Otimização da alocação dinâmica de centros de distribuição temporários: Uma abordagem via programação inteira mista.

Analucia S. Morales[1], Iwens G. S. Júnior[2], Nathan P. Costa[3]

[1]Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Florianópolis - SC - Brasil
[2]Instituto de informática (INF) - Universidade Federal de Goiás (UFG) - Goiânia - GO - Brasil
[3]Escola de engenharia elétrica, mecânica e computação (EMC) - Universidade Federal de Goiás (UFG) - Goiânia - GO - Brasil

{analucia.morales@ufsc.br, iwens@inf.ufg.br, nathan_padilha@discente.ufg.br

Abstract. *This work addresses the dynamic allocation problem of Temporary Distribution Centres (TDCs), proposing a mathematical combinatorial optimization model with the objective of minimizing operational and transportation costs while satisfying all customer demands. The logistics network is represented based on graph theory, and the problem is formulated using Mixed-Integer Linear Programming, implemented in Python with the PuLP library. Test instances of increasing sizes were used to compare the performance of open-source solvers such as CBC, HiGHS, and SCIP. The results demonstrate that the model is capable of finding optimal solutions, in addition to confirming its NP-hard nature through the exponential growth of solving times. The work contributes by establishing a model and reference benchmarks for the development of future heuristic methods for larger-scale problems.*

Resumo. *Este trabalho tem como abordagem, o problema da alocação dinâmica de Centros de Distribuição Temporários (CDTs), no qual propõe um modelo matemático de otimização combinatória com o objetivo de minimizar os custos de operação e transporte, porém de forma que atenda todas as demandas dos clientes. A rede logística é representada com base na teoria dos grafos, e a formulação do problema utiliza Programação Linear Inteira Mista, implementada em Python com a biblioteca PuLP. Foram utilizadas instâncias de testes com tamanhos crescentes para comparar o desempenho de solvers de código aberto. Os resultados demonstram que o modelo encontra soluções ótimas, além de confirmar sua natureza NP-difícil, através do crescimento exponencial dos tempos de resolução. O trabalho contribui para estabelecer um modelo e benchmarks de referência para o desenvolvimento de futuros métodos heurísticos para problemas de maior escala.*

1. Introdução

O cenário logístico contemporâneo é profundamente impactado pela expansão do comércio urbano e a crescente urbanização. Esta transformação acaba acarretando em uma mudança de hábitos de consumo, e assim intensificando os desafios da distribuição de mercadorias. Tal intensificação acaba gerando externalidades negativas como congestionamentos, aumento das emissões de carbono e escassez de vagas para carga e descarga (CASTILLO et al., 2024). Neste contexto, a demanda se torna cada vez mais dinâmica e variável, exigindo agilidade das redes de distribuição.

Neste cenário, a lógica das redes logísticas tradicionais, baseadas em instalações fixas, acabam por mostrar-se inadequadas, vez que uma localização, inicialmente ótima, pode acabar tornando-se ineficiente com o tempo. Com o objetivo de superar essa rigidez, surge o conceito de alocação dinâmica de instalações, que permite ajustar a capacidade da rede com base em variáveis distintas (JENA; CORDEAU; GENDRON, 2013). Soluções como Centros de Distribuição Temporários (CDTs) e *micro-hubs* são exemplos de infraestruturas flexíveis que podem ser realocadas para responder às flutuações de demanda em um horizonte de planejamento.

A literatura atual sobre o tema apresenta abordagens diversas de modelagem e solução. Uma estratégia encontrada foi de transformar o problema multi-período em um problema do caminho mais curto em um grafo, onde algoritmos clássicos como Dijkstra podem encontrar a solução conforme citado no trabalho de Yan et al.(2022). Já outras abordagens podem utilizar técnicas de decomposição, como a relaxação lagrangeana, para resolver problemas de grande porte, que acabam gerando dificuldades para *solvers* (CONTRERAS; CORDEAU; LAPORTE, 2011), oude heurísticas ágeis de roteirização (CASTILLO et al. 2024) . Também existem modelos que utilizam uma aproximação baseada na flexibilização da capacidade, tratando os ajustes modulares como expansão e contração, baseados em incerteza, conforme o artigo de Correia e Melo (2019).

Embora tais abordagens sejam importantes, há o espaço para uma lacuna metodológica: a dificuldade em qualificar estas soluções sem um *benchmark* exato. Este artigo tem como avanço, a proposição e validação utilizando Programação Inteira Mista (MIP) para o problema de alocação dinâmica de CDTs, resolvidos para a otimalidade usando *solvers open source*. Portanto, este tem um duplo objetivo: (1) apresentar um modelo (MIP) tratável para o problema e (2) o estabelecimento de *benchmarks* de referência (soluções ótimas e tempos computacionais). Embora este estudo se concentre em um contexto de logística comercial urbana, a formulação é fundamentalmente aplicável a qualquer cenário que exija a alocação de recursos temporários, como a logística humanitária ou o planejamento de grandes eventos. Tal contribuição é de suma importância, pois fornece base necessária para a validação e medição qualitativa de futuras abordagens heurísticas, que são indispensáveis em problemas de maior escala.

2. Metodologia

Para fins de representação desta rede logística, o problema pode ser modelado com um grafo $G = (V, E)$, no qual o conjunto de vértices V é formado pela união de dois conjuntos distintos: um conjunto I de locais candidatos potenciais para a alocação de ilhas de distribuição (CDTs), que funcionam como pontos de origem de abastecimento de suprimentos. E um conjunto J de pontos de demanda que vão representar os clientes finais, no caso as gôndolas de autoatendimento que precisam ser reabastecidas. O conjunto das arestas E representa as rotas de distribuição disponíveis, conectando os locais candidatos I aos pontos de demanda J. O custo de cada aresta é associado às despesas de se abastecer a gôndola a partir de tal ilha de distribuição.

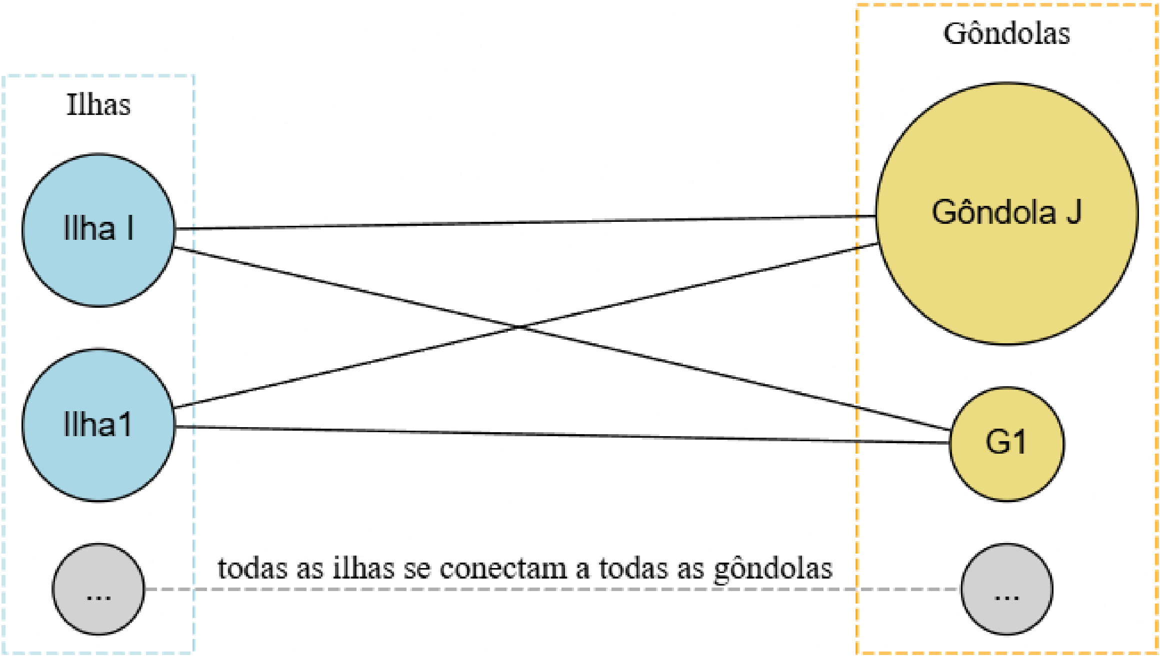

Figura 1 - Abordagem do problema na forma de grafo

A dinamicidade do problema é tratada mediante um horizonte de planejamento dividido em períodos discretos $T = \{1,2, \ldots |T|\}$. A topologia deste pode ser considerada estática, porém os parâmetros associados a seus componentes variam conforme o tempo.

A formulação matemática do problema utiliza os seguintes conjuntos, índices, parâmetros e variáveis.

Índices e Conjuntos

- I: O conjunto de locais candidatos para a instalação das Ilhas de Distribuição (CDTs), indexado por i.
- J: O conjunto de pontos de demanda (gôndolas de autoatendimento), indexado por j.
- T: O conjunto de períodos discretos no horizonte de planejamento, indexado por t.

Parâmetros

- Parâmetros de Demanda:
  - d_{jt}: A demanda, em unidades de produto, da gôndola $j \in J$ durante o período $t \in T$.

- Parâmetros de Custo:
  - f_{it}: custo fixo para abrir uma nova Ilha de Distribuição no local candidato $i \in I$ no início do período $t \in T$.
  - g_{it}: custo para fechar uma Ilha de Distribuição existente no local $i \in I$ no início do período $t \in T$.
  - o_{it}: custo de operação e manutenção de uma Ilha de Distribuição aberta no local $i \in I$ durante o período $t \in T$.
  - c_{ij}: custo de transporte por unidade de produto da ilha $i \in I$ para a gôndola $j \in J$.
- Parâmetros de Capacidade:
  - K_i: A capacidade máxima de atendimento (em unidades de produto) de uma Ilha de Distribuição localizada em $i \in I$.

Variáveis de Decisão

- Variáveis de Estado e Ação (Binárias):
  - $y_{it} \in \{0,1\}$: assume o valor 1 se a ilha *i* está operacional no período *t*, e 0 caso contrário.
  - $a_{it} \in \{0,1\}$: assume o valor 1 se a ilha *i* é aberta no início do período *t*, e 0 caso contrário.
  - $f_{it} \in \{0,1\}$: assume o valor 1 se a ilha *i* é fechada no início do período *t*, e 0 caso contrário.
- Variável de Fluxo (Contínua):
  - $x_{ijt} \geq 0$: representa a quantidade de produto enviada da ilha *i* para a gôndola *j* durante o período *t*.

Função Objetivo

O objetivo do modelo é minimizar o custo total (Z), que é a soma dos custos de transporte, operação, abertura e fechamento ao longo de todo o horizonte de planejamento:

$$\min Z = \underbrace{\sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} \cdot x_{ijt}}_{\text{Custo de Transporte}} + \underbrace{\sum_{t\in T}\sum_{i\in I} o_{it} \cdot y_{it}}_{\text{Custo de Operação}} + \underbrace{\sum_{t\in T}\sum_{i\in I} f_{it} \cdot a_{it}}_{\text{Custo de Abertura}} + \underbrace{\sum_{t\in T}\sum_{i\in I} g_{it} \cdot f_{it}}_{\text{Custo de Fechamento}}$$

Restrições

O modelo está sujeito às seguintes restrições:

1. Atendimento da Demanda: A soma de todos os produtos enviados de todas as ilhas para uma gôndola *j* deve ser igual à sua demanda.

$$\sum_{i \in I} x_{ijt} = d_{jt} \quad (\forall j \in J, \forall t \in T)$$

2. Capacidade da Ilha: A quantidade total de produtos que sai de uma ilha *i* não pode exceder sua capacidade máxima, e somente se a ilha estiver operacional.

$$\sum_{j \in J} x_{ijt} \leq K_i \cdot y_{it} \quad (\forall i \in I, \forall t \in T)$$

3. Balanço de Estado (Lógica Dinâmica): O estado de uma ilha (aberta/fechada) em um período depende do estado anterior e das ações de abrir ou fechar. Para o primeiro período (t=1), assume-se que o estado anterior é 0.

$$y_{it} = y_{i,t-1} + a_{it} - f_{it} \quad (\forall i \in I, \forall t \in T, t > 1)$$

$$y_{i1} = a_{i1} - f_{i1} \quad (\forall i \in I, \text{para } t = 1)$$

4. Ação Única por Período: Garante que, em um mesmo período, uma ilha não pode ser aberta e fechada ao mesmo tempo.

$$a_{it} + f_{it} \leq 1 \quad (\forall i \in I, \forall t \in T)$$

5. Domínio das Variáveis: Define a natureza de cada variável de decisão (binária ou não-negativa).

$$y_{it}, a_{it}, f_{it} \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in I, \forall t \in T)$$

$$x_{ijt} \geq 0 \quad (\forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T)$$

3. Resultados e discussão

De modo a avaliar o desempenho do modelo matemático proposto, foram utilizados diferentes *solvers*, conduzidos por 4 instâncias de testes conforme descritas:

- Instância 1: 20 ilhas candidatas (I=20), 100 gôndolas (J=100), 12 períodos (T=12).

- Instância 2: 20 ilhas candidatas (I=20), 100 gôndolas (J=100), 36 períodos (T=36).
- Instância 3: 50 ilhas candidatas (I=50), 200 gôndolas (J=200), 12 períodos (T=12).
- Instância 4: 50 ilhas candidatas (I=50), 200 gôndolas (J=200), 36 períodos (T=36).

As instâncias e demais parâmetros do modelo, como custos e demandas, foram geradas de forma pseudo aleatória em Python [versão 3.13.7], simulando um cenário geográfico realista baseado em 5 *clusters* representando bairros de alta densidade em Goiânia: Setor Bueno, Centro, Campinas, Setor Universitário e Jardim Goiás. Para cada ilha e gôndola geradas um *cluster* era escolhido aleatoriamente, então as coordenadas do nó eram geradas através de uma distribuição normal de desvio padrão 0.02, resultando num raio de até 2 quilômetros do *cluster* escolhido. Os parâmetros de custo foram definidos usando uma distribuição uniforme discreta, com intervalos pré definidos, a demanda da gôndola podia variar de 1 a 24, e o custo de abertura de uma ilha variaria de R$1200,00 a R$4500,00.

O modelo de programação linear inteira mista foi implementado através da biblioteca PuLP [versão 3.2.2]. Foram utilizados três *solvers* de código aberto: CBC [2.10.12], HiGHS [1.11.0] e SCIP[9.2.4], com um tempo limite de execução de 3600 segundos. Todos os testes foram executados utilizando uma máquina desktop com um processador Ryzen 4500g, 16GB de Ram DDR4 3200MHz, em um sistema operacional Arch Linux.

Os resultados computacionais dos testes estão resumidos na *Tabela 1* , para cada são apresentados os tempos necessários para se chegar a uma solução ótima em cada instância de teste, para cada solver.

		Solvers	
Casos de teste	CBC	HIGHS	SCIP
Teste 1	0.29335	0.192969	0.345557
Teste 2	1.141235	0.766705	1.485877
Teste 3	7.138549	3.418498	5.63295
Teste 4	35.592784	8.049682	15.881357

Tabela 1 - Resultados dos testes

Para melhor visibilidade dos resultados, também foi construído o *Gráfico 1*

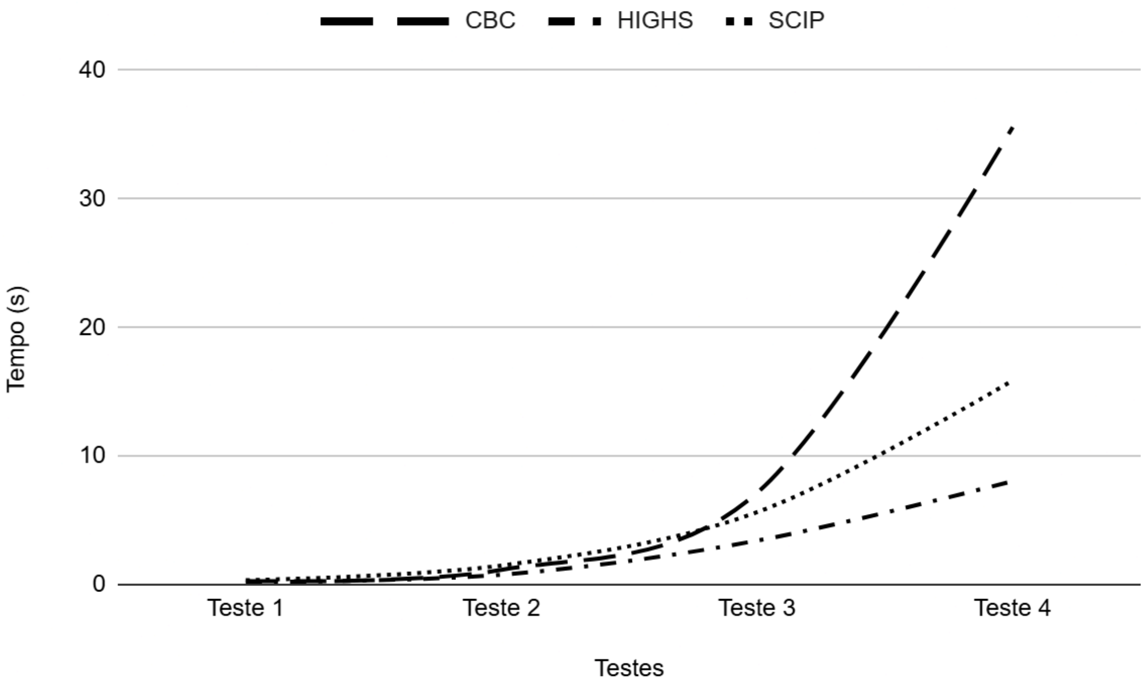

Gráfico 1 - Resultados dos testes

4. Discussão

Conforme apresentado na tabela 1 e no gráfico 1, os resultados afirmam a capacidade do modelo de entregar resoluções ótimas, porém com um custo de processamento crescente. Dentre os *solvers* utilizados, o HiGHS apresentou o mais consistente e rápido em sua solução. Este crescimento exponencial inicia a consideração de que em uma eventual escalabilidade do modelo, em que por exemplos mais períodos possam ser contabilizados para melhor precisão nas decisões, esta abordagem pode levar um tempo exorbitante. Sendo assim, além da estratégia de abordagem, a escolha do solver também se mostra vital para o sucesso.

5. Considerações finais

Este trabalho propõe e valida um modelo de programação inteira linear mista para o problema de alocação dinâmica de Centros de Distribuição Temporários. Foi demonstrado que embora seja possível alcançar uma solução ótima, o tempo de processamento cresce de forma exponencial com o aumento do horizonte de planejamentos, indicando uma complexidade NP-difícil.

A contribuição deste é primeiro, de formular um modelo matemático que possa resolver o problema de alocação com base no contexto de um local de autoatendimento para *snacks* em ambientes empresariais. Ademais, estabelecimento de *benchmarks* de soluções ótimas para diferentes cenários e *solvers*, servindo de base para validação de futuros métodos de solução.

A principal direção de pesquisas futuras, do ponto de vista metodológico, é o desenvolvimento de métodos heurísticos e metaheurísticos para resolução de instâncias de maior escala, onde a partir de um ponto, *solvers* podem se tornar inviáveis.

Em termos de aplicação, este modelo pode ser estendido a outros cenários de alocação temporária. O caso em estudo compartilha os desafios de logística de “última milha” (CASTILLO et al. 2024), mas também é de relevância direta para logística humanitária em resposta a desastres, onde a alocação de instalações temporárias é de importância crítica (CARNERO QUISPE et al., 2025). Trabalhos futuros poderiam usar este modelo de forma adaptada para cenários de instalação de postos médicos, abrigos de emergência, distribuição de suprimentos, ou até mesmo na logística de grandes eventos sazonais.

6. Referências bibliográficas

CARNERO QUISPE, María Fernanda; CHAMBILLA MAMANI, Lucciana Débora; YOSHIDA YOSHIZAKI, Hugo Tsugunobu; de BRITO JUNIOR, Irineu; Temporary Facility Location Problem in Humanitarian Logistics: A Systematic Literature Review; Basel; 2025.

CASTILLO, C.; PANADERO, J.; ALVAREZ-PALAU, E. J.; JUAN, A. A.; Towards greener city logistics: an application of agile routing algorithms to optimize the distribution of micro-hubs in Barcelona; Barcelona; 2024.

CONTRERAS, Ivan; CORDEAU, Jean-François; LAPORTE, Gilbert; The Dynamic Uncapacitated Hub Location Problem; Montréal; 2009.

CORREIA, Isabel; MELO, Teresa; Dynamic facility location problem with modular capacity adjustments under uncertainty; Saarbrücken; 2019.

GUO, Xiangyu; KULKARNI, Janardhan; LI, Shi; XIAN, Jiayi; The Power of Recourse: Better Algorithms for Facility Location in Online and Dynamic Models; 2020.

JENA, Sanjay Dominik; CORDEAU, Jean-François; GENDRON, Bernard; Dynamic Facility Location with Generalized Modular Capacities; Montréal; 2013.

YAN, Liying; GRIFOLL, Manel; FENG, Hongxiang; ZHENG, Pengjun; ZHOU, Chunliang; Optimization of Urban Distribution Centres: A Multi-Stage Dynamic Location Approach; Basel; 2022.