/T_i; \text{ Azul} = 0.$$

Observamos as escalas de temperaturas na figura 3:

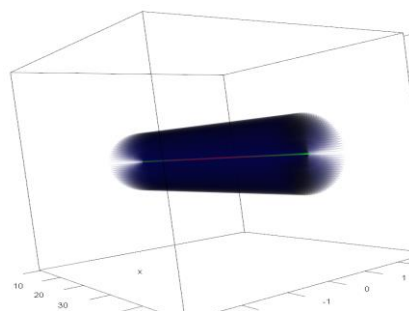


**Figura 3. Distribuição de temperaturas por cores. Fonte: autoria própria.**

Dessa forma, podemos observar as temperaturas da barra de metal no tempo  $t = 100$ , se utilizando seis termos da série, na Figura 4; as cores da barra de metal e do isolamento superficial, foram escolhidas de forma arbitrária, de modo a ressaltar as cores das temperaturas internas. De forma que a barra é disposta na cor Violeta e o isolamento como azul-claro; a fim de discernir melhor a barra do isolamento, a Figura 4(b) é dada na mesma situação da Figura 4(a), sem a presença gráfica do isolamento.



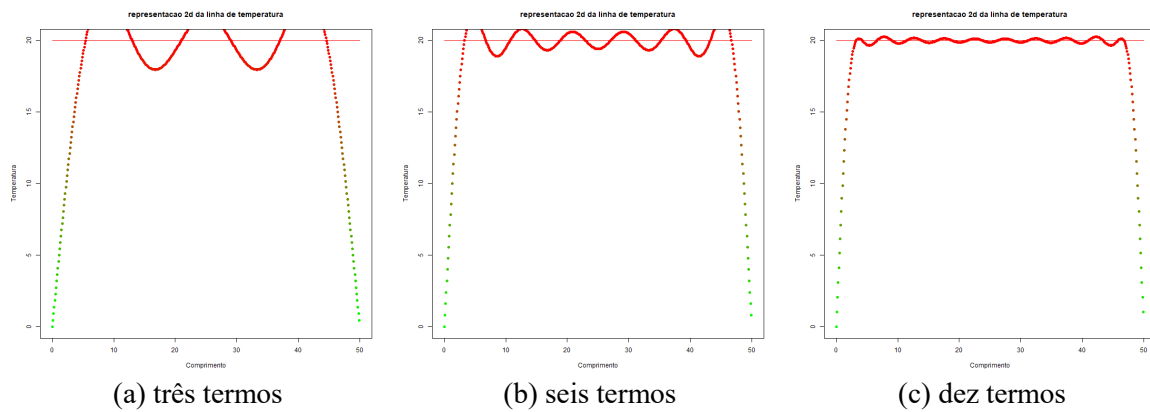
(a) barra de metal, com isolamento, t=100



(b) barra de metal, sem isolamento, t=100

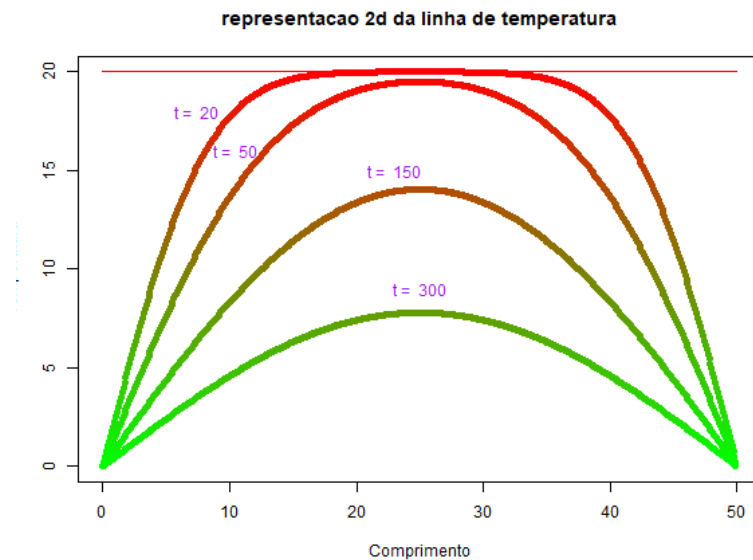
**Figura 4. Barra de metal para tempo 100. Fonte: autoria própria.**

A escolha da quantidade de termos da série, para a plotagem e análise gráfica, foi definida a partir do custo computacional e dos resultados obtidos. A série para três, seis, dez, quinze, vinte, oitenta e vinte e cinco termos foi testada de forma que, para cento e vinte, oitenta e vinte termos, os recursos computacionais seriam insuficientes para a execução das simulações e edições dos vídeos. Entretanto, se analisando a convergência da série, foi percebido que, com exceção para  $t \leq 1$ , poucos termos seriam necessários para se obter bons resultados, se escolhendo assim seis como o número de termos a serem utilizados. A Figura 5 exibe, para  $t \leq 1$ , as variações dos resultados de acordo com o número de termos na série.



**Figura 5: A Série de Fourier para três, seis e dez termos. Fonte dados da pesquisa.**

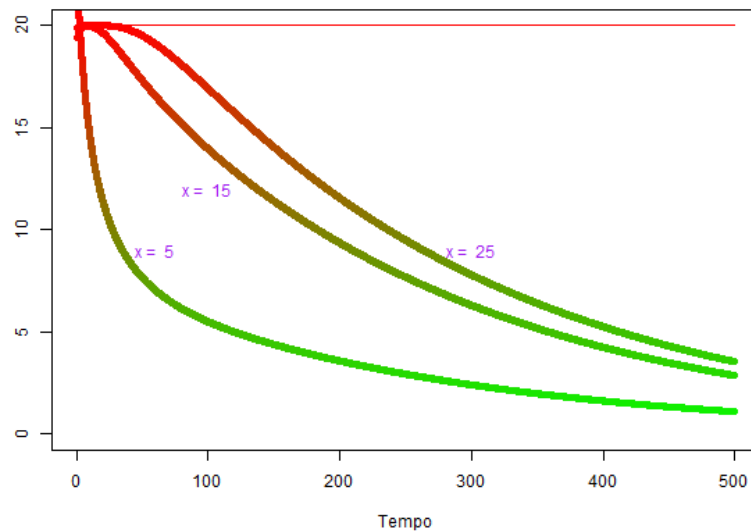
É possível também observarmos a variação da temperatura em toda a barra, se utilizando a série com seis termos, para os tempos 20, 50, 150 e 300, como exibido na Figura 6.



**Figura 6. Disposição da temperatura na barra nos tempos 20, 50, 150 e 300. Fonte: dados da pesquisa.**

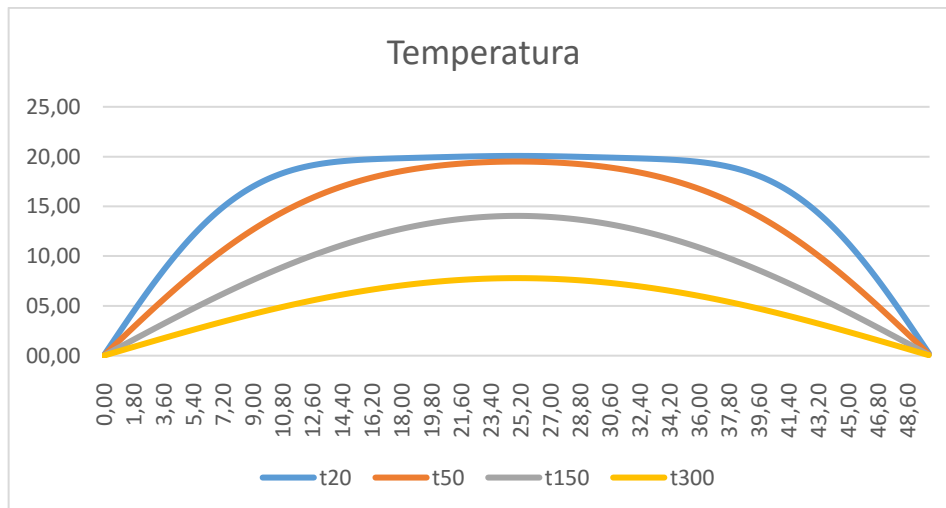
Podemos também observar, na Figura 7, a temperatura nos pontos 5, 15 e 25, entre os tempos  $t = 0$  e  $t = 400$ .





**Figura 7. Temperaturas em x=5, x=15 e x=25 para o tempo variando de zero a 400. Fonte: dados da pesquisa.**

Durante o processo de desenvolvimento de forma conjunta com a aplicação em linguagem R, pode ser observado o comportamento semelhante da temperatura em relação a determinada posição da barra com o tempo. O comportamento da temperatura é semelhante para as duas aplicações, como pode ser representado na Figura 8, as temperaturas para os tempos 20, 50, 150 e 300.



**Figura 8. Comportamento da temperatura em função do tempo e comprimento da barra. Fonte: dados da pesquisa.**

A aplicação em linguagem C, foi construída para a demonstração de forma generalizada para dados de entrada, assim existindo variação dos dados de entrada, como a difusividade térmica  $\alpha^2$ , o tempo desejado t, o tamanho da barra L e a quantidade de termos n será realizado um novo cálculo com base nos valores apresentados.

## 6. Conclusão

A partir do exposto, verifica-se que o problema de difusão de calor em uma barra pode ser solucionado utilizando a Série de Fourier. Este método é muito útil pois é possível decompor uma função periódica complexa em somas de senos e cossenos, obtendo funções elementares. Foi desenvolvido um algoritmo que permite simular para diferentes materiais e variadas condições de contorno, utilizando a Série de Fourier, e uma observação importante é que quanto mais termos são usados na série, mais precisa é o seu valor, porém isso envolve um grande custo computacional. Além disso é possível verificar que a Série de Fourier não se limita apenas para a resolução de problema envolvendo difusão de calor, possui uma larga aplicação em problemas nas áreas da física, engenharias e matemática.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a aplicação da metodologia empregada na análise da barra de metal, para a avaliação do comportamento térmico de demais fenômenos. Além disso, outra sugestão é Fuzzificar a série de Fourier, afim de verificar se a abordagem melhoraria o modelo.

## Referências

- Boldrini, J. L. Álgebra Linear. 3ª edição, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- Boyce W.E, Diprima R.C, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 9ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- Boyce W.E, Diprima R.C, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 3ª edição, LTC, 2006.
- Boyce W.E, Diprima Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems 7th Ed.
- Junior A.P.C. Séries de Fourier. Instituto Federal do Paraná - Campus Paranaguá
- OPPENHEIM A. C, WILLSKY A.S, Sinais e sistemas. 2º edição. Editora: Pearson Education do Brasil, 2010.
- Santos F. J, Introdução às séries de Fourier, Julho de 2004. Disponível em: [http://www.matematica.pucminas.br/profs/web\\_fabiano/calculo4/sf.pdf](http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf), Acesso em: 01/07/2017.
- Schildt H. C The Complete Reference 4th Ed, McGraw-Hill Education, 2000
- Souza, D. F., Sobral Cintra, R. J., & Oliveira, H. M. (2005). Uma Ferramenta para Análise de Sons Musicais: A Série Quantizada de Fourier. In Anais. XXII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES - SBT'05, CAMPINAS – SP, 2005.