

Alianças Defensivas Globais em Grafos Roda e em Prismas Complementares

Rafael de Castro Freitas¹, Elisângela Silva Dias¹

¹Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Alameda Palmeiras, Câmpus Samambaia – 74690-900 – Goiânia – GO – Brasil

{rafaelcastro, elisangela}@inf.ufg.br

Abstract. *Graphs are very useful and it helps solving problems. A relatively new that has been studied is alliances in graphs. In this paper, it is studied the defensive alliances, which can be used as a mathematical model in web communities, social medias, chain food, etc. It was found results in wheel graphs and complementary prisms of complete graphs.*

Resumo. *Grafos são de grande utilidade para auxiliar na solução de problemas. Um tema relativamente novo é o de alianças em grafos. Neste trabalho, são estudadas as alianças defensivas, que podem ser utilizadas como modelo matemático em comunidades web, redes sociais, cadeias alimentares, etc. Foram encontrados resultados em grafos roda e em prismas complementares de grafos completos.*

1. Introdução

Grafos podem ser utilizados para modelar e facilitar a visualização de diversas situações da vida real. Por exemplo, pode-se utilizar um grafo para encontrar os menores caminhos para atravessar de um ponto da cidade ao outro. Isso faz com que a área de Teoria dos Grafos seja bem explorada, pois a sua aplicação é extensa em diversas áreas, como a de negócios, tráfego, distribuição de produtos, entre outros.

Um conceito recente e que está sendo bastante estudado é o de alianças em grafos, que foi introduzido por Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi em 2003 e publicado em 2004 no artigo *Alliances in Graphs* [Hedetniemi and Kristiansen 2004]. As principais classificações de alianças são: defensivas, ofensivas e poderosas. As alianças defensivas, por exemplo, servem de modelo matemático para vários problemas teóricos e práticos em diversas áreas do conhecimento, como a de comunidades *web*, redes sociais, cadeias alimentares, estrutura de dados, etc. O que faz com que muitos pesquisadores [Shafique 2004, Brigham and Hedetniemi 2009, Bermudo and Yero 2010, Dias 2012, Yero and Rodríguez-Velázquez 2013, Silva 2015, Gonçalves 2016] estejam levantando estudos nesse tema é que o cálculo do número da aliança em grafos pertence à classe de problemas NP-completos [Shafique 2004].

Além disso, também é um problema complicado encontrar uma das alianças em um grafo qualquer. Quando o grafo é pequeno, a tarefa é simples. Entretanto, a complexidade aumenta à medida que o grafo cresce, e também quando trabalhamos com alianças globais, que afetam todo o grafo. Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é alcançar novos resultados teóricos em alianças defensivas globais nos grafos roda e em prismas complementares.

2. Definições

Para uma melhor compreensão do trabalho, é necessário entender algumas definições. Grafos são estruturas que contêm conjuntos de vértices e arestas, tal que estes conjuntos são diferentes de vazio, podem ser finitos ou infinitos e são disjuntos. Denotamos o grafo G por $G = (V(G), E(G))$, tal que $V(G)$ é o conjunto de vértices e $E(G)$ é o conjunto de arestas, que consiste em um conjunto de pares de vértices. Quando duas arestas nunca conectam os mesmos vértices, o grafo é chamado de *grafo simples*. Dizemos que um grafo é *não orientado* se $uv = vu$. Caso contrário, se $uv \neq vu$, temos um grafo *orientado*. Um *conjunto dominante* (CD) é um subconjunto $D \subseteq V(G)$, tal que cada vértice pertencente a $V(G) \setminus D$ é adjacente a pelo menos um vértice em D . Neste trabalho, considera-se grafos simples, não orientados e *finitos*, que são os grafos que possuem um conjunto finito de vértices. Tem-se que $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$.

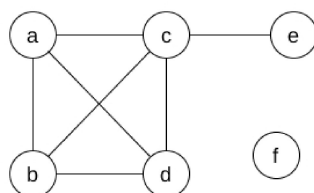


Figura 1. Exemplo de um grafo G qualquer.

Sejam u e v dois vértices em um grafo G , eles são ditos *adjacentes* ou *vizinhos* se forem *extremidades* de uma aresta a . Diz-se também que a conecta os vértices u e v . Se uma aresta a conecta dois vértices distintos (u, v) , julga-se que $a = uv$ e $a \in E(G)$. A *vizinhança* entre os vértices de um grafo pode ser aberta ou fechada. *Vizinhança aberta*, denotada por $N(v)$, ocorre quando considera-se apenas os vizinhos de um vértice v . *Vizinhança fechada*, denotada por $N[v]$, ocorre quando considera-se a vizinhança de v mais ele próprio, ou seja, v também é incluso no conjunto.

O *grau de um vértice* v , denotado por $g(v)$, é o número de arestas que incidem neste vértice. Se um vértice possui grau zero ele é chamado de vértice *isolado*, sendo assim ele também não possui nenhum vizinho. Um vértice é dito *pendente* se ele possuir grau igual a 1. Analisando o grafo G na Figura 1, tem-se que $g(a) = 3$, $g(e) = 1$ e $g(f) = 0$. Então, o vértice e é pendente e o vértice f é isolado.

Muitas vezes é possível se deparar com grafos complexos e extensos, mas talvez será necessário trabalhar somente com uma parte dele. É possível trabalhar apenas com uma parte do grafo original, desde que as extremidades das arestas remanescentes sejam mantidas. Um grafo menor obtido a partir de outro é chamado de *subgrafo*. Um subgrafo de G é um grafo $G' = (V(G'), E(G'))$ se e somente se $V(G') \subseteq V(G)$ e $E(G') \subseteq E(G)$. Denota-se ainda que um subgrafo *induzido* de G consiste em um subconjunto V' não vazio, tal que $V' \subseteq V(G)$, e E' consiste de todas as arestas de $E(G)$, cujo os extremos pertencem ao V' . Na Figura 2, é possível ver um grafo com um de seus possíveis subgrafos.

Grafos podem ser representados de várias maneiras, gerando estruturas diferentes para cada uma delas. Quando isso ocorrer, define-se *isomorfismo de grafos*. Sejam $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ e $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ dois grafos. Eles serão *isomorfos* se e somente

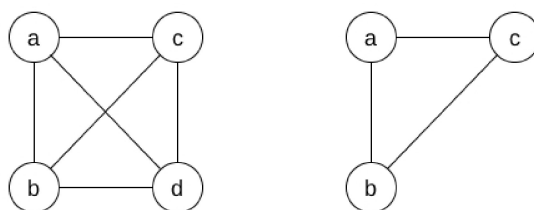


Figura 2. Grafo e um de seus subgrafos.

se existir uma função bijetora f de $V(G_1)$ para $V(G_2)$, tal que se a e b são vértices e são adjacentes em G_1 , então $f(a)$ e $f(b)$ são adjacentes em G_2 para todo a e b em $V(G_1)$. Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se os vértices destes mesmos grafos forem biunívocos, preservando a relação de adjacência. Portanto, nos grafos simples, a relação de isomorfismo só será dada se o número de vértices, número de arestas e os graus dos vértices forem iguais nos dois grafos. Entretanto, não há garantia de que todos os grafos são isomorfos baseando-se apenas nestas premissas. Não se conhece ainda um conjunto útil de invariantes para determinar isomorfismo entre grafos simples [5]. Na Figura 3, é possível observar que os vértices a, b, c, d, e e f em G_1 correspondem aos vértices z, w, x, y, u e v em G_2 , respectivamente. Assim sendo, tem-se que $f(a) = z, f(b) = w, f(c) = x, f(d) = y, f(e) = u, f(f) = v$.

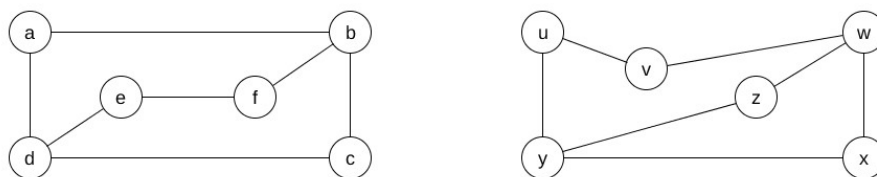


Figura 3. Exemplo de isomorfismo entre um grafo G_1 e um G_2 .

Caminho, denotado por P_n , é uma sequência de $n - 1$ arestas entre um vértice inicial v_0 e um vértice final v_n . O caminho pode ser um *ciclo*, denotado por C_n , se o início e o fim for no mesmo vértice, ou seja, se $v_0 = v_n$. *Caminho simples* é um caminho que não contém a mesma aresta mais de uma vez. Pode se observar ver que os vértices 1, 5, 6, 3 no grafo da Figura 4, formam um caminho simples de comprimento 3, pois $\{1, 5\}, \{5, 6\}$ e $\{6, 3\}$ são arestas de G . Observe que os vértices 4, 5, 3, 1 não formam um caminho, pois $\{5, 3\}$ não é uma aresta. Tem-se ainda que os vértices 1, 2, 5, 1 formam um ciclo de comprimento 3, pois $\{1, 2\}, \{2, 5\}$ e $\{5, 1\}$ são arestas e este caminho começa e termina em 1.

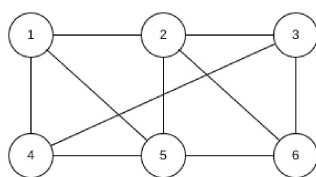


Figura 4. Um grafo G simples.

Um grafo é *completo*, denotado por K_n , se quaisquer dois de seus vértices distin-

tos são adjacentes. Na Figura 5, tem-se um exemplo de um grafo completo. Uma *clique* é um subconjunto de vértices C , tal que $C \subseteq V(G)$, sendo que para cada dois vértices $x, y \in C$, existe uma aresta conectando-os. Em outras palavras, uma clique é um subgrafo induzido de G , que é um grafo completo.

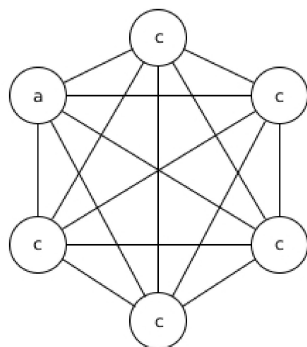


Figura 5. Um grafo K_6 .

Um grafo roda, denotado por W_n , é um ciclo com um vértice central. Observe que este vértice central domina todos os demais. Na Figura 6, temos um exemplo de um grafo roda.

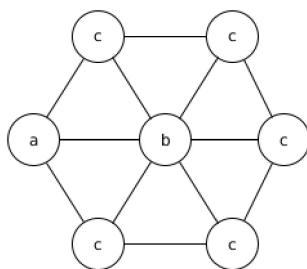


Figura 6. Um grafo W_7 .

O conceito de alianças em grafos é relativamente novo, tendo surgido em 2003. De modo geral, o conceito de aliança pode ser definido como um conjunto de pessoas que possuem interesses em comum que se unem para um ataque ou para uma defesa. Na teoria dos grafos, esta definição é semelhante. *Aliança* em grafos, de modo bem simples, é um conjunto de vértices com algumas propriedades coletivas. Assim como na vida real, há alguns tipos diferentes de alianças em grafos, a saber: alianças defensivas, que podem ser fortes e/ou globais; as alianças ofensivas, que também podem ser fortes e/ou globais; e as alianças poderosas, que podem ser globais.

Seja $S \subseteq V(G)$. S é uma *aliança defensiva* (AD) se e somente se $\forall v \in S, |N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. Em outras palavras, todo vértice $v \in S$ tem no máximo um vizinho a mais em $V(G) \setminus S$ do que em S . Na Figura 8, é possível ver um exemplo de aliança defensiva.

Uma *aliança defensiva forte* (ADF) ocorre se e somente se $\forall v \in S, |N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$. Neste caso, a inequação é estrita e todo vértice $v \in S$ é fortemente defendido, ou seja, um vértice no conjunto S tem mais vizinhos em S , incluindo ele próprio, do que em $V(G) \setminus S$. Na Figura 7, os vértices destacados formam uma aliança defensiva forte.

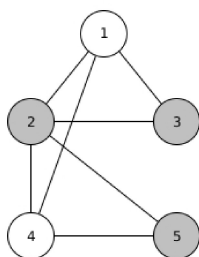


Figura 7. Exemplo de aliança defensiva forte e aliança poderosa.

Uma aliança defensiva é *global* (ADG) quando todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a pelo menos um membro da aliança S , tornando S um conjunto dominante. Pode-se ver um exemplo na Figura 8 de uma aliança defensiva global.

Uma *aliança defensiva forte global* (ADFG) ocorre quando todos os vértices em $V(G) \setminus S$ de uma ADF é adjacente a pelo menos um membro da aliança S , tornando o conjunto S dominante.

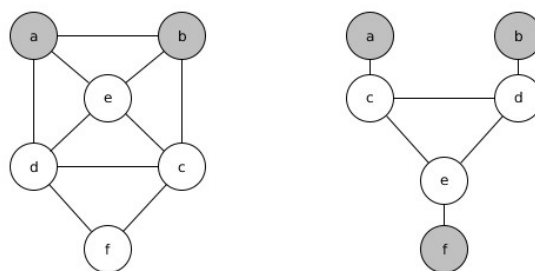


Figura 8. Exemplo de aliança defensiva e aliança defensiva global.

Se $S \subseteq V(G)$ e S é um conjunto não vazio de vértices, tem-se a ocorrência de uma *aliança ofensiva* (AO) se e somente se $\forall v \in \partial S, |N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. Em outras palavras, todo vértice na fronteira de S tem pelo menos um vizinho a mais em S do que em $V(G) \setminus S$. Na Figura 9, é possível ver um exemplo de aliança ofensiva.

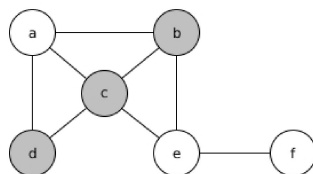


Figura 9. Exemplo de uma aliança ofensiva.

Uma *aliança ofensiva global* (AOG) segue a mesma definição da ADG, ou seja, uma AOG ocorre quando todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a pelo menos um membro de S , tornando S um conjunto dominante. Na Figura 10, os vértices marcados formam uma AOG em um grafo cúbico.

Uma aliança ofensiva é *forte* (AOF) se $v \in \partial S, |N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$. Neste caso, a inequação também é estrita e o conjunto é fortemente defendido. Desse modo,

pode-se dizer que toda aliança ofensiva forte é uma aliança ofensiva, todavia, nem toda aliança ofensiva é uma aliança ofensiva forte. Segue um exemplo de aliança ofensiva forte na Figura 10.

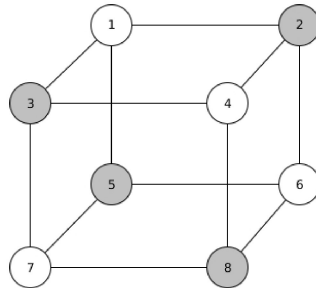


Figura 10. Exemplo de aliança ofensiva global e aliança ofensiva forte.

Na Figura 7, tem-se a formação de uma aliança defensiva e ofensiva no conjunto $S = \{2, 3, 5\}$, pois os vértices possuem mais vizinhos em S do que fora de S , levando em consideração a vizinhança fechada de vértice. Nessas condições, quando uma aliança é defensiva e ofensiva ao mesmo tempo, ela é definida de *aliança poderosa* (AP).

Uma *aliança poderosa global* (APG) é definida quando há um conjunto dominante, ou seja, quando todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a pelo menos um membro da aliança S . Na Figura 11, o conjunto $S = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 12\}$ é tanto uma aliança poderosa, quanto um conjunto dominante.

O número mínimo da k -aliança defensiva em um grafo é denotado por $a_k(G)$; da AD é denotado por $a(G)$; da ADF é denotado por $\hat{a}(G)$; da ADG é denotado por $\gamma_a(G)$; da ADFG é denotado por $\gamma_{\hat{a}}(G)$; da AO é denotado por $a_o(G)$; da AOF é denotado por $\hat{a}_o(G)$; da AOG é denotado por $\gamma_o(G)$; da AP é denotado por $a_p(G)$; da APG é denotado por $\gamma_{a_p}(G)$.

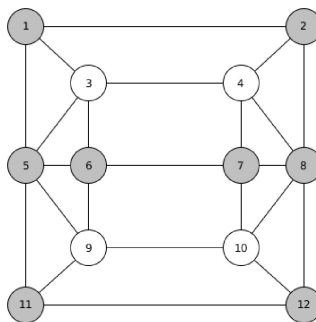


Figura 11. Exemplo de aliança poderosa global.

2.1. Produto Cartesiano de Grafos

O *produto cartesiano* $G_1 \times G_2$ de dois grafos G_1 e G_2 resulta em um outro grafo com um conjunto de vértices $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$. Os vértices (v_1, v_2) e (u_1, u_2) são vizinhos se seguir a condição de exclusividade:

1. ou $[v_1 u_1 \text{ e } v_2 = u_2]$;

2. ou $[v_2u_2$ e $v_1 = u_1]$.

Segue um exemplo de produto cartesiano na Figura 12.

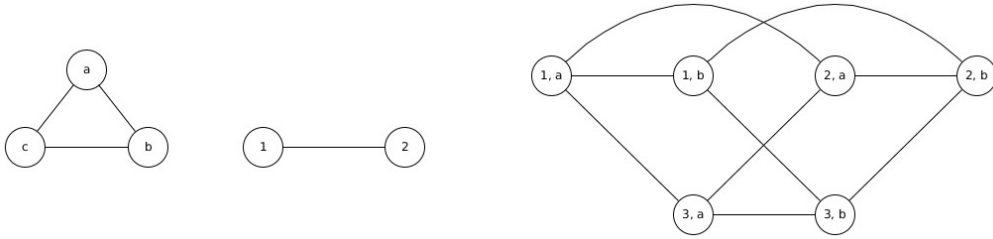


Figura 12. Produto cartesiano $C_3 \times K_2$.

2.2. Prisma complementar

Denota-se por $\overline{G} = (V(\overline{G}), E(\overline{G}))$ o *complemento* de um grafo G em que ambos possuem o mesmo conjunto de vértices e \overline{G} possui um conjunto de arestas complementares. Em outras palavras, se uma aresta uv existir em G , os vértices u e v não são vizinhos em \overline{G} e vice-versa.

O *prisma complementar*, denotado por $G\overline{G}$, é o emparelhamento perfeito de um grafo G com o seu complemento. O grafo resultante é a união disjunta de $G \cup \overline{G}$, emparelhando os vértices correspondentes com suas arestas complementares. Pode-se ver o grafo prisma complementar $C_4\overline{C_4}$ na Figura 13.

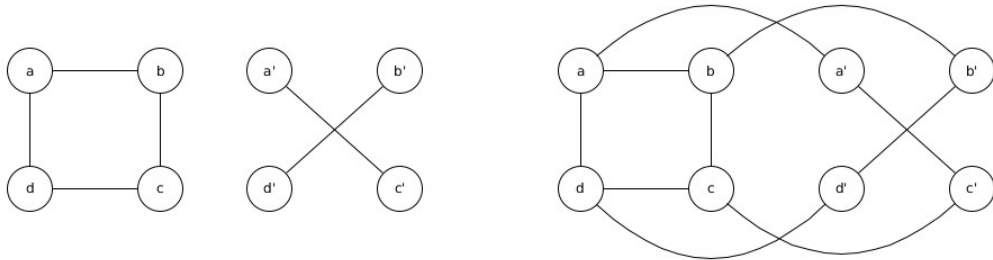


Figura 13. Grafo prisma complementar $C_4\overline{C_4}$.

3. Resultados

Foi encontrado que para grafos cordais, o número da aliança ofensiva global é um problema que se encontra na classe *NP-completa* [Dourado and Szwarcfiter 2014].

Para grafos roda, foi provado os seguintes resultados.

Teorema 1. Para um grafo roda W_n , com $n \geq 4$, tem-se que:

$$\gamma_a(W_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Seja $V_e(W_n)$ o subconjunto de vértices externos de W_n , $v \in V_e(W_n)$, e S o conjunto que forma ADG, com $S \subseteq V_e$. Como o grafo roda é 3-regular, exceto pelo vértice central, cada v possui 3 vizinhos, dois vértices externos adjacentes mais o vértice central, que é comum a todos. Pela definição de aliança defensiva, sabe-se que para todo vértice $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. Ou seja, cada um dos vértices $v \in V_e$ precisa de pelo menos mais um vizinho para que seja formado uma AD.

Note que os vértices externos do grafo roda formam um grafo ciclo C_{n-1} , já que desconsidera-se o vértice central. Neste contexto, é possível concluir que a cardinalidade do conjunto dominante para o grafo W_n é o mesmo do grafo C_n , isto é, $\gamma(W_n) = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$. Para determinar o conjunto dominante, não é necessário a exigência de ter pelo menos mais um vizinho da AD, uma vez que cada v consegue dominar dois vizinhos, e também o vértice central. Tendo isto em vista, que toda ADG também é um conjunto dominante, é preciso de no mínimo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices no grafo, dispostos em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pares de vértices. Para grafos em que $n \equiv 3 \pmod{4}$, é preciso acrescentar mais um vértice a um dos pares de vértices, totalizando $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, visto que não é possível obter um número exato de pares v . \square

Teorema 2. Para um grafo roda W_n , com $n \geq 6$, tem-se que:

$$\gamma_a(W_n) = \begin{cases} 2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2} \rfloor}) - 1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2} \rfloor}), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Seja W'_n um subgrafo induzido de W_n formado pelo subconjunto de vértices externos de W_n , então $V_e(W'_n)$. Observe que W'_n é o grafo C_n . Portanto, o conjunto dominante de $\gamma(W'_n) = \gamma(C_n)$. O conjunto dominante de um grafo roda é dado por $\gamma(W_n) = 1$, uma vez que o vértice central consegue dominar todos os vértices, isso é trivial. Porém, se for considerado o conjunto dominante de W_n , não se obtém o valor mínimo de uma ADG todas as vezes, isto porque deve se considerar o vértice central mais a metade dos vértices externos para que seja formada uma ADG, obtendo $\gamma_a(W_n) = 1 + \lfloor \frac{|V(W_{n-1})|}{2} \rfloor$.

Seja D o conjunto dominante de W'_n , e seja S o conjunto que forma ADG em W'_n . Como foi dito no Teorema 1, um vértice $v \in D$ consegue dominar 2 vizinhos mais o vértice central. Entretanto, isso não é suficiente para formar uma ADG. Ao pegar a metade do conjunto S de dois grafos anteriores de W_n e subtrair o resultado da quantidade n de vértices, será obtido o grafo anterior com um n equivalente. Tendo o conjunto dominante desse grafo anterior em mãos, é possível obter uma ADG adicionando mais um vértice em cada $v \in D$, formando pares. Observe que ao fazer isso, a quantidade de vértices é dobrada. Esta é uma construção que garante uma ADG mínima.

Em outras palavras, dado um W_n qualquer, a metade dos vértices do conjunto que forma ADG de dois grafos anteriores, $\frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2}$, menos o próprio n , $\frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2} - n = x$, retorna o grafo anterior equivalente ao W_n , representado por W_{n-x} . Assim, o conjunto S é obtido ao dobrar a quantidade de vértices do conjunto dominante de W_{n-x} , obtendo a fórmula $2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2} \rfloor})$.

Para grafos com $n \equiv 2 \pmod{4}$ vértices, ao dobrar o conjunto D do grafo anterior equivalente, a quantidade de vértices ultrapassa uma unidade, já que sempre obteremos um número par de vértices. Porém, o conjunto S deixa de ser mínimo. Como foi demonstrado no Teorema 1 ao retirar um vértice, deixando o vértice isolado junto a um par, ainda é possível obter uma ADG, mínima, no grafo W_n . Por esta razão, tem-se que $2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2} \rfloor}) - 1$. \square

Teorema 3. Para o grafo $K_n \overline{K_n}$, com $n \geq 2$, tem-se que: $\gamma_a(K_n \overline{K_n}) = n$.

Demonstração. Seja G o grafo $K_n \overline{K_n}$. Observe que G é também um grafo split, já que o conjunto de vértices $V(K_n)$ forma uma clique, e o conjunto $V(\overline{K_n})$ forma um conjunto independente. No subgrafo $\overline{K_n}$ tem-se um conjunto de vértices folhas, ou seja, cada $v \in V(\overline{K_n})$ tem apenas um vizinho, que são os vértices pertencentes à clique. Então, para se ter uma ADG, é preciso pegar todo o conjunto $V(\overline{K_n})$, obtendo os n vértices.

No subgrafo K_n todos os vértices são fortemente conectados. Sendo assim, é possível obter uma ADG com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices. Porém, esse conjunto não é dominante, uma vez que cada $v \in V(K_n)$ possui uma folha. Por conta disto, metade do grafo sempre ficará descoberta. Portanto, para se obter uma ADG no subgrafo $V(K_n)$, também é preciso de n vértices. \square

4. Conclusões

No decorrer deste trabalho, foram estudados alguns grafos cordais e prismas complementares, identificando o comportando da aliança defensiva (AD) e aliança defensiva global (ADG) nestas classes de grafos. Foi possível, por exemplo, encontrar uma relação entre conjunto dominante (CD) e ADG, obtendo assim outro resultado equivalente nos grafos rodas.

Após a atualização do atual estado da arte, notou-se que existem poucos ou nenhum resultado em alguns tipos de alianças para determinadas classes de grafos, o que acredita-se que é um problema inexplorado.

Ao estudar a AD e ADG nos grafos cordais e produto de grafos, pode-se perceber que para os grafos roda e prisma complementar do grafo completo é mais fácil de se encontrar um padrão e de obter uma ADG. Ao passo que outros grafos são mais complicados de se enxergar este mesmo padrão, já que os vértices encontram-se mais dispersos. Isto foi observado ao estudar o produto $P_n \overline{P_n}$. Foi obtido resultado para ADG neste grafo, mas não foi possível definir uma fórmula concisa como as apresentadas na Seção 3. Dito isto, como trabalho futuro, espera-se obter esta fórmula para o grafo em questão, além de explorar outros tipos de alianças nos grafos cordais e em outras classes, tais como produto cartesiano, produto lexicográfico e também prismas complementares de outros grafos.

Referências

- Bermudo, S., Rodríguez-Velázquez, J. A., Sigarreta, J. M. and Yero, I. G. (2010). On global offensive k-alliances in graphs. *Applied Mathematics Letters*, pages 1454 – 1458.
- Brigham, R. C., Dutton, R. D., Haynes, T. W. and Hedetniemi, S. T. (2009). Powerful alliances in graphs. *Discrete Mathematics*, Elsevier, pages 2140 – 2147.

- Chang, C. W., Chia, M. L., Hsu, C. J., Kuo, D. and Lai, L. L. (2012). Global defensive alliances of trees and Cartesian product of paths and cycles. *Discrete Applied Mathematics*, pages 160:479 – 487.
- Dias, E. S. (2012). *Alianças defensivas em grafos*, volume 1. Editora UFG, 1st edition.
- Dourado, M. C., Faria, L., Pizaña, M. A., Rautenbach, D. and Szwarcfiter, J. L. (2014). On defensive alliances and strong global offensive alliances. *Discrete Applied Mathematics*, pages 163:136 – 141.
- Favaron, O., Fricke, G., Goddard, W., Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., Kristiansen, T., Laskar, R. C. and Skaggs, R. D. (2004). Offensive Alliances in Graphs. *Discussiones Mathematicae, Graph Theory*, pages 24:263 – 275.
- Goddard, W. and Henning, M. (2013). Independent domination in graphs: A survey and recent results. *Discrete Mathematics*, pages 313:839 – 854.
- Gonçalves, B. C. (2016). Alianças defensivas globais em alguns produtos de grafos. Technical report, Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.
- Haynes, T. W.; Henning, M. A. and van der Merwe, L. C. (2008) Domination and total domination in complementary prisms. *J. Combin. Optimization*, Springer Netherlands.
- Hedetniemi, S., Hedetniemi, S. and Kristiansen, P. (2004). Alliances in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, pages 157 – 177.
- Rosen, K. H. (2009). *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. McGraw-Hill, 6th edition, pages 589 – 675.
- Shafique, K. H. (2004). *Partitioning a Graph in Alliances and its Application to Data Clustering*. PhD thesis, School of Computer Science, University of Central Florida, Orlando.
- Silva, L. R. S. da (2015). *Sobre Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Produtos de Grafos e Grafos Simpliciais*. PhD thesis, Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás. Goiânia.
- Yero, I. G. and Rodríguez-Velázquez, J. A. (2013). *Defensive alliances in graphs: a survey*. PhD thesis, Departamento de Matemáticas, Escuela Politécnica Superior de Algeciras, Universidad de Cádiz. Espanha.