A complexidade do reconhecimento de grafos k-fino próprio de precedência

Flavia Bonomo-Braberman[1], **Fabiano S. Oliveira**[2,*], **Moysés S. Sampaio Jr.**[3,†], **Jayme L. Szwarcfiter**[2,3‡]

[1] DC-FCEN/ICC-CONICET, Universidad de Buenos Aires, Argentina

[2]IME – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Brasil

[3]COPPE/PESC – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Brasil

`fbonomo@dc.uba.ar, fabiano.oliveira@ime.uerj.br, [moysessj,jayme]@cos.ufrj.br`

Abstract. *The class of precedence proper k-thin graphs is a subclass of proper k-thin graphs. The complexity status of recognizing proper k-thin graphs is unknown for any fixed $k \geq 2$. In this work, we prove that, when k is part of the input, the problem of recognizing precedence proper k-thin graphs is NP-complete, and we present a characterization for them based on threshold graphs.*

1. Introdução

Um *grafo de intervalo* G é tal que $V(G)$ corresponde a uma família de intervalos fechados distintos da reta real, chamada de *modelo*, e $(I, J) \in E(G)$ se, e somente se, $I \cap J \neq \emptyset$. Um grafo de intervalo é denominado *próprio* se admitir ao menos um modelo tal que $I \not\subseteq J$, para todo $I, J \in V(G)$. Em [Roberts 1969] é mostrado que um grafo é de intervalo próprio se, e somente se, existir uma ordem total s de $V(G)$ tal que, para qualquer tripla (p, q, r) de vértices ordenada com respeito a s, se $(p, r) \in E(G)$ então $(p, q), (q, r) \in E(G)$. Tal ordem s é denominada *canônica própria*. A Figura 1 mostra um grafo de intervalo próprio e uma de suas ordens canônicas próprias: $c < b < d < a < e < f$.

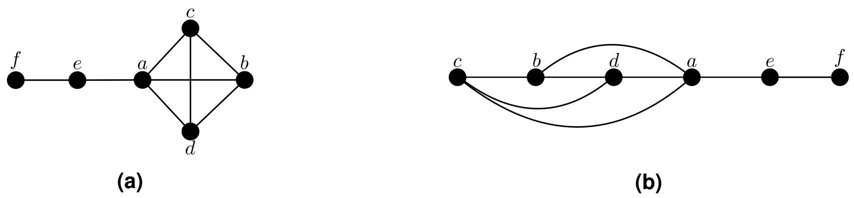

Figura 1. (a) Grafo de intervalo próprio G e (b) Ordem canônica própria de G.

Um grafo G é dito *k-fino próprio* [Bonomo and de Estrada 2019] se existirem uma ordem total s e um k-particionamento de $V(G)$ tais que, para qualquer tripla ordenada (p, q, r) em relação a s, tem-se que (i) se p e q pertencerem a uma mesma parte e $(p, r) \in E(G)$, então $(q, r) \in E(G)$ e (ii) se q e r pertencerem a uma mesma parte e $(p, r) \in E(G)$, então $(p, q) \in E(G)$. Uma ordem com essa propriedade é chamada de *ordem fortemente consistente*. Grafos k-fino próprio generalizam grafos

*parcialmente financiado por FAPERJ.
†financiado por CAPES.
‡parcialmente financiado por FAPERJ e CNPq.

de intervalo próprio, sendo os grafos 1-fino próprio a classe dos grafos de intervalo próprio. Em [Bonomo and de Estrada 2019], é provado que, dado um particionamento de tamanho arbitrário de $V(G)$, decidir a existência de uma ordem fortemente consistente com relação a esse particionamento é um problema NP-completo. Por outro lado, a complexidade da versão desse problema quando o tamanho do particionamento é fixo, isto é, não faz parte dos dados de entrada, é um problema ainda em aberto. Ainda em [Bonomo and de Estrada 2019], é mostrado que dada uma ordem total de $V(G)$, determinar o particionamento mínimo para o qual essa ordem é fortemente consistente pode ser resolvido em tempo polinomial. Além disso, considerando o caso geral, determinar se um grafo é k-fino próprio está em aberto mesmo para um $k \geq 2$ fixo.

Neste trabalho, abordamos uma classe mais restrita de grafos k-fino próprio, na qual só são permitidas ordens fortemente consistentes com uma determinada propriedade. Um grafo *k-fino próprio de precedência (k-FPP)* [Oliveira et al. 2018] é um grafo k-fino próprio que admite uma ordem fortemente consistente em que os vértices que pertencem a uma mesma parte são consecutivos nessa ordem. Uma ordem desse tipo é denominada ordem *fortemente consistente de precedência*. A Figura 2(a) ilustra um grafo que é 2-FPP e, na Figura 2(b), é ilustrado um grafo que é 2-fino próprio mas não é 2-FPP com relação à bipartição escolhida, problema considerado na Seção 2. Nessas figuras, as partes da bipartição de $V(G)$ estão sendo representadas por cores distintas. Além disso, a ordem fortemente consistente sendo considerada em ambas as figuras é $s = a, b, c, a', b', c'$.

Em [Oliveira et al. 2018], foi apresentado uma caracterização e um algoritmo de reconhecimento eficiente para grafos 2-FPP, sendo que o último pode ser generalizado para grafos k-FPP, com k fixo. Neste trabalho, estendemos esses resultados apresentando uma prova de NP-completude para o problema de reconhecimento de grafos k-FPP, com k variável (parte da entrada), e uma caracterização para essa classe de grafos.

Figura 2. Grafos (a) 2-FPP e (b) 2-fino próprio não 2-FPP para tal bipartição.

2. Reconhecimento de grafos k-FPP

Nesta seção, será apresentada uma prova de NP-completude para o problema de reconhecimento de grafos k-FPP, k arbitrário, definido a seguir.

PROBLEMA:	PARTIÇÃO k-FPP (Reconhecimento de grafos k-fino próprio de precedência para um dado particionamento)
ENTRADA:	Natural k, grafo G e particionamento $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_k)$ de $V(G)$
QUESTÃO:	Existe uma ordem fortemente consistente com $\mathcal{V}$ de precedência?

A prova de que o problema PARTIÇÃO k-FPP é NP-completo é obtida a partir de uma redução do problema NOT ALL EQUAL 3-SAT, que é NP-completo [Schaefer 1978].

Teorema 1. *O problema* PARTIÇÃO k-FPP *é NP-completo, mesmo se o tamanho de cada parte da partição for no máximo 2.*

Ideia da demonstração. Uma ordem fortemente consistente de precedência pode ser verificada em tempo polinomial. Logo, esse problema está em NP. Dada uma instância φ de NOT ALL EQUAL 3-SAT, definimos um grafo G e um particionamento de $V(G)$ no qual cada parte tem tamanho no máximo dois. O grafo G é construído como segue.

Para cada variável x_i da cláusula $\mathcal{C}_j$, crie a parte $X_{ij} = \{x_{ij}^T, x_{ij}^F\}$. Ademais, para cada variável x_i, crie as partes $X_i^T = \{x_i^T\}$ e $X_i^F = \{x_i^F\}$. As arestas entre esses vértices são (x_i^T, x_{ij}^T) e (x_i^F, x_{ij}^F) para cada i, j tais que a variável x_i apareça na cláusula $\mathcal{C}_j$.

No que segue, se o k-ésimo literal ℓ_{ij} de $\mathcal{C}_j$ for a variável x_i (resp. $\neg x_i$), denotamos por O_{ij} o conjunto ordenado $\{x_{ij}^F, x_{ij}^T\}$ (resp. $\{x_{ij}^T, x_{ij}^F\}$). Dado um conjunto ordenado C com dois vértices, denotamos por C^1 e C^2 o primeiro e segundo elementos de C, respectivamente. Para cada cláusula $\mathcal{C}_j = \ell_{1j} \vee \ell_{2j} \vee \ell_{3j}$, serão adicionadas como partes, os conjuntos ordenados com dois elementos Y_{1j}, Y_{2j} e Y_{3j}, e as arestas (O_{1j}^2, Y_{1j}^1), (O_{1j}^1, Y_{2j}^1), (O_{1j}^2, Y_{2j}^1), (O_{2j}^1, Y_{1j}^2), (O_{2j}^1, Y_{1j}^1), (O_{2j}^2, Y_{2j}^1), (O_{2j}^2, Y_{2j}^2), (O_{2j}^1, Y_{3j}^1), (O_{2j}^2, Y_{3j}^2), (O_{3j}^1, Y_{1j}^2), (O_{3j}^2, Y_{1j}^2), (O_{3j}^1, Y_{2j}^2), (O_{3j}^2, Y_{2j}^2), (O_{3j}^2, Y_{3j}^1), (O_{3j}^2, Y_{3j}^2).

É possível mostrar que existe uma ordem fortemente consistente de precedência para $V(G)$ se, e somente se, a atribuição $x_i = (x_i^F < x_i^T)$ (isto é, x_i é verdade se x_i^F preceder x_i^T na ordem em questão e x_i é falso caso contrário) satisfizer φ. A Figura 3 mostra a instância do problema PARTIÇÃO k-FPP construída a partir de uma dada instância $\varphi = \{(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)\}$ do problema NOT ALL EQUAL 3-SAT. Note que, a sequência $s = x_1^F, x_2^F, x_3^F, x_{11}^F, x_{11}^T, Y_{11}^1, Y_{11}^2, Y_{31}^1, Y_{31}^2, x_{21}^F, x_{21}^T, Y_{21}^1, Y_{21}^2, x_{31}^F, x_{31}^T, x_1^T, x_2^T, x_3^T$, relacionada à atribuição de verdade $x_1 = x_2 = x_3 = T$, é uma possível solução para (G, φ). $\square$

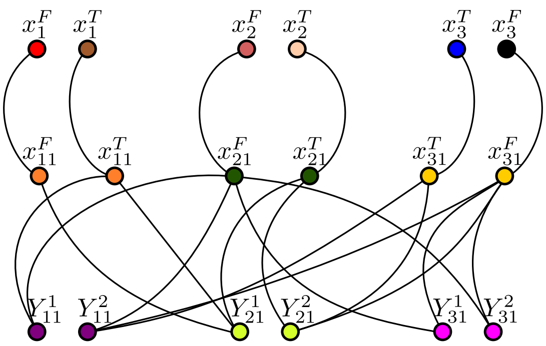

Figura 3. Instância do problema PARTIÇÃO k-FPP construída a partir da instância $\varphi = \{(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)\}$ do problema NOT ALL EQUAL 3-SAT.

3. Caracterização de grafos k-fino próprio de precedência

Seja $s = v_1, v_2, \ldots, v_{n'}$ uma sequência de um subconjunto $V' \subseteq V(G)$. Definimos $V(s) = V'$ e s^{-1} como a sequência reversa de s, ou seja, $s^{-1} = v_{n'}, v_{n'-1}, \ldots, v_1$.

Um grafo G é dito *de divisão* se existir um biparticionamento (X, Y) do seu conjunto de vértices tal que o grafo induzido por X é uma clique e o grafo induzido por Y é um conjunto independente. Um grafo de divisão G é um grafo *de limiar* se existir uma ordem total para X (resp. Y) tal que seus vértices estejam ordenados por ordem de inclusão de suas vizinhanças fechadas (resp. abertas). Uma ordem desse tipo é denominada de ordem *de limiar* de X (resp. Y) em G, ou simplesmente ordem de limiar de G.

Seja G um grafo e (X, Y) um biparticionamento de $V(G)$. Definimos o grafo de divisão $S_G(X, Y)$ como o grafo obtido a partir de G através da adição e remoção de arestas necessárias de tal modo que X se torne uma clique e Y um conjunto independente. Seja $s = s_1 s_2$ (s consiste na concatenação das sequências s_1 e s_2) uma ordem total de $V(G)$. Dizemos que (s_1, s_2) é *compatível* com G se s_1 e s_2 forem ordens canônicas próprias de $G[V(s_1)]$ e $G[V(s_2)]$, respectivamente, e se s_1 e s_2^{-1} forem ordens de limiar de $S_G(V(s_1), V(s_2))$.

Teorema 2. *Seja G um grafo. Para todo $k \geq 2$, G é k-FPP se, e somente se, existir um particionamento $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_k)$ e uma ordem total $s = s_1, \ldots, s_k$ de $V(G)$ tal que para todo $1 \leq i < j \leq k$, (s_i, s_j) é compatível com $G[V(s_i) \cup V(s_j)]$.*

Demonstração. Primeiro, suponha $k = 2$. Considere que G é 2-FPP com relação a $\mathcal{V} = (V_1, V_2)$. Seja $s = s_1 s_2$ uma ordem fortemente consistente de precedência de G, $V_1 = V(s_1)$ e $V_2 = V(s_2)$. Portanto s_1 (resp. s_2) é uma ordem canônica própria de $G[V(s_1)]$ (resp. $G[V(s_2)]$). Suponha, por absurdo, que s_1 não seja uma ordem de limiar de $S_G(V_1, V_2)$. Nesse caso, existem $u, v \in V_1$ e $w \in V_2$, com $u < v$ em s_1, tais que $w \in N[u]$ e $w \notin N[v]$. Como $u < v < w$ em s, existe uma contradição com o fato de s ser uma ordem fortemente consistente de precedência de $V(G)$. Agora, suponha, por absurdo, que s_2^{-1} não seja uma ordem de limiar de $S_G(V_1, V_2)$. Consequentemente, existem $u, v \in V_2$ e $w \in V_1$, com $u < v$ em s_2, tais que $w \in N(v)$ e $w \notin N(u)$, contradizendo o fato de s ser uma ordem fortemente consistente de precedência, já que $w < u < v$ em s. Logo, (s_1, s_2) é compatível com G.

Por outro lado, considere que existam ordens canônicas próprias s_1 e s_2 de V_1 e V_2, respectivamente, tais que (s_1, s_2) é compatível com G. Isto é, s_1 e s_2^{-1} são ordens de limiar de $S_G(V_1, V_2)$. A seguir, é provado que $s = s_1 s_2$ é uma ordem fortemente consistente de precedência de G considerando o biparticionamento (V_1, V_2). Suponha que a afirmação anterior não seja verdade. Isto implica que existem (i) $u, v \in V_1$, $w \in V_2$ com $u < v$ em s tais que $(u, w) \in E(G)$, $(v, w) \notin E(G)$, ou (ii) $u, v \in V_2$, $w \in V_1$ com $u < v$ em s_2 tais que $(v, w) \in E(G)$, $(u, w) \notin E(G)$. No caso (i) (resp. (ii)), tem-se uma contradição com o fato de s_1 (resp. s_2) ser uma ordem de limiar de $S_G(V_1, V_2)$.

Para $k > 2$, suponha que exista um particionamento $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_k)$ e uma ordem total $s = s_1 \ldots s_k$ de $V(G)$ tal que, para todo $1 \leq i \leq k$, $V(s_i) \in \mathcal{V}$. Note que s é uma ordem fortemente consistente de precedência se, e somente se, $s_i s_j$ for uma ordem fortemente consistente de precedência de $G[V_i \cup V_j]$ com relação ao biparticionamento (V_i, V_j), para todo $1 \leq i < j \leq k$. A partir da prova do caso $k = 2$, tem-se que a ordem $s_i s_j$ é uma ordem fortemente consistente de precedência se, e somente se, (s_i, s_j) for compartível com $G[V(s_i) \cup V(s_j)]$. $\square$

Referências

Bonomo, F. and de Estrada, D. (2019). On the thinness and proper thinness of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 261:78–92.

Oliveira, F. S., Sampaio Jr., M. S., and Szwarcfiter, J. L. (2018). Sobre finura própria de grafos. In *Anais do III Encontro de Teoria da Computação*. SBC.

Roberts, F. (1969). Indifference graphs. In Harary, F., editor, *Proof Techniques in Graph Theory*, pages 139–146. Academic Press, New York.

Schaefer, T. J. (1978). The complexity of satisfiability problems. In *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC ’78, pages 216–226.