Reconhecimento linear de uma partição STABLE TREE mínima em grafos P_4-tidy

Fábio Silva[1], Raquel Bravo[1], Rodolfo Oliveira[2], Uéverton Souza[1]

[1]Instituto de Computação
Universidade Federal Fluminense (UFF)

[2]Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior
Universidade Federal Fluminense (UFF)

fabiojunior@id.uff.br, {raquel,ueverton}@ic.uff.br,

rodolfo.oliveira@infes.uff.br

Abstract. *In this work we consider the problem of finding a set of vertices $\mathcal{S}$ minimum of a graph P_4-tidy G, such that the subgraph induced by $G \setminus \mathcal{S}$ is a tree and $\mathcal{S}$ is a stable set. It was showed that this problem is NP-complete for general graphs in [Brandstädt et al. 1998]. We present an algorithm for finding a minimum set $\mathcal{S}$ in P_4-tidy graphs based on a characterization by minimal forbidden subgraphs. Through the analysis of the algorithm, we prove that this optimization problem can be solved in linear time.*

Resumo. *Neste trabalho consideramos o problema de encontrar um conjunto de vértices $\mathcal{S}$ mínimo de um grafo P_4-tidy G, tal que o subgrafo induzido por $G \setminus \mathcal{S}$ seja uma árvore e $\mathcal{S}$ seja estável. Este problema foi provado ser NP-completo para grafos gerais em [Brandstädt et al. 1998]. Apresentamos um algoritmo para reconhecimento de um conjunto $\mathcal{S}$ mínimo nos grafos P_4-tidy baseado numa caracterização por subgrafos proibidos minimais. Através da análise do algoritmo, provamos que este problema de otimização pode ser resolvido em tempo linear.*

1. Introdução

Problemas de partições em grafos estão fortemente relacionados com outros tipos de problemas em teoria dos grafos. Por exemplo, podemos considerar o problema de decidir se um grafo admite uma k-coloração [Saaty 1977] equivalente a decidir se este grafo pode ser particionado em k conjuntos estáveis disjuntos; um grafo bipartido é um grafo que no qual seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos estáveis disjuntos; assim como um grafo split [Földes and Hammer 1977] é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto estável e uma clique. Os problema de partição tem despertado bastante interesse devido às pesquisas em grafos perfeitos e suas aplicações. Enumerando algumas aplicações que podem ser abordadas através de problemas de particionamento, podemos destacar: design de circuitos VLSI, segmentação de imagens, agrupamento de páginas web com conteúdos relacionados entre si, distribuição de recursos e alocação de tarefas.

Dado um grafo G, o problema de decidir se G possui um conjunto estável $\mathcal{S}$ tal que $G \setminus \mathcal{S}$ induz uma árvore (grafo acíclico e conexo) é conhecido STABLE TREE. Em

[Brandstädt et al. 1998] foi mostrado que este problema é NP-completo mesmo quando restrito a grafos de grau máximo 3. Entretanto, foi observado também que este problema admite soluções em tempo polinomial para certas subclasses de grafos. Em [Huang and Chu 2007] foi mostrado que este problema pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos bipartidos de grau máximo 3 que não contém vértices de grau 2. Em [Silva et al. 2018], mostrou-se que este problema pode ser reconhecido em tempo linear para a classe de grafos P_4-tidy através de uma caracterização por subgrafos proibidos minimais. A importância da classe P_4-tidy para o estudo dos grafos perfeitos vem do fato de existirem subclases de P_4-tidy, como os cografos, que pertencem aos grafos perfeitos, de modo que os resultados encontrados para esta classe também podem ser aplicados em suas subclasses.

Neste trabalho estendemos o resultado encontrado em [Silva et al. 2018] mostrando que tal caracterização por subgrafos proibidos pode ser utilizada para construir um algoritmo que resolve em tempo linear a versão de otimização deste problema de decisão, isto é, dado um grafo P_4-tidy G, podemos encontrar um subconjunto de vértices $\mathcal{S} \subseteq V(G)$ mínimo tal que $G \setminus \mathcal{S}$ seja uma árvore e $\mathcal{S}$ é estável em tempo linear.

2. Preliminares

Seja G um grafo, utilizamos $V(G)$ e $E(G)$ para denotar seu conjunto de vértices e arestas, respectivamente. Denotamos por $G \setminus X$ o grafo obtido pela remoção do conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ e das respectivas arestas com alguma das extremidades em X. Um *conjunto estável* é um subconjunto de vértices de um grafo G tal que quaisquer dois vértices são não adjacentes.

Um grafo G é dito da classe P_4-tidy se para qualquer P_4 (caminho formado por 4 vértices) induzido H de G, existe no máximo um vértice fora de H que juntamente com três vértices de H induzem no máximo um P_4. Esta classe foi apresentada por [Roussel et al. 1999] para generalizar a já conhecida classe dos grafos com poucos P_4's. Uma caracterização estrutural para os grafos P_4-tidy foi apresentada em [Giakoumakis et al. 1997].

As características da decomposição modular em grafos P_4-tidy foram estudadas em [Giakoumakis et al. 1997] e eles também forneceram uma caracterização estrutural para esta classe, garantida pela construção única (a menos de isomorfismos) do grafo e de sua *árvore primeval*. Para apresentar esta caracterização precisamos primeiramente definir *aranha* e *quase-aranha*, como consta em [Jamison and Olariu 1995].

Definição 1. *Um grafo G é uma aranha se $V(G)$ admite uma partição $\mathcal{S}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é denominado cabeça, tais que:(i) $\mathcal{K}$ é uma clique, $\mathcal{S}$ um conjunto independente e $|\mathcal{S}| = |\mathcal{K}| \geq 2$; (ii) Todo vértice de $\mathcal{R}$ é adjacente a todos os vértices de K e não é adjacente a nenhum vértice de $\mathcal{S}$; (iii) Existe uma bijeção f entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$ tal que para todo $x \in \mathcal{S}$, ou $N(x) = \{f(x)\}$ ou para todo $x \in \mathcal{S}$, $N(x) = \mathcal{K} \setminus \{f(x)\}$.*

Uma aranha é dita *magra* se para todo $x \in \mathcal{S}$, $N(x) = \{f(x)\}$. Caso contrário é dita *gorda*.

Definição 2. *Dizemos que G é uma quase-aranha se G é um grafo obtido a partir de uma aranha $S = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ com a substituição de um vértice $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{K}$ por um grafo H isomorfo a K_2 ou $\overline{K_2}$, onde os vértices de H têm a mesma vizinhança de v.*

Analogamente, uma quase-aranha é dita *magra* se foi obtida a partir de uma aranha magra, caso contrário é dita *gorda*.

Teorema 1. *[Giakoumakis et al. 1997] Um grafo G é P_4-tidy se e somente se para todo subgrafo induzido H de G, exatamente uma das condições abaixo é satisfeita: (a) H é desconexo; (b) $\overline{H}$ é desconexo; (c) H é uma aranha, tal que a cabeça induz um grafo P_4-tidy; (d) H é uma quase-aranha, tal que a cabeça induz um grafo P_4-tidy; (e) H é isomorfo a C_5 (ciclo induzido com 5 vértices), P_5 (caminho induzido com 5 vértices) ou $\overline{P_5}$ (complemento de um caminho induzido com 5 vértices); (f) H possui exatamente um vértice ou $V(G) = \emptyset$.* □

Teorema 2. *[Silva et al. 2018] Seja G um grafo P_4-tidy. G possui uma partição* STABLE TREE *se, e somente se, existe no máximo um componente conexo não trivial G' em G, e G' é livre dos grafos $K_4, (P_4 \cup K_1) + I_2, H_1(net), I_2 + 2K_2, I_2 + I_2 + I_2$ ou $W_5(wheel)$.* □

A partir do teorema acima foi mostrada a construção de um algoritmo para o reconhecimento de grafos P_4-tidy em tempo linear. As demais definições necessárias para este trabalho podem ser encontradas em [Giakoumakis et al. 1997].

3. Caracterização do conjunto $\mathcal{S}$ mínimo

Teorema 3. *Seja G um grafo P_4-tidy. O reconhecimento de um conjunto $\mathcal{S} \subseteq V(G)$ mínimo tal que $G \setminus \mathcal{S}$ é acíclico e conexo pode ser realizado em tempo polinomial.*

Prova. Seja G um grafo P_4-tidy. Podemos utilizar o algoritmo apresentado em [Silva, 2018] para decidir se G admite uma partição STABLE TREE. É evidente que se G não admite uma partição STABLE TREE então não existe tal conjunto $\mathcal{S} \subseteq V(G)$ mínimo, assim, considere G sendo um grafo que admite uma partição STABLE TREE.

Pela caracterização apresentada no Teorema 1 devemos analisar os seguintes casos de G:

Caso 1. *G é desconexo.*

Como G admite uma partição STABLE TREE, podemos afirmar pelo Teorema 2 que G possui no máximo um componente conexo não trivial. Sendo assim, consideraremos dois subcasos: (i) G é livre de componentes conexos não triviais e; (ii) G possui exatamente um componente conexo não trivial.

Por questões de espaço as provas dessa seção foram omitidas.

Caso 2. *G é conexo e $\overline{G}$ é desconexo.*

Pelas propriedades da decomposição modular, escreva G como a junção de k componentes G_i's tais que $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é P_4-tidy e STABLE TREE-particionável. Analisaremos três subcasos: (i) $k \geq 4$; (ii) $k = 3$ e; (iii) $k = 2$.

Por questões de espaço as provas dessa seção foram omitidas.

Caso 3. *G e $\overline{G}$ são conexos.*

Observe que neste caso, como temos que G não é desconexo e $\overline{G}$ também não, pelo Teorema 1, temos os seguintes três subcasos à serem analisados: (i) G é isomorfo a uma aranha; (ii) G é isomorfo a uma quase-aranha e; (iii) G é isomorfo a P_5, $\overline{P_5}$ ou C_5.

Por questões de espaço as provas dessa seção foram omitidas.

Pela análise de todos os casos concluímos que é possível obter um um conjunto $\mathcal{S}$ mínimo de G em tempo polinomial. □

3.1. Algoritmo de Reconhecimento

Corolário 1. *Podemos construir um algoritmo linear para o reconhecimento de um conjunto $\mathbb{S}$ mínimo.*

Prova. Através dos passos da caracterização do Teorema 3 podemos construir um algoritmo que resolve este problema em complexidade de tempo linear e sua corretude segue diretamente da demonstração. Na entrada, o algoritmo recebe o grafo original e sua árvore de decomposição, obtida em tempo linear pelo algoritmo apresentado em [Baumann 1996]. Em sua saída, o algoritmo retorna o conjunto $\mathbb{S}$ de tamanho mínimo tal que $G \setminus \mathbb{S}$ é uma árvore. Cada passo do algoritmo executa em tempo constante ou num numero constante de iterações sobre os vértices e cada chamada recursiva diz respeito a uma subparte exclusiva do grafo. Destes fatos podemos determinar a linearidade do algoritmo. Sua implementação pode ser consultada em [Silva et al. 2019]. $\square$

4. Conclusão

Com este trabalho os autores acrescentam mais um importante resultado na linha de estudo dos problemas de partição na família dos grafos com poucos P_4's. Sendo a classe P_4-tidy uma superclasse dos grafos P_4-esparsos, P_4-esparsos extensíveis, P_4-redutíveis, P_4-redutíveis estendidos e cografos, este resultado segue diretamente para estas subclasses. Em trabalhos futuros os autores desejam concluir esta análise para a classe P_4-laden e P_4-laden estendido, finalizando assim o estudo deste problema para esta família de grafos.

Referências

Baumann, S. (1996). A linear algorithm for the homogeneous decomposition of graphs.

Brandstädt, A., Szymczak, T., et al. (1998). The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics*, 89(1-3):59–73.

Földes, S. and Hammer, P. L. (1977). Split graphs having dilworth number two. *Canadian Journal of Mathematics*, 29(3):666–672.

Giakoumakis, V., Roussel, F., and Thuillier, H. (1997). On p4-tidy graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 1.

Huang, Y. and Chu, Y. (2007). A note on the computational complexity of graph vertex partition. *Discrete applied mathematics*, 155(3):405–409.

Jamison, B. and Olariu, S. (1995). P-components and the homogeneous decomposition of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8(3):448–463.

Roussel, F., Rusu, I., and Thuillier, H. (1999). On graphs with limited number of p4-partners. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 10(01):103–121.

Saaty, T. (1977). *The four-color problem : assaults and conquest.* McGraw-Hill International Book Co, New York.

Silva, F., Bravo, R., Oliveira, R., and Souza, U. (2018). Problema de partição em conjunto independente e árvore quando restrito á classe dos grafos-p4-tidy. In *3º Encontro de Teoria da Computação (ETC)*, volume 3. SBC.

Silva, F., Bravo, R., Oliveira, R., and Souza, U. (2019). Algoritmo de reconhecimento da partição s mínima em grafos p_4-tidy STABLE TREE. `https://bit.ly/2GNidhv`. [Online; acessado 14-Fevereiro-2019].