# Um Limitante Superior para o Número Geodésico nos Grafos de Kneser

**João V. S. Leite**[1], **Marcos Bedo**[1] **e Rodolfo A. de Oliveira**[1]

[1]Instituto do Noroeste Fluminense – INFES/UFF
Av. João Jasbick, S/N – S. A. Pádua/RJ – Brasil.

{joaovitorleite,marcosbedo,rodolfooliveira}@id.uff.br

***Abstract.*** *This paper provides a preliminary discussion on the geodetic number of Kneser graphs. A set $W, W \subseteq V(G)$, for a graph $G$, is said to be geodetically convex if any vertex in a shortest path between $u$ and $v$ is in $W$, $\forall\, u, v \in W$. Such a vertex detection process is called the geodetic interval of $W$, denoted $I[W]$, whereas the geodetic number of $G$ is the smallest cardinality of $W \subseteq V(G)$ such that $I[W] = V(G)$. While finding the geodetic number is known to be an* $\mathsf{NP}$*-hard problem for generic graphs, in this paper, we examine an upper bound for the geodetic number of Kneser graphs.*

***Resumo.*** *Esse artigo apresenta uma discussão preliminar sobre o número geodésico nos grafos de Kneser. Dado um grafo $G$, um conjunto $W, W \subseteq V(G)$, é dito geodesicamente convexo se qualquer vértice em algum caminho mínimo entre $u$ e $v$ está em $W$, $\forall\, u, v \in W$. O processo de detecção desses vértices é chamado de intervalo geodésico de $W$, denotado por $I[W]$, e o número geodésico de $G$ é o menor tamanho de $W \subseteq V(G)$ tal que $I[W] = V(G)$. Embora o problema de encontrar o número geodésico é reconhecidamente* $\mathsf{NP}$*-difícil para grafos genéricos, mostramos que existe uma função que limita o número geodésico em grafos de Kneser.*

## 1. Introdução

O uso de estruturas convexas ganhou notoriedade com o crescimento de problemas envolvendo programação linear em espaços euclidianos [Berger 1990]. Posteriormente, com o intuito de estender o conceito de convexidade para outras estruturas matemáticas além de espaços euclidianos, a *convexidade* sobre um conjunto $X$ foi formalmente definida como uma *coleção* $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $X$ que satisfazem os três seguintes axiomas: $(i)$ $\emptyset,\ X \in \mathcal{C}$; $(ii)$ $\mathcal{C}$ é fechado por interseção; e $(iii)$ $\mathcal{C}$ é fechado por união aninhada [Van de Vel 1993]. De acordo com estes axiomas, os teoremas clássicos de Helly [Helly 1923], Carathéodory [Carathéodory 1911] e Radon [Radon 1921] podem ser unificados em aspectos geométricos comuns nas mais diversas estruturas.

Trabalhos clássicos de convexidade em grafos incluem os estudos de [Farber e Jamison 1986, Duchet 1988, Changat e Mathew 1999] complementados nos trabalhos recentes de [Cáceres et al. 2008, Mathew e Mathew 2018, Marcilon e Sampaio 2018, Dourado et al. 2019]. Em particular, os resultados em [Pelayo 2013] reúnem propriedades importantes de convexidade em grafos, com maior foco na convexidade geodésica. Seguindo os resultados e indicações anteriores, esse trabalho tem seu foco tanto sobre a convexidade geodésica quanto sobre o número geodésico em grafos de Kneser.

## 2. Definições Básicas

Considere $G = (V, E)$ um grafo finito. O *grau* de um vértice $v$ corresponde ao número de arestas a ele incidentes em $G$. Um *caminho* é uma sequência de vértices distintos $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ de $G$ tal que existem as arestas $x_i, x_{i+1} \in E$, para $1 \leq i \leq \ell - 1$. O *comprimento de um caminho* é igual ao número de vértices do caminho menos uma unidade e o *caminho mínimo* é um caminho com menor comprimento entre os vértices extremos. Assim, dado dois vértices $u, v \in V$, a *distância entre* $u$ *e* $v$, denotada por $dist(u, v)$, é o comprimento do caminho mínimo entre $u$ e $v$ no grafo. O *diâmetro* de $G$, $diam(G)$, é o maior comprimento dentre todos os caminhos mínimos em $G$.

Um *caminho* $uv$*-geodésico* é um caminho mínimo entre os vértices $u$ e $v$ em $G$. O *intervalo geodésico* $I[u, v]$ é o conjunto de todos os vértices pertencentes a algum caminho $uv$-geodésico. Para um conjunto $W, W \subseteq V(G)$, o intervalo geodésico $I[W]$ de $W$ é a união dos intervalos geodésicos $I[u, v]$ para todos os pares $u, v \in W$. O conjunto $W$ é chamado de *geodesicamente convexo* ou $g$-convexo se $I[W] = W$ e é chamado de *conjunto geodésico* se $I[W] = V(G)$. O *número geodésico*, $gn(G)$, é a menor cardinalidade para um conjunto geodésico de $G$ e o problema de se encontrar o número geodésico de um grafo é NP-difícil [Dourado et al. 2010].

Dados $n$ e $k$ inteiros positivos, definimos $[2n+k] = \{1, 2, \ldots, 2n+k\}$ e $[2n+k]^n$ como todos os subconjuntos de $[2n + k]$ com tamanho $n$. Um grafo de Kneser $K_n^{2n+k}$ é um grafo cujos vértices são formados por $[2n + k]^n$ e cujas arestas existem entre pares de vértices com interseção vazia [Lovász 1978]. Uma característica interessante sobre os grafos de Kneser é que possuem $\binom{2n+k}{n}$ vértices cujos respectivos graus equivalem a $\binom{n+k}{n}$. Na Figura 1 apresentamos o grafo $K_2^5$ que também é isomorfo ao grafo de Petersen.

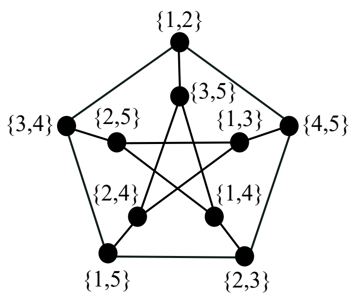


**Figura 1. O grafo de Kneser $K_2^5$.**

Por [Valencia-Pabon e Vera 2005], temos que $diam(K_n^{2n+k}) = \lceil (n-1)/k \rceil + 1$ e, além disso, para todo $u, v \in V(K_n^{2n+k})$ e $|u \cap v| = s$ temos também que:

$$dist(u, v) = \begin{cases} \min\{2\lceil (n-s)/k \rceil, 2\lceil s/k \rceil + 1\} & \text{, para } 1 \leq k < n-1 \\ 2 & \text{, se } k \geq n-1 \end{cases} \quad (1)$$

Observe que $2\lceil (n-s)/k \rceil$ corresponde a distância *par* entre vértices, enquanto que $2\lceil s/k \rceil + 1$ a distância *ímpar*, para qualquer valor de $s$.

Embora exista muito interesse nos problemas clássicos em teoria dos grafos, como coloração e suas variações envolvendo produtos diretos de grafos de Kneser

[Brešar e Valencia-Pabon 2019, Balogh et al. 2019, Jin et al. 2020], pouco se conhece sobre resultados de convexidade nessa classe de grafos. Com o objetivo de suprir essa lacuna, esse trabalho investiga, para dado um grafo $K_n^{2n+k}$, uma forma de representar $gn(K_n^{2n+k})$ em função de $n$ e $k$.

## 3. Resultados

Primeiramente, apresentamos alguns aspectos que garantem propriedades sobre a distância máxima entre pares de vértices em grafos de Kneser:

**Lema 3.1** *Sejam $u, v \in V(K_n^{2n+k})$. Para $1 \leq k < n-1$, temos que $dist(u,v) = diam(K_n^{2n+k})$ se, e somente se, $|u \cap v| = s$, para*

$$\left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil \cdot k - k + 1 \leq s \leq \left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil \cdot k - k + 1 + H(n,k)$$

*onde*

$$H(n,k) = \begin{cases} \max\{n \bmod k + k - 2, 0\} & \text{, para } 0 \leq n \bmod k \leq 1 \\ n \bmod k - 2 & \text{, para } 2 \leq n \bmod k \leq k-1 \end{cases}$$

Um fato acerca do Lema 3.1 é que interseções inferiores a $\left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil \cdot k - k + 1$ fornecem distâncias ímpares, pois podemos reparar que apenas a função à direita produz o mínimo na demonstração da volta do lema, inclusive para os casos $k \geq n-1$. Analogamente, valores maiores que $\left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil \cdot k - k + 1 + H(n,k)$ geram distâncias pares. Portanto, temos o seguinte resultado:

**Corolário 3.1** *Sejam $K_n^{2n+k}$ um grafo de Kneser e $u, v \in V(K_n^{2n+k})$, então:*

- $|u \cap v| < \left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil \cdot k - k + 1$ *implica $dist(u,v)$ ímpar; e*
- $|u \cap v| > \left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil \cdot k - k + 1 + H(n,k)$ *implica $dist(u,v)$ par.*

Agora, vejamos o seguinte resultado:

**Teorema 3.1** *Sejam $K_n^{2n+k}$ um grafo de Kneser, $r \in V(K_n^{2n+k})$ e $D$ o conjunto de todos os vértices de $K_n^{2n+k}$ cuja distância a $r$ seja igual a $diam(K_n^{2n+k})$. Então $D \cup \{r\}$ é um conjunto geodésico.*

Portanto, com base no Teorema 3.1 e considerando $p = \left\lceil \frac{n-1}{2k} \right\rceil \cdot k - k + 1$, podemos verificar que:

$$gn(K_n^{2n+k}) \leq 1 + \sum_{i=p}^{s+H(n,k)} \binom{n}{p} \cdot \binom{n+k}{n-p} \tag{2}$$

onde a primeira parte da soma corresponde ao vértice $r$ e a segunda à cardinalidade de $D$.

## 4. Considerações Finais

A discussão apresentada nesse trabalho permite limitar o comportamento do número geodésico em grafos de Kneser, um resultado preliminar para guiar o estudo e análise da fórmula fechada para o número geodésico em grafos de Kneser.

## Referências


Balogh, J., Cherkashin, D., e Kiselev, S. (2019). Coloring general kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs. *Euro. J. Combinatorics*, 79:228 – 236.

Berger, M. (1990). Convexity. *Amer. Math. Monthly*, 97(8):650–701.

Brešar, B. e Valencia-Pabon, M. (2019). Independence number of products of kneser graphs. *Discrete Mathematics*, 342(4):1017 – 1027.

Cáceres, J., A.Márquez, e Puertas, M. (2008). Steiner distance and convexity in graphs. *Eur. J. Comb.*, 29(3):726–736.

Carathéodory, C. (1911). Über den variabilitätsbereich der fourierschen konstanten von positiven harmonischen funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32:193—217.

Changat, M. e Mathew, J. (1999). On triangle path convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 206(1):91–95.

Dourado, M. C., Penso, L. D., e Rautenbach, D. (2019). The hull number in the convexity of induced paths of order 3. In Colbourn, C. J., Grossi, R., e Pisanti, N., editors, *Combinatorial Algorithms*, pages 214–228, Cham. Springer International Publishing.

Dourado, M. C., Protti, F., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2010). Some remarks on the geodetic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 310(4):832 – 837.

Duchet, P. (1988). Convex sets in graphs, II. minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44(3):307 – 316.

Farber, M. e Jamison, R. E. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(3):433–444.

Helly, E. (1923). Ueber mengen konvexer koerper mit gemeinschaftlichen punkter, jahresber. *Math. Verein.*, 32:175—176.

Jin, Z., Wang, F., Wang, H., e Lv, B. (2020). Rainbow triangles in edge-colored kneser graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 365:124724.

Lovász, L. (1978). Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25(3):319 – 324.

Marcilon, T. e Sampaio, R. (2018). The maximum infection time of the P3 convexity in graphs with bounded maximum degree. *Disc. Math.*, 251:245 – 257.

Mathew, J. K. e Mathew, S. (2018). Monophonic convexity in weighted graphs. *Discrete Math., Alg. and Appl.*, 10(1):1–10.

Pelayo, I. M. (2013). *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer-Verlag New York.

Radon, J. (1921). Mengen konvexer körper, die einen gemeinsamen punkt enthalten. *Mathematische Annalen*, 83(1–2):113—115.

Valencia-Pabon, M. e Vera, J.-C. (2005). On the diameter of kneser graphs. *Discrete Math.*, 305(1):383 – 385.

Van de Vel, M. (1993). *Theory of Convex Structures*. North Holland, Amsterdam.