

# Sobre Coloração de Prismas Complementares

Luiz S. Almeida<sup>1</sup>, Márcia R. Cappelle<sup>1</sup>, Diane Castonguay<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)

(luizalmeida, marcia, diane)@inf.ufg.br

**Resumo.** Este artigo investiga propriedades de coloração de prismas complementares  $G\overline{G}$ , que são grafos formados pela combinação da cópia de um grafo  $G$  com a cópia de seu complemento  $\overline{G}$  através de um emparelhamento perfeito de vértices correspondentes. Apresentamos limites superiores e inferiores para o número cromático em algumas classes de grafos. Para grafos bipartidos completos  $K_{r,s}$ , determinamos o valor exato de  $\chi(K_{r,s}\overline{K_{r,s}})$  em função de  $r$  e  $s$ . Para ciclos  $C_n$  e caminhos  $P_n$  com  $n \geq 5$ , estabelecemos que  $\chi(C_n\overline{C_n}) = \chi(P_n\overline{P_n}) = \lceil n/2 \rceil$ . Adicionalmente, apresentamos cotas inferiores para prismas complementares de grafos perfeitos e planares. Os resultados ajustam os limites de trabalhos anteriores e contribuem para o entendimento da estrutura combinatória destes grafos por meio de construções algorítmicas.

## 1. Introdução

Um grafo é um par  $G = (V, E)$ , em que  $V$  é um conjunto finito e não vazio cujos elementos são chamados de *vértices*, e  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$  é um conjunto de pares não ordenados de vértices, chamados de *arestas*. O estudo de grafos é motivado pela necessidade de representar e analisar relações entre objetos discretos, permitindo a formalização matemática de problemas práticos em computação, logística, biologia e telecomunicações. Dentro desse contexto, a investigação de propriedades estruturais em classes específicas de grafos tem mostrado ser relevante para o desenvolvimento da área.

Os prismas complementares, introduzidos por Haynes et al. [Haynes et al. 2007] são uma classe de grafos que combinam uma cópia do grafo  $G$  com uma cópia de seu complemento  $\overline{G}$  por meio de um emparelhamento perfeito de vértices correspondentes. Esta construção, denotada por  $G\overline{G}$ , é uma classe de grafos adequada para a investigação de diversas propriedades combinatórias e inclui grafos conhecidos, como o grafo de Petersen, que é o prisma complementar  $C_5\overline{C_5}$ .

A relevância desta classe de grafos é evidenciada pela crescente literatura dedicada a explorar suas propriedades. Pesquisas recentes investigaram o índice cromático (coloração de arestas) [Zatesko et al. 2019], o número  $B$ -cromático [Bendali-Braham et al. 2019], códigos de identificação [Cappelle et al. 2019, Cappelle et al. 2022], coloração injetiva [Raksha et al. 2020], o problema de  $k$ -independência [Mortosa et al. 2022] e atribuições de papéis (*role assignments*) [Castonguay et al. 2025].

Apesar do interesse em variantes de coloração e outros problemas, um estudo sistemático focado no parâmetro de coloração mais fundamental — o número cromático de vértices  $\chi(G\overline{G})$  — ainda apresenta oportunidades para uma caracterização mais completa. Enquanto problemas específicos, como a coloração de arestas e atribuições de papéis, já foram abordados, a determinação do número cromático de vértices, em sua forma clássica, para famílias de prismas complementares permanece como uma área a ser aprofundada.

Neste artigo, nosso objetivo é contribuir para o desenvolvimento dessa área, refinando a análise do número cromático de prismas complementares. Buscamos oferecer limites desse

parâmetro para algumas classes de grafos, incluindo grafos bipartidos, bipartidos completos, ciclos, caminhos, perfeitos e planares. Nossos resultados não apenas estendem os resultados de trabalhos anteriores, mas também oferecem novos *insights* sobre a estrutura dessa classe de grafos.

## 2. Preliminares

### 2.1. Definições Básicas

Nesta seção, apresentamos as definições e notações fundamentais utilizadas ao longo deste trabalho. Buscamos, sempre que possível, adotar a terminologia e as convenções de [Haynes et al. 2007, Bondy and Murty 2008].

No estudo de grafos, frequentemente precisamos identificar vértices que não estão conectados entre si. O *grau*  $\deg(v)$  de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes a  $v$ ; denotamos por  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$  o grau mínimo e o grau máximo de  $G$ , respectivamente. Um subconjunto  $S$  de vértices  $V$  de um grafo  $G$  é chamado de *conjunto independente* quando nenhum par de vértices em  $S$  é adjacente em  $G$ . O *número de independência* de  $G$ , denotado por  $\alpha(G)$ , é o tamanho do maior subconjunto de vértices de  $G$  que são mutuamente não-adjacentes.

Em contraste com conjuntos independentes, temos estruturas em que todos os vértices estão conectados. Um *grafo completo* é um grafo simples no qual cada par de vértices distintos é unido por uma aresta. Este conceito se estende naturalmente para subgrafos: uma *clique* de um grafo simples  $G = (V, E)$  é um subconjunto  $S$  de  $V$  tal que quaisquer dois vértices distintos em  $S$  são adjacentes em  $G$ . Formalmente, o *subgrafo induzido*  $G[S]$ , que contém todos os vértices de  $S$  e todas as arestas de  $G$  com ambas as extremidades em  $S$ , forma um grafo completo. Analogamente ao número de independência, definimos o *número de clique*, denotado por  $\omega(G)$ , como o tamanho do maior subconjunto de vértices de  $G$  que são mutuamente adjacentes, quantificando o maior agrupamento completamente conectado possível no grafo.

Uma relação fundamental entre esses conceitos surge através do *grafo complementar*  $\overline{G}$  de um grafo  $G$ . O grafo  $\overline{G}$  possui o mesmo conjunto de vértices que  $G$ , mas dois vértices são adjacentes em  $\overline{G}$  se e somente se não são adjacentes em  $G$ . Esta dualidade revela que conjuntos independentes em  $G$  correspondem exatamente a cliques em  $\overline{G}$ , e vice-versa, estabelecendo assim que  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$  e  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é *bipartido* se existe uma partição de  $V = A \cup B$  com  $A \cap B = \emptyset$  tal que toda aresta de  $E$  conecta um vértice de  $A$  a um vértice de  $B$ . O *grafo bipartido completo*  $K_{r,s}$ , com  $1 \leq r \leq s$ , é um grafo bipartido onde  $|A| = r$  e  $|B| = s$ , e cada vértice de  $A$  é adjacente a todos os vértices de  $B$ .

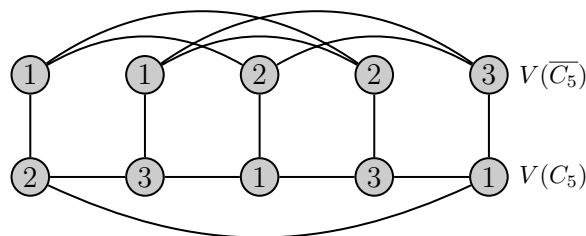
Um grafo  $G$  é *perfeito* se, para todo subgrafo induzido  $G[S]$  de  $G$ , o número cromático de  $G[S]$  é igual ao tamanho de sua maior clique, isto é,  $\chi(G[S]) = \omega(G[S])$ . Esta classe inclui diversas classes de grafos conhecidos como grafos bipartidos. Um grafo é *planar* se pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem, exceto nos vértices. Pelo célebre Teorema das Quatro Cores, todo grafo planar pode ser colorido com no máximo quatro cores, ou seja,  $\chi(G) \leq 4$  para todo grafo planar  $G$ . Estas duas classes de grafos — perfeitos e planares — possuem aplicações práticas em áreas como otimização combinatória e desenho de circuitos.

Outro conceito fundamental na teoria dos grafos é a coloração de vértices. Seja  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  um conjunto de  $k$  cores. Uma *k-coloração de vértices* de um grafo  $G = (V, E)$  é um mapeamento  $c : V \rightarrow C$  que atribui uma cor a cada vértice. A coloração é dita *própria* se  $c(u) \neq c(v)$  para toda aresta  $uv \in E$ , isto é, vértices adjacentes recebem cores distintas. O *número cromático*  $\chi(G)$  é o menor valor de  $k$  para o qual  $G$  admite uma *k-coloração* própria.

Notavelmente, cada classe de cor em uma coloração própria forma um conjunto independente, estabelecendo uma conexão profunda entre coloração e independência em grafos.

Finalmente, unindo os conceitos de grafo e de seu complemento, temos o *prisma complementar*  $G\overline{G}$  de um grafo  $G$ . Esta estrutura é construída pela união disjunta de uma cópia de  $G$  e uma cópia de seu complemento  $\overline{G}$ , adicionando-se um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes. Formalmente,  $V(G\overline{G}) = V(G) \cup V(\overline{G})$  e  $E(G\overline{G}) = E(G) \cup E(\overline{G}) \cup \{v\overline{v} : v \in V(G)\}$ , onde  $\overline{v}$  denota o vértice correspondente a  $v$  na cópia de  $\overline{G}$ . Este produto captura simultaneamente as propriedades estruturais de um grafo e seu complementar, criando um objeto interessante para investigação teórica. Veja na Figura 1 a 3-coloração do prisma complementar  $C_5\overline{C_5}$ , conhecido como grafo de Petersen.

Para  $n \geq 1$ ,  $K_n$  e  $P_n$  denotam, respectivamente, o grafo completo e o caminho com  $n$  vértices. Para  $n \geq 3$ ,  $C_n$  denota o ciclo com  $n$  vértices. Especificamente,  $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$ ;  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}$ .



**Figura 1. Grafo de Petersen, o prisma complementar de  $C_5$ , com uma coloração própria de cardinalidade 3.**

## 2.2. Propriedades Básicas Conhecidas

As propriedades estruturais do prisma complementar seguem diretamente de sua construção. Para qualquer grafo  $G$  de ordem  $n$ , o prisma complementar  $G\overline{G}$  possui exatamente  $2n$  vértices, resultado natural da união disjunta de duas cópias de grafos com  $n$  vértices cada. Além disso, a estrutura do prisma estabelece uma relação precisa entre os graus dos vértices correspondentes: para vértices correspondentes  $v$  em  $G$  e  $\overline{v}$  em  $\overline{G}$ , temos que  $\deg(v) + \deg(\overline{v}) = n + 1$ . Esta igualdade reflete o fato de que  $v$  está conectado a seus vizinhos em  $G$ , enquanto  $\overline{v}$  está conectado aos não-vizinhos de  $v$  no grafo original, e ambos estão conectados entre si através da aresta do emparelhamento perfeito.

No contexto mais amplo da teoria dos grafos, uma desigualdade fundamental relaciona o número cromático com outros parâmetros do grafo. Para qualquer grafo  $G$  de ordem  $n$ , vale que  $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$ . Esta cota inferior captura duas restrições essenciais: primeiro, precisamos de pelo menos  $\omega(G)$  cores para colorir adequadamente uma clique máxima; segundo, como cada classe de cor forma um conjunto independente de tamanho no máximo  $\alpha(G)$ , precisamos de pelo menos  $n/\alpha(G)$  cores para acomodar todos os vértices. Estas relações fornecem ferramentas valiosas para a análise estrutural de grafos e seus prismas complementares.

**Teorema 2.1** ([Haynes et al. 2007]). *Para qualquer grafo  $G$ :*

$$\max\{\chi(G), \chi(\overline{G})\} \leq \chi(G\overline{G}) \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}).$$

O limite inferior segue do fato de que  $G$  e  $\overline{G}$  são subgrafos de  $G\overline{G}$ . Para o limite superior, podemos colorir a cópia de  $G$  com  $\chi(G)$  cores e a cópia de  $\overline{G}$  com um conjunto disjunto de  $\chi(\overline{G})$

novas cores. Como não há arestas entre as cópias, exceto entre vértices correspondentes (que terão cores de conjuntos disjuntos), a coloração é válida.

Este teorema estabelece limites fundamentais para o número cromático do prisma complementar. Por exemplo, considerando  $G = K_3$ , temos  $\chi(G) = 3$  e  $\chi(\overline{G}) = 1$ , resultando em  $\chi(G\overline{G}) = 3$ , que satisfaz a desigualdade  $3 \leq 3 \leq 4$ .

**Teorema 2.2** ([Haynes et al. 2007]). *Para todo grafo  $G$  de ordem  $n$ :*

$$\chi(G\overline{G}) \leq n,$$

*com igualdade se e somente se  $G \in \{K_n, \overline{K}_n\}$ .*

A caracterização dos grafos que atingem o limite superior do Teorema 2.2 é particularmente elegante: apenas o grafo completo e o grafo vazio resultam em prismas complementares com número cromático máximo. De fato, para  $G = K_4$ , obtemos  $\chi(G\overline{G}) = 4$ , confirmando que o limite superior é atingido precisamente quando  $G$  é um grafo completo.

**Teorema 2.3** ([Haynes et al. 2007]). *Para todo grafo  $G$ :*

$$\alpha(G) + \alpha(\overline{G}) - 1 \leq \alpha(G\overline{G}) \leq \alpha(G) + \alpha(\overline{G}),$$

Os limites para o número de independência do prisma complementar revelam uma relação quase aditiva entre os números de independência de  $G$  e  $\overline{G}$ . Um caso ilustrativo é o ciclo de 5 vértices  $C_5$ , onde  $\alpha(C_5) = 2$ ,  $\alpha(\overline{C}_5) = 2$ , e  $\alpha(C_5\overline{C}_5) = 3$ . Estes valores satisfazem a desigualdade  $3 \leq 3 \leq 4$ , mostrando que o limite inferior pode ser estritamente menor que o superior, diferentemente do que ocorre em muitos casos particulares.

### 3. Resultados

Nesta seção, apresentamos nossos principais resultados. Estabelecemos uma desigualdade geral para grafos bipartidos e determinamos o número cromático exato para prismas complementares de grafos bipartidos completos, ciclos e caminhos. Concluimos com cotas inferiores para grafos perfeitos e planares.

**Teorema 3.1** (Coloração de Prismas Complementares de Grafos Bipartidos). *Seja  $G = (A \cup B, E)$  um grafo bipartido com  $n = |A| + |B|$  vértices. Então:*

$$\chi(G\overline{G}) \leq \min\{n, 2 + \chi(\overline{G})\}.$$

*Demonstração.* Pela desigualdade geral  $\chi(G\overline{G}) \leq \chi(G) + \chi(\overline{G})$  e o fato de que  $\chi(G) = 2$  para grafos bipartidos, obtemos  $\chi(G\overline{G}) \leq 2 + \chi(\overline{G})$ . Além disso, pelo Teorema 2.2, temos  $\chi(G\overline{G}) \leq n$ .  $\square$

Ilustramos o Teorema 3.1 considerando o grafo bipartido  $G$  com  $n = 8$  vértices, formado pela junção de duas estrelas  $K_{1,3}$  através de uma aresta entre seus vértices centrais. O maior conjunto independente de  $G$  é formado por seus 6 vértices-folha, que correspondem a uma 6-clique em  $\overline{G}$ . Assim,  $\omega(\overline{G}) = 6$  e, portanto,  $\chi(\overline{G}) \geq 6$ . Para mostrar que  $\chi(\overline{G}) = 6$ , atribuímos cores distintas aos vértices da clique e observamos que os vértices centrais  $c_1$  e  $c_2$  podem receber cores já utilizadas:  $c_1$  pode assumir a cor de uma de suas folhas originais, pois em  $\overline{G}$  ele é adjacente apenas às folhas de  $c_2$  (e analogamente para  $c_2$ ). Aplicando o teorema, obtemos  $\chi(G\overline{G}) \leq \min\{8, 2 + 6\} = 8$ .

**Teorema 3.2** (Coloração de Prismas Complementares de Grafos Bipartidos Completos). *Para o grafo bipartido completo  $K_{r,s}$  com  $1 \leq r \leq s$ , o número cromático de seu prisma complementar é:*

$$\chi(K_{r,s}\overline{K_{r,s}}) = s$$

*exceto quando  $(r = 1 \text{ e } s < 3)$  ou  $(r = s < 4)$ , casos em que  $\chi(K_{r,s}\overline{K_{r,s}}) = s + 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $G = K_{r,s}$  com conjuntos de vértices  $R$  e  $S$  de tamanhos  $|R| = r$  e  $|S| = s$ . O grafo complementar,  $\overline{G}$ , é a união disjunta dos grafos completos  $K_r$  (induzido pelos vértices de  $\overline{R}$ ) e  $K_s$  (induzido pelos vértices de  $\overline{S}$ ). O prisma complementar  $G\overline{G}$  é formado por  $G$ ,  $\overline{G}$  e uma correspondência perfeita entre os vértices  $v \in V(G)$  e  $\overline{v} \in V(\overline{G})$ .

A presença da clique  $\overline{S}$  de tamanho  $s$  em  $\overline{G}$  estabelece um limite inferior para o número cromático:  $\chi(G\overline{G}) \geq \omega(G\overline{G}) \geq s$ .

Para a coloração da clique  $\overline{S}$ , sempre utilizamos  $s$  cores distintas:  $c(\overline{u}_i) = c_i$  para  $i = 1, \dots, s$ . Esta atribuição é fixa em todos os casos e consome necessariamente  $s$  cores.

Agora analisamos quando  $s$  cores são suficientes e quando uma cor adicional é necessária.

**Caso 1:**  $\chi(K_{r,s}\overline{K_{r,s}}) = s + 1$

**Subcaso 1.1:**  $r = 1$  e  $s \leq 2$ . Para  $s = 1$ ,  $G$  é um  $P_2$ , e seu prisma complementar  $P_2\overline{P_2}$  é um ciclo  $C_4$ , cujo número cromático é  $2 = s + 1$ . Para  $s = 2$ ,  $G$  é um  $P_3$ , e seu prisma complementar contém um  $C_5$  como subgrafo induzido, exigindo  $\chi(P_3\overline{P_3}) = 3 = s + 1$  cores.

**Subcaso 1.2:**  $r = s$  e  $s \in \{2, 3\}$ . Para  $s = 2$ ,  $K_{2,2}\overline{K_{2,2}}$  é o prisma de  $C_4$ , que tem  $\chi = 3 = s + 1$ . Para  $s = 3$ , é um resultado conhecido que  $\chi(K_{3,3}\overline{K_{3,3}}) = 4 = s + 1$ , pois as restrições impostas pelas duas 3-cliques em  $\overline{G}$  e a estrutura bipartida de  $G$  impedem uma 3-coloração.

**Caso 2:**  $\chi(K_{r,s}\overline{K_{r,s}}) = s$

Para os demais casos, mostraremos que  $s$  cores são suficientes através de construções específicas. Nossa estratégia geral consiste em colorir as cliques em  $\overline{G}$  com cores distintas e então reutilizar pequenos conjuntos fixos de cores para os conjuntos de vértices independentes  $S$  e  $R$  em  $G$ .

**Subcaso 2.1:**  $r = 1$  e  $s \geq 3$ . Após colorir a clique  $\overline{S}$ , colorimos o vértice central  $v_1$  de  $G$  com  $c(v_1) = c_1$ . Seu correspondente  $\overline{v}_1$  é adjacente apenas a  $v_1$ , então usamos  $c(\overline{v}_1) = c_2$ , pois  $s \geq 3$  garante sua disponibilidade.

Para os vértices  $u_i$  de  $S$ , cada um é adjacente a  $v_1$  (cor  $c_1$ ) e a  $\overline{u}_i$  (cor  $c_i$ ). Colorimos  $c(u_1) = c_2$  (evitando conflito com  $c(\overline{u}_1) = c_1$ ),  $c(u_2) = c_3$  (evitando  $c_1$  e  $c_2$ ), e para  $i > 2$ , usamos  $c(u_i) = c_2$  (evitando apenas  $c_1$  e  $c_i$ ). A construção utiliza exatamente  $s$  cores.

**Subcaso 2.2:**  $r = s$  e  $s \geq 4$ . Colorimos ambas as cliques:  $c(\overline{u}_i) = c_i$  e  $c(\overline{v}_i) = c_i$  para  $i = 1, \dots, s$ . Como  $s \geq 4$ , podemos usar conjuntos de cores disjuntos para as partes de  $G$ .

Para os vértices de  $S$ , usamos as cores  $\{c_1, c_2\}$ :  $c(u_1) = c_2$ ,  $c(u_2) = c_1$ , e  $c(u_i) = c_1$  para  $i > 2$ . Para os vértices de  $R$ , usamos as cores  $\{c_3, c_4\}$ :  $c(v_3) = c_4$ ,  $c(v_4) = c_3$ , e  $c(v_j) = c_3$  para  $j \notin \{3, 4\}$ .

A coloração é válida, pois garante que  $c(u_i) \neq c(\overline{u}_i)$ ,  $c(v_j) \neq c(\overline{v}_j)$  e que  $c(u_i) \neq c(v_j)$ . O Algoritmo 1 detalha esta construção.

**Subcaso 2.3:**  $2 \leq r < s$  e  $s \geq 4$ . Após colorir a clique  $\overline{S}$ , colorimos os vértices de  $S$  em  $G$  usando duas cores (possível pois  $s > r \geq 2 \implies s \geq 3$ ):  $c(u_1) = c_2$  e  $c(u_i) = c_1$  para  $i \geq 2$ .

---

**Algoritmo 1** Coloração de  $K_{r,s}\overline{K_{r,s}}$  para  $s \geq 4$ 

---

**Entrada:** Grafo  $G = K_{r,s}$  com partes  $R = \{v_1, \dots, v_r\}$  e  $S = \{u_1, \dots, u_s\}$ ; conjunto de  $s$  cores  $C = \{c_1, \dots, c_s\}$ .

**Saída:** Uma  $s$ -coloração própria  $c$  para  $G\overline{G}$ .

*// Etapa 1: Colorir a clique  $\overline{S}$  em  $\overline{G}$*

1: **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $s$  **faça**

2:      $c(\overline{u}_i) \leftarrow c_i$

▷ Colorir a clique  $\overline{S}$

3: **fim para**

*// Etapa 2: Colorir a clique  $\overline{R}$  em  $\overline{G}$*

4: **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $r$  **faça**

5:      $c(\overline{v}_i) \leftarrow c_i$

▷ Colorir a clique  $\overline{R}$

6: **fim para**

*// Etapa 3: Colorir os vértices de  $S$  em  $G$  com as cores  $\{c_1, c_2\}$*

7:  $c(u_1) \leftarrow c_2$

▷ Evita conflito com  $c(\overline{u}_1) = c_1$

8: **para**  $i \leftarrow 2$  **até**  $s$  **faça**

9:      $c(u_i) \leftarrow c_1$

▷ Válido pois  $i \geq 2 \implies c(\overline{u}_i) \neq c_1$

10: **fim para**

*// Etapa 4: Colorir os vértices de  $R$  em  $G$  com as cores  $\{c_3, c_4\}$*

11:  $c(v_3) \leftarrow c_4$

▷ Evita conflito com  $c(\overline{v}_3) = c_3$

12: **para**  $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{3\}$  **faça**

13:      $c(v_j) \leftarrow c_3$

▷ Válido pois  $j \notin \{3\} \implies c(\overline{v}_j) \neq c_3$

14: **fim para**

15: **retorne**  $c$

---

Considerando os subgrafos induzidos em  $G$ , os vértices de  $R$  são adjacentes a todos os vértices de  $S$ .  $S$  já está colorido com  $\{c_1, c_2\}$  e é possível colorir inteiramente  $R$  com  $\{c_3\}$ . Para a  $r$ -clique em  $\overline{R}$ , cada vértice  $\overline{v}_j$  tem seu correspondente  $v_j$  colorido com  $c_3$ . Precisamos de  $r$  cores distintas do conjunto  $C \setminus \{c_3\}$ , que possui  $s - 1$  cores disponíveis. A condição  $r < s$  garante que há cores suficientes. A construção utiliza  $s$  cores e é válida.  $\square$

**Teorema 3.3** (Coloração de Prismas Complementares de Grafos Ciclos). *Para o grafo ciclo  $C_n$  com  $n \geq 5$  vértices:*

$$\chi(C_n\overline{C_n}) = \lceil n/2 \rceil.$$

*Demonstração.* Para o complemento de ciclos  $\overline{C_n}$ , temos que  $\omega(\overline{C_n}) = \lfloor n/2 \rfloor$  e  $\alpha(\overline{C_n}) = 2$ . Para ciclos pares, o complemento  $\overline{C_{2k}}$  possui duas cliques de tamanho  $\omega = k$ , logo, são necessárias exatamente  $k$  cores. Para ciclos ímpares  $\omega(\overline{C_{2k+1}}) = \lfloor (2k+1)/2 \rfloor = k$ , porém não conseguimos cobrir todos os vértices com apenas  $k$  cores, pois isso resultaria em  $\alpha(\overline{C_n}) = 3$ , já que  $\lceil (2k+1)/k \rceil = 3$ , o que é falso pela própria estrutura de  $\overline{C_n}$ . Portanto, o limite inferior para o número cromático  $\chi(C_n\overline{C_n}) \geq \lceil n/2 \rceil$ .

Para o limite superior, os casos base  $n = 3$  e  $n = 4$  são verificados diretamente, resultando em  $\chi(C_3\overline{C_3}) = 3$  e  $\chi(C_4\overline{C_4}) = 3$ . O caso  $n = 5$  corresponde ao Grafo de Petersen, cujo número cromático é 3, satisfazendo a fórmula  $\lceil 5/2 \rceil = 3$ .

Para  $n \geq 6$ , a prova é construtiva e utiliza  $k = \lceil n/2 \rceil$  cores. A base da nossa coloração consiste em atribuir ao vértice  $\overline{v}_i$  de  $\overline{C_n}$  a cor  $c(\overline{v}_i) = c_{\lceil i/2 \rceil}$ . Esta regra produz a seguinte  $k$ -coloração:  $c(\overline{v}_1) = c(\overline{v}_2) = c_1, c(\overline{v}_3) = c(\overline{v}_4) = c_2, c(\overline{v}_5) = c(\overline{v}_6) = c_3, \dots, c(\overline{v}_n) = c_{\lceil n/2 \rceil}$ .

Essa é uma coloração válida para o subgrafo  $\overline{C_n}$ , pois vértices com a mesma cor correspondem a índices consecutivos em  $C_n$ , não sendo, portanto, adjacentes em  $\overline{C_n}$ .

A principal vantagem dessa atribuição inicial é que as cores de índice baixo, como  $c_1, c_2$  e  $c_3$ , são usadas apenas nos primeiros vértices de  $\overline{C_n}$  (especificamente, para  $i \leq 6$ ). Isso nos permite usar, no pior caso, uma 3-coloração base para os vértices de  $C_n$ , reutilizando as cores de  $\overline{C_n}$ , sabendo que os conflitos de cores serão poucos e localizados somente em uma região conhecida.

Se utilizarmos as cores  $c_1, c_2$  e  $c_3$ , os conflitos potenciais dessa abordagem são de dois tipos: (1) nas arestas de emparelhamento para os primeiros vértices, nesses casos, basta utilizar as duas outras cores disponíveis nesta área, ex:  $c(v_1) = c(v_5) = c_2, c(v_2) = c(v_4) = c_3, c(v_3) = c(v_6) = c_1$ ; e (2) na aresta de fechamento  $v_n v_1$  se o ciclo for ímpar. Como, para  $n \geq 6$ , temos  $k \geq 3$ , então  $c(\overline{v_n}) \notin \{c_1, c_2, c_3\}$  pela construção anterior. Portanto, a 3-coloração de  $C_n$ , reutilizando as cores de  $\overline{C_n}$ , respeitando os possíveis conflitos das arestas de emparelhamento perfeito, é válida.  $\square$

Como ilustração concreta, consideremos  $C_7 \overline{C_7}$  onde  $n = 7$  e  $k = \lceil 7/2 \rceil = 4$ . Aplicando nossa construção, primeiro colorimos  $\overline{C_7}$ :  $c(\overline{v_1}) = c(\overline{v_2}) = c_1, c(\overline{v_3}) = c(\overline{v_4}) = c_2, c(\overline{v_5}) = c(\overline{v_6}) = c_3, c(\overline{v_7}) = c_4$ . Para  $C_7$ , usamos as cores  $\{c_1, c_2, c_3\}$  resolvendo conflitos locais:  $c(v_1) = c(v_5) = c_2, c(v_2) = c(v_4) = c_3, c(v_3) = c(v_6) = c_1$ . Para  $v_7$ , como  $c(\overline{v_7}) = c_4 \notin \{c_1, c_2, c_3\}$ , podemos usar  $c(v_7) = c_3$ , que difere de  $c(v_1) = c_2$  e  $c(v_6) = c_1$ , validando a 4-coloração completa.

**Teorema 3.4** (Coloração de Prismas Complementares de Grafos Caminhos). *Para o grafo caminho  $P_n$  com  $n \geq 5$  vértices:*

$$\chi(P_n \overline{P_n}) = \lceil n/2 \rceil.$$

*Demonstração.* Para o complemento de caminhos  $\overline{P_n}$ , temos que  $\omega(\overline{P_n}) = \lceil n/2 \rceil$ . Em grafo complementar de um caminho, podemos destacar duas de suas cliques. Uma de tamanho  $\lceil n/2 \rceil$  formada pelos vértices de índice ímpar, e outra de tamanho  $\lfloor n/2 \rfloor$  formada pelos vértices de índice par. A presença dessa clique máxima estabelece imediatamente o limite inferior  $\chi(P_n \overline{P_n}) \geq \omega(P_n \overline{P_n}) \geq \lceil n/2 \rceil$ . Mostraremos que este limite é justo através de uma construção explícita que utiliza exatamente  $k = \lceil n/2 \rceil$  cores.

A prova é construtiva, baseada na estratégia usada para ciclos, mas simplificada pela estrutura linear do caminho. Primeiro, colorimos os vértices de  $\overline{P_n}$  com a regra  $c(\overline{v_i}) = c_{\lceil i/2 \rceil}$ . Esta coloração é válida para o subgrafo  $\overline{P_n}$ , pois atribui a mesma cor apenas a vértices com índices consecutivos no caminho original, que correspondem precisamente a vértices não adjacentes em  $\overline{P_n}$ . Especificamente, as duas cliques em  $\overline{P_n}$  recebem cores distintas: a clique de tamanho  $\lceil n/2 \rceil$  usa todas as  $k$  cores, enquanto a clique menor usa as primeiras  $\lfloor n/2 \rfloor$  cores.

Em seguida, colorimos os vértices de  $P_n$ . A propriedade chave de um caminho é sua estrutura linear, sem a aresta de fechamento  $v_1 v_n$  que existe em um ciclo. Isso garante que uma 2-coloração base sempre respeite as arestas adjacentes de  $P_n$ .

O único desafio restante são os possíveis conflitos nas arestas de emparelhamento, que ocorrem se  $c(v_i) = c(\overline{v_i})$ . Seguindo a estratégia análoga à dos ciclos, colorimos  $P_n$  usando as cores  $\{c_1, c_2, c_3\}$ . Como na construção anterior, as cores  $c_1, c_2$  e  $c_3$  aparecem apenas em  $c(\overline{v_i})$  para  $i \leq 6$ , os conflitos ficam restritos a essa região inicial. Resolvemos esses conflitos atribuindo cores aos primeiros vértices de  $P_n$  que evitam suas cores correspondentes:  $c(v_1) = c_2$  evitando

$c(\overline{v_1}) = c_1$ ,  $c(v_2) = c_3$ ,  $c(v_3) = c_1$ , e assim por diante. Para  $i > 6$ , temos  $c(\overline{v_i}) \notin \{c_1, c_2, c_3\}$ , eliminando qualquer possibilidade de conflito.

A diferença crucial em relação aos ciclos é que o caminho  $P_n$  não possui a aresta de fechamento  $v_n v_1$ . Enquanto em ciclos ímpares precisamos garantir que  $c(v_n) \neq c(v_1)$ , em caminhos essa restrição inexistente, simplificando significativamente a coloração. A estrutura linear garante que uma 3-coloração apropriada de  $P_n$  sempre respeita tanto as arestas adjacentes quanto as arestas de emparelhamento, assegurando que  $\chi(P_n \overline{P_n}) = \lceil n/2 \rceil$  para  $n \geq 5$ .  $\square$

**Teorema 3.5** (Coloração de Prismas Complementares de Grafos Perfeitos). *Se  $G$  é um grafo perfeito, então*

$$\chi(G\overline{G}) \geq \max\{\omega(G), \alpha(G)\}.$$

*Demonstração.* Como  $G$  é perfeito, temos que  $\chi(G) = \omega(G)$  e  $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ . O resultado segue diretamente do limite inferior geral  $\chi(G\overline{G}) \geq \max\{\chi(G), \chi(\overline{G})\}$  estabelecido no Teorema 2.1.  $\square$

Este teorema fornece uma cota inferior imediata para prismas complementares de grafos perfeitos, conectando o número cromático do prisma complementar com as propriedades do grafo original. Por exemplo, para o ciclo  $C_5$ , que é um grafo perfeito com  $\omega(G) = 2$  e  $\alpha(G) = 2$ , obtemos  $\chi(C_5 \overline{C_5}) = 3 \geq 2$ , confirmando que o Grafo de Petersen satisfaz esta cota com igualdade próxima ao limite.

**Teorema 3.6** (Coloração de Prismas Complementares de Grafos Planares). *Se  $G$  é um grafo planar com  $n$  vértices:*

$$\chi(G\overline{G}) \geq \chi(\overline{G}) \geq n/4.$$

*Demonstração.* Pelo resultado clássico de Nordhaus e Gaddum [Nordhaus and Gaddum 1956], sabemos que  $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$  para qualquer grafo  $G$ . Como  $G$  é planar, pelo Teorema das Quatro Cores [Appel and Haken 1978] temos  $\chi(G) \leq 4$ . Portanto,  $4\chi(\overline{G}) \geq n$ , o que implica  $\chi(\overline{G}) \geq n/4$ . O resultado segue pois  $\chi(G\overline{G}) \geq \chi(\overline{G})$  pelo Teorema 2.1.  $\square$

Esta cota é particularmente útil para grafos planares com muitos vértices, garantindo que o prisma complementar terá número cromático crescente com a ordem do grafo. Para um grafo planar maximal com 8 vértices, por exemplo, obtemos imediatamente que  $\chi(G\overline{G}) \geq 2$ , estabelecendo um limite inferior sem necessidade de análise estrutural detalhada.

## 4. Conclusão

Neste trabalho, investigamos o número cromático de prismas complementares, uma classe de grafos que combina um grafo com seu complemento com um emparelhamento perfeito. Apesar de simples, nossos resultados fornecem limites mais estritos para o número cromático dos que os introduzidos por Haynes et al, em algumas famílias de grafos.

Para grafos bipartidos completos  $K_{r,s}$ , estabelecemos uma fórmula fechada que determina  $\chi(K_{r,s} \overline{K_{r,s}})$  em função dos parâmetros  $r$  e  $s$ , evidenciando a dependência do valor em relação ao balanceamento entre as partes. Para ciclos  $C_n$  com  $n \geq 5$  e caminhos  $P_n$  com  $n \geq 4$ , demonstramos que  $\chi(C_n \overline{C_n}) = \chi(P_n \overline{P_n}) = \lceil n/2 \rceil$ , generalizando resultados conhecidos como o número cromático do Grafo de Petersen. Adicionalmente, estabelecemos cotas inferiores para prismas complementares de grafos perfeitos e planares, conectando o problema a parâmetros estruturais dos grafos originais.



Um problema natural que emerge de nossa investigação é o refinamento do limite superior geral. O Teorema 2.1 estabelece que  $\chi(G\overline{G}) \leq \chi(G) + \chi(\overline{G})$ , enquanto o limite inferior é  $\max\{\chi(G), \chi(\overline{G})\}$ . Nossos resultados para classes específicas sugerem que, frequentemente, o número cromático se aproxima mais do limite inferior do que do superior. Isto motiva a seguinte conjectura:

**Conjectura 4.1.** *Para todo grafo  $G$ , dadas colorações próprias mínimas de  $G$  e  $\overline{G}$ , é possível colorir  $G\overline{G}$  com  $\max\{\chi(G), \chi(\overline{G})\} + 1$  cores.*

Se verdadeira, esta conjectura estabeleceria um limite superior significativamente mais restritivo do que o conhecido, aproximando-se do limite inferior fundamental. A existência de casos como  $K_{2,2}\overline{K_{2,2}}$ , onde  $\chi(G\overline{G}) = 3 = \max\{2, 2\} + 1$ , sugere que o limite proposto pode ser estrito para algumas famílias. Porém, estabelecer esse limite para qualquer prisma complementar é um problema combinatório mais elaborado e depende de uma construção algorítmica ou de um contraexemplo que deve ser explorado em trabalhos futuros.

Este trabalho dá mais alguns passos no estudo cromático de prismas complementares, deixando em aberto a questão fundamental do limite exato do número cromático geral e o papel do emparelhamento perfeito na determinação desse limite.

## Agradecimentos

Este trabalho recebeu apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG), Chamada Pública nº 21/2024 – Programa de Auxílio à Pesquisa Científica e Tecnológica.

## Referências

- Appel, K. and Haken, W. (1978). *The Four-Color Problem*, pages 153–180. Springer New York, New York, NY.
- Bendali-Braham, A., Ikhlef-Eschouf, N., and Blidia, M. (2019). Some results on the b-chromatic number in complementary prism graphs. *RAIRO-Operations Research*, 53(4):1187–1195.
- Bondy, J. A. and Murty, U. (2008). *Graduate texts in mathematics*, volume 244. Springer.
- Cappelle, M. R., Coelho, E. M., Foulds, L. R., and Longo, H. J. (2019). Open-independent, open-locating-dominating sets in complementary prism graphs. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 346:253–264.
- Cappelle, M. R., Coelho, E. M., Foulds, L. R., and Longo, H. J. (2022). Complexity results on open-independent, open-locating-dominating sets in complementary prism graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 323:124–133.
- Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., and Nascimento, J. R. (2025). Computing a 3-role assignment is polynomial-time solvable on complementary prisms. *International Journal of Foundations of Computer Science*, pages 1–24.
- Haynes, T. W., Henning, M. A., Slater, P. J., and van der Merwe, L. C. (2007). The complementary product of two graphs. *Bull. Instit. Combin. Appl*, 51:21–30.
- Mortosa, O. S., Cappelle, M. R., and Coelho, E. (2022). K-independência em prismas complementares é NP-completo. In *Encontro de Teoria da Computação (ETC)*, pages 133–136. SBC.
- Nordhaus, E. A. and Gaddum, J. W. (1956). On complementary graphs. *The American Mathematical Monthly*, 63(3):175–177.

- Raksha, M., Hithavarshini, P., Dominic, C., and Sudev, N. (2020). Injective coloring of complementary prism and generalized complementary prism graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 12(02):2050026.
- Zatesko, L. M., Carmo, R., Guedes, A. L., Zorzi, A., Machado, R. C., and Figueiredo, C. M. (2019). On the chromatic index of complementary prisms. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 88(3):1071–1077.