

# Programa para o cálculo de velocidade em curvas inclinadas com atrito

Vinícius Dornelles Vila<sup>1</sup>, Tatiana Annoni Pazeto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Curso de Bacharelado em Engenharia Mecânica – Universidade Federal de Rondonópolis (UFR)  
<sup>2</sup>Curso de Bacharelado em Sistemas de Informação – Universidade Federal de Rondonópolis (UFR)  
Rodovia Rondonópolis-Guiratinga, KM 06 (MT 270) – Sagrada Família  
78.735-910 – Rondonópolis– MT– Brasil

vinicius3vila@hotmail.com, tpazeto@gmail.com

**Abstract.** *In high performance auto racing, the relationship between the car and the track is object of studies. Regarding the making of turns, this article aims to calculate how fast or slow these can be made without vehicle slipping. In this sense, the speed at which the driver performs it must be precise for maximum use of the time and the car. For this calculation, bibliographic research was carried out, as well as analysis of related software. Finally, the results found aim to help in the didactics of the subject of mechanics, by condensing the variants of the slipping phenomenon in Maximum and Minimum speed, through the developed program.*

**Resumo.** *No automobilismo de alta performance, a relação entre o carro e a pista é objeto de estudos. No que tange à realização de curvas, esse artigo visa calcular quão rápido ou devagar essas podem ser feitas sem deslizamento do veículo. Nesse sentido, a velocidade em que o piloto a realiza deve ser precisa para um máximo aproveitamento do tempo e do carro. Para tal cálculo, pesquisas bibliográficas foram feitas, bem como análise de softwares correlatos. Por fim, os resultados encontrados visam auxiliar na didática da matéria de mecânica, ao condensar as variantes do fenômeno de deslizamento em velocidade Máxima e Mínima, através do programa desenvolvido.*

## 1. Introdução

O cálculo de velocidade em curvas é de suma importância para mensurar o comportamento de veículos leves em curvas, principalmente quanto a inclinação da pista e o atrito do pneu com o asfalto. O cálculo é utilizado, por exemplo, em circuitos de alta performance a fim de extrair o máximo dos carros sem que haja a perda de atrito e consequentemente da condutibilidade do veículo.

Para chegar aos cálculos utilizados, foram necessárias várias pesquisas em sites, artigos e livros relacionados a disciplina de Física Geral, especificamente a matéria de mecânica. Através das plataformas Google Acadêmico, Scielo e Google, pesquisando pelos títulos “Max velocity on banked road”, “Velocidade máxima em curvas”, entre outros, bem como conversas com professores das áreas envolvidas, a bibliografia foi obtida. Também foi realizada uma análise de softwares correlatos ao tema.

O programa foi desenvolvido em SciLab, que visa auxiliar, através da utilização de interfaces gráficas, na resolução do cálculo de velocidade máxima e mínima por meio de dados de entrada fornecidos pelo usuário. O software tem funcionamento simples,

onde o usuário irá escolher as opções do terreno de estudo, o raio da curva e a sua inclinação. Em seguida, o cálculo é feito pelo programa e os resultados são apresentados.

O artigo está estruturado em cinco seções. A base teórica do cálculo e as variáveis utilizadas para o mesmo são apresentadas na seção 2. A seção 3 versa sobre quatro trabalhos correlatos. Na próxima consta o desenvolvimento e funcionamento do programa. Na seção 5 constam as conclusões. Por fim, estão as referências.

## 2. Fundamentação Teórica

No automobilismo, fenômenos diversos atuam sobre o carro. Assim, a descrição do seu comportamento, por meio de modelos matemáticos, é altamente relevante. No curso de Engenharia Mecânica, esse tema é parcialmente estudado na disciplina de Dinâmica, que estuda os corpos em movimento e suas forças envolvidas.

Para esse estudo, analisa-se as forças que estão presentes no carro quando esse está na curva, sendo as principais: Peso, Força Normal e Atrito. Além disso, é necessário analisar o raio da curva e a angulação da mesma.

Para facilitar os cálculos, as forças atuam sobre uma partícula, não sendo essa sujeita a variação do seu centro de massa em relação à inclinação da pista, fenômeno que ocorre na natureza e depende de cada modelo de veículo [Salvo, 2017].

Para o cálculo das velocidades máximas e mínimas é criado um sistema, oriundo de um diagrama de forças, conforme a Figura 1. Esse padrão é demonstrado por Ramalho (2007). Ao ser resolvido, os sistemas geram as velocidades limite para que o carro não deslize para dentro e para fora da curva.

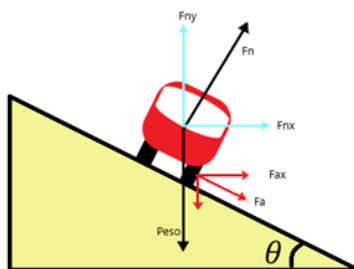


Figura 1: Diagrama de forças

A partir das incógnitas mostradas na Figura 1, montando um somatório das forças em cada eixo (x e y), pode-se deduzir as fórmulas finais, que são expressas na Tabela 1 junto com as incógnitas para a resolução do cálculo.

Tabela 1: Fórmulas para cálculo de velocidade máxima e mínima e suas incógnitas

Velocidade Máxima	Velocidade Mínima	Incógnitas das Equações
$V_{max} = \sqrt{\frac{r \times g \times (\sin \theta + (\mu \times \cos \theta))}{\cos \theta - (\mu \times \sin \theta)}}$	$V_{min} = \sqrt{\frac{r \times g \times (\sin \theta - (\mu \times \cos \theta))}{\cos \theta + (\mu \times \sin \theta)}}$	Vmin: Velocidade Mínima Vmax: Velocidade Máxima r: Raio g: Gravidade μ: Coeficiente de Atrito Θ: Ângulo de inclinação da pista

Fonte: Ramalho; Gilberto; Toledo (2007)

Outro fator importante no cálculo é o coeficiente de atrito. Esse foi difícil de encontrar pelo caráter empírico das medições (que variam de acordo com o tipo de asfalto, as condições do pneu e variando de acordo com o modelo do veículo) que geram

resultados aproximados. Além disso, das tabelas encontradas, grande parte trabalhava com outros materiais exceto asfalto e pneu (borracha). Porém encontrou-se a Tabela 2.

**Tabela 2: Coeficiente de atrito estático**

Velocidade do veículo Km / h	Condições dos pneus	Condições da estrada seca	Condições da estrada Molhada (água com +/- 0,2 mm de profundidade) $\mu_{MF}$	Chuvas fortes (água com +/- 0,1 mm de profundidade) $\mu_{MF}$	Poças (água com +/- 0,2 mm de profundidade) $\mu_{MF}$	Gelo (gelo preto)
50	Novo	0,85	0,65	0,55	0,5	0,1 and less
	Desgastado	1	0,5	0,4	0,25	
90	Novo	0,8	0,6	0,3	0,05	
	Desgastado	0,95	0,2	0,1	0,05	
130	Novo	0,75	0,55	0,2	0	
	Desgastado	0,9	0,2	0,1	0	

Fonte: Mahmoud; Mohamed (2007)

Na Tabela 2 há valores empíricos para asfalto seco, molhado ou congelado, bem como a condição do pneu. Esses valores são importantes para o cálculo do programa, fornecendo opções para o usuário que não souber qual coeficiente usar.

## 2.1 Aplicando as Fórmulas

Aplicando as equações apresentadas na Tabela 1, elaborou-se um exemplo para a resolução analítica. Para isso, foi considerada uma pista com raio de 300m, angulação de 28°, com um coeficiente de atrito de 0,3 e a gravidade como 9.81m/s<sup>2</sup>. O resultado das velocidades máxima e mínima são apresentadas na Figura 2.

$V_{max} = \sqrt{\frac{300 \times 9,81 \times (\sin 28 + (0,3 \times \cos 28))}{\cos 28 - (0,3 \times \sin 28)}}$ $V_{max} = \sqrt{2912,2643}$ $V_{max} \cong 54 \text{ m/s}$	$V_{min} = \sqrt{\frac{300 \times 9,81 \times (\sin 28 - (0,3 \times \cos 28))}{\cos 28 + (0,3 \times \sin 28)}}$ $V_{min} = \sqrt{588,1097}$ $V_{min} \cong 24,2 \text{ m/s}$
---	--

**Figura 2: Resolução analítica das equações apresentadas na Tabela 1.**

A partir da Figura 2 pode-se mencionar que a velocidade máxima e mínima são aproximadamente 54 m/s e 24,2 m/s, respectivamente.

## 3. Trabalhos Correlatos

Para obter melhores resultados, bem como parâmetros e modelos para elaborar a interface gráfica, é importante comparar com softwares existentes, intuito dessa seção.

O programa ilustrado na Figura 3 A) foi desenvolvido pela HyperPhysics e pode ser executado na internet. Possui como vantagem a conversão instantânea para três unidades de medida: m/s, km/h e mi/h.

O programa da Figura 3 B) foi criado por Rizzo (2012) e é executado no Excel.

<p>For a highway curve of radius <math>r = 300</math> m = 984.251968 ft          where the angle of bank is <math>\theta = 28</math> °          and the coefficient of static friction is <math>\mu_s = 0.3</math>          the maximum speed for the banked road with this coefficient of friction is  <math>V_{max} = 53.9378876</math> m/s = 120.653660 mi/hr = 194.176395 km/hr.          For comparison, the maximum speed with zero friction would be  <math>V_{max} = 39.5376495</math> m/s = 88.4417681 mi/hr = 142.335538 km/hr.          and the maximum speed for a flat road with this coefficient of friction would be  <math>V_{max} = 29.6984848</math> m/s = 66.4325406 mi/hr = 106.914545 km/hr.</p>	<p>Raio da curva: R <input type="text" value="300"/> [metros]          Ângulo inclinação: <math>\theta</math> <input type="text" value="28"/> [graus]          Coeficiente de atrito: <math>\mu</math> <input type="text" value="0.3"/>          Velocidade máxima: <input type="text" value="53.9"/> m/s    <input type="text" value="194.2"/> km/h          Velocidade sem atrito, mas com a inclinação indicada: <input type="text" value="39.5"/> m/s    <input type="text" value="142.3"/> km/h          Velocidade máxima para esta curva horizontal e plana, mas com este coeficiente de atrito: <input type="text" value="29.7"/> m/s    <input type="text" value="106.9"/> km/h</p>
<p>Fonte: Nave (2001)          A) Maximum Speed on Banked Roadway</p>	<p>Fonte: Rizzo (2012)          B) Velocidades Máximas</p>

**Figura 3: Uso dos softwares: A) Maximum Speed on Banked Roadway; B) Velocidades Máximas.**

Quanto a Figura 3 A) e B) utilizou-se o mesmo valor de raio da resolução analítica mostrada na Figura 2. No entanto, para o software *Maximum Speed on Banked Roadway*, informando o raio, os demais valores são preenchidos pela média de cada variável. Salienta-se que o software usa a mesma equação apresentada na Tabela 1.

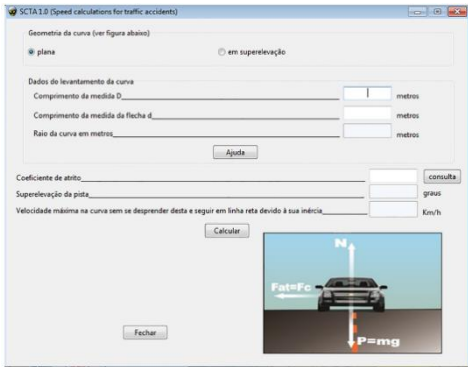
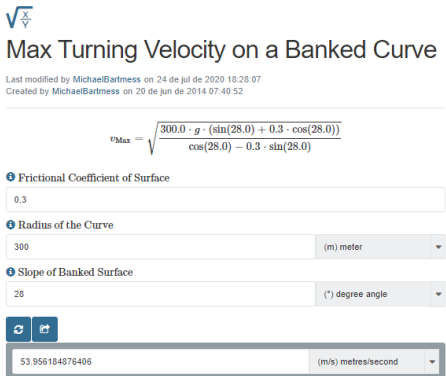
Consoante a Figura 3 B) a fórmula fornecida na interface do programa está com um sinal digitado errado, comparada com a fórmula apresentada nas Figura 2 e 3 A).

Contudo, ambos os programas da Figura 3 resultam no mesmo valor da velocidade máxima (53,9 m/s.), sendo o mesmo valor calculado analiticamente.

No entanto, eles não calculam a velocidade mínima e também não permitem ao usuário informar o tipo de pneu e da estrada, sendo também um dos objetivos do programa que será desenvolvido.

O software apresentado na Figura 4 A) é de acesso restrito, necessitando que o interessado em o utilizar comunique a equipe de desenvolvedores através do e-mail fornecido pela própria equipe. Infelizmente, após duas tentativas, não foi possível estabelecer contato com a equipe, impossibilitando possíveis testes com esse programa.

O programa ilustrado na Figura 4 B) foi desenvolvido por Bartmess (2014) dentro da plataforma online vCalc, uma plataforma de calculadora online que conta com diversos cálculos programados por colaboradores.

 <p>Fonte: Gurgel <i>et al.</i> (2015)</p> <p>A) Cálculo de Velocidade em Acidentes de Trânsito</p>	 <p>Fonte: Michael Bartmess (2014)</p> <p>B) <i>Max Turning Velocity on a Banked Curve</i></p>
---	---

**Figura 4: Interface do software A e demonstração do resultado do software B**

Consoante ao programa da Figura 4 A), apesar de não ter acesso ao programa, esse por sua vez não tem foco relacionado a velocidades em curvas inclinadas. O programa é relacionado ao cálculo de velocidades em acidentes de trânsito.

No que tange a Figura 4 B) o site possui uma demonstração intuitiva da aplicação da fórmula, onde, conforme o usuário preenche as variáveis, elas são substituídas na fórmula. O resultado também se mostrou bem preciso, sem arredondamentos. Ressalta-se novamente que ambos focam apenas na velocidade máxima, ignorando a mínima para curvas inclinadas.

#### 4. Software Desenvolvido e Demonstração dos Resultados

O programa foi denominado Cálculo de Velocidade em Curva. O mesmo foi criado na ferramenta SciLab. O SciLab é um software livre e é muito similar ao Matlab que é um

software proprietário. Uma comparação entre o Matlab e o SciLab é realizada por Coman *et al* (2012).

O Scilab foi o software escolhido por ser usado no curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Rondonópolis (UFR) na disciplina de Informática para Engenharia.

Para iniciar o desenvolvimento da interface foi usada a técnica de sketching, que consiste em desenhos a mão livre como forma de expor ideias e memórias. Os esboços são compostos por elementos muito simples, como linhas, retângulos, palavras, visando elaborar o desenho da interface do projeto final. Essa mesma técnica foi usada por Victoria (2017). Após a avaliação do esboço iniciou-se o desenvolvimento do programa.

A Figura 6 ilustra a interface do programa, bem como os resultados obtidos através da entrada dos dados solicitados pelo usuário. Para a condição da pista há as seguintes opções: a) Asfalto Seco; b) Asfalto Molhado (0.02mm); c) Asfalto Molhado (1mm); d) Asfalto Molhado (2mm); e) Gelo; f) Outros, junto com as opções de Condição do Pneu: a) Pneu Novo; b) Pneu Velho, onde foi escolhido a opção “outros” para a condição de pista.

CÁLCULO DE VELOCIDADE EM CURVAS					
Raio da Pista	300	Coeficiente de Atrito	0.3	Condição da Pista	Outros
Ângulo de Inclinação	28	CALCULAR		Condição do Pneu	Pneu Novo
Velocidade Máxima		194.275 Km/h	53.9654 m/s		
Velocidade Mínima		87.3035 Km/h	24.2309 m/s		

**Figura 6: Interface do programa desenvolvido com os resultados obtidos**

O software tem funcionamento simples, assim como os apresentados na seção 3. O usuário irá escolher o coeficiente de atrito, o raio da curva e a sua inclinação. Caso o usuário não saiba qual valor utilizar para o coeficiente de atrito, é adicionada a opção de escolha para condição da pista e dos pneus, baseado nos valores referenciados na Tabela 2. Caso o usuário já saiba o coeficiente de atrito, ele pode escolher a condição de pista “Outros” e a condição do Pneu ficará bloqueada, sendo que ela seria desnecessária. Em seguida, o cálculo é feito pelo programa e os resultados são apresentados para o usuário.

Os trabalhos correlatos foram importantes, possibilitando analisar a melhor forma de desenvolver a interface, bem como usar o botão calcular para a obtenção dos resultados. O mesmo botão foi usado no programa Cálculo de Velocidades em Acidentes de Trânsito. Vale salientar que, segundo Krug (2006), os botões “devem ser óbvios, evitando assim que os usuários fiquem na dúvida se eles são clicáveis ou não”. Esse também foi o motivo para denominá-lo calcular. Outro fator dos programas da seção 3 foi apresentar os resultados usando duas unidades de medidas: quilômetros por hora (km/h) e metros por segundo (m/s). A partir da entrada dos dados pelo usuário, as velocidades máxima e mínima são calculadas, usando as mesmas fórmulas da Tabela 1, bem como no software *Maximum Speed on Banked Roadway*.

No que se refere à interface, usou-se botões de seleção, bem como caixas de texto. Maiores informações sobre a identificação dos objetos de Interfaces Homem-Computador

podem ser obtidas em Cybis (1994). A escolha desses objetos se justifica por permitirem a execução apenas pelo mouse, bem como por evitar a escolha de caracteres indesejados, por teclado, através de digitação, variáveis receberem valores negativas, entre outros problemas que impactariam na resolução do cálculo.

Em relação ao coeficiente de atrito, segundo a tabela que se encontra na seção 2, empiricamente podem ser encontrados valores que dependem tanto da condição do pneu (novo ou desgastado) quanto de condições de pista encontradas cotidianamente (seca, molhada, gelo, etc.). Tal relação torna mais intuitiva a escolha pelo usuário que também terá a possibilidade de inserir um valor conhecido, caso deseje.

Considerando o mesmo exemplo da seção 2, usando o raio de 300m, coeficiente de atrito de 0.3 e a angulação de 28°, obteve-se os mesmos resultados. Os valores obtidos corroboram que os cálculos do programa desenvolvido estão corretos, sendo o mesmo resultado da velocidade máxima obtida nos softwares correlatos.

## 5. Conclusão

A pesquisa na área do automobilismo, no que se refere a segurança dos pilotos, economia de recursos, aumento de desempenho, entre outros, é importante e necessária. Assim, o programa “Cálculo de Velocidade em Curva” apresenta-se de forma intuitiva, mesmo para usuários leigos, podendo ser uma ferramenta didática. Outrossim, as velocidades mínima e máxima foram calculadas, sendo o objetivo do trabalho.

Ao longo do trabalho algumas dificuldades foram encontradas, tais como a utilização da ferramenta SciLab. Essa linguagem de programação não possui muitos livros e matérias didáticos para o desenvolvimento de interfaces. Pelas pesquisas realizadas, apenas oito livros foram encontrados, sendo dois em português. Desses dois, nenhum menciona como desenvolver interfaces gráficas. Além disso, o help do SciLab (2020) não apresenta muitas informações. Além disso, como os valores de atrito são encontrados empiricamente, a busca de valores confiáveis foi exaustiva.

Um próximo passo na melhora do software seria a consideração do centro de gravidade do veículo nos cálculos, tornando-os mais refinados e condizentes com a realidade, visto que caminhões, por exemplo, não possuem os mesmos valores como limite, devido ao elevado centro de gravidade. Outra forma de dar continuidade ao trabalho é testando o software com alunos do ensino médio, como na matéria de física, mais especificamente no assunto de cinemática, já que descreve por meio de conceitos o atrito, ângulo e raio a velocidade de um carro.

## Referências

- Bartmess, M. (2014). “Max Turning Velocity on a Banked Curve”. Disponível em: <<https://www.vcalc.com/wiki/MichaelBartmess/Max+Turning+Velocity+on+a+Banked+Curve>> Acesso em: 13 out. 2021.
- Coman, E.; Brewster, M.; Popuri, S.; Raim, A.; Gobbert M. “A Comparative Evaluation of Matlab, Octave, FreeMat, Scilab, R, and IDL on Tara”. Technical Report HPCF–2012–15, Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County.
- Cybis, W. A. A Identificação dos objetos de Interfaces Homem-Computador e de seus atributos ergonômicos. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1994.

- Gurgel, W. P.; Gomes, L.M.; Ferreira, F.C.L.; Gester, R.M. “Cálculo de velocidades em acidentes de trânsito: Um software para investigação em física forense”. Rev. Bras. Ensino Fís. vol.37 no.4 São Paulo Oct./Dec. 2015.
- Krug, S. Não Me Faça Pensar: uma abordagem de bom senso à usabilidade web. Tradução de Acauan Pereira Fernandes. 2. ed. São Paulo: AltaBooks, 2006.
- Mahmoud, A.; Mohamed, E. “Wheel speed distribution control and its effect on vehicle handling”. Electronic Thesisor Diss., University of Leeds School of Mechanical Engineering, 2007.
- Nave, C. R. (2001). Maximum speed on banked roadway. Department of Physics and Astronomy, Georgia State University: Atlanta, Georgia. Disponível em: < <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Mechanics/carbank.html> > Acesso em: 01 mar. 2019.
- Ramalho, F. J.; Gilberto, N. F.; Toledo, P. A. Os fundamentos da Física. São Paulo: Moderna, Vol.1 Ed. 9, 2007.
- Rizzo, G. (2012). “Automobilismo – Curvas III”. Brasília, disponível em: <https://rizzofisico.wordpress.com/2012/07/17/automobilismo-curvas-iii/>. Acesso em: 10 out. 2021.
- SciLab. Ajuda do Scilab. Disponível em: [https://help.scilab.org/docs/6.1.0/pt\\_BR/index.html](https://help.scilab.org/docs/6.1.0/pt_BR/index.html). Acesso em: 22 jun. 2021.
- Victoria, I. C. M.; Figueiredo, L. F. G. Design de produto aplicado à cultura slow: mobiliário urbano modular. Monografia (Graduação de Bacharel em Design), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.
- Salvo, M. P.; Grande, P. C. (2017). “O raio-x das forças físicas que atuam sobre o carro em curvas”. Disponível em: < <https://quatrorodas.abril.com.br/auto-servico/o-raio-x-das-forcas-fisicas-que-atuam-sobre-o-carro-em-curvas/> >. Acesso em: 04 nov. 2021.