Número de Grundy impróprio de subclasses de cografos *

Efraim Rodrigues[1], Cláudia Linhares Sales[1]

[1] ParGO e Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal do Ceará, Brasil

efraimnaassom@gmail.com,linhares@lia.ufc.br

Abstract. *The d-improper vertex coloring problem, where a color assigned to a vertex can be shared with at most d, $d \geq 0$, of its neighbors, is a generalization of the classic vertex coloring problem (set $d = 0$). Being equally intractable, the greedy d-improprer coloring heuristic was introduced in [Rodrigues 2020]. In this work, we study the worst performance of this heuristic on some subclasses of cographs.*

Resumo. *O problema de coloração d-imprópria de vértices, que permite que uma cor atribuída a um vértice possa ser compartilhada com até d, $d \geq 0$, de seus vizinhos, é uma generalização do problema clássico de coloração de vértices (onde $d = 0$). Sendo igualmente intratável, a heurística de coloração gulosa d-imprópria foi introduzida em [Rodrigues 2020]. Neste trabalho, determinamos o seu pior desempenho em algumas subclasses de cografos.*

1. Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma *coloração dos vértices* é uma atribuição de rótulos (cores) aos vértices $V(G)$. Uma coloração é dita *própria* se vértices adjacentes recebem cores diferentes. O problema clássico de coloração consiste em, dado um grafo G, determinar o seu *número cromático* $\chi(G)$ que é o menor inteiro k tal que G admite uma coloração própria com k cores. Em geral, o problema de determinar $\chi(G)$ é NP-difícil [Karp 1972]. Problemas de alocação de frequências são geralmente modelados como um problema de coloração, mas em alguns casos as antenas toleram compartilhar suas frequências com antenas vizinhas até um certo limite d. Esses casos podem ser modelados como problemas de *coloração defeituosa* ou *d-imprópria* de vértices onde um vértice pode compartilhar sua cor com no máximo d vizinhos. O problema de determinar se um grafo G admite uma coloração d-imprópria com k cores é NP-completo [Cowen et al. 1997].

Dada uma ordem dos vértices, considerando os vizinhos já coloridos de um vértice v, dizemos que uma cor c está disponível para v se nenhum vizinho de v está colorido com c. O *Algoritmo Guloso de Coloração* usa a seguinte estratégia para colorir propriamente os vértices de um grafo: seguindo uma ordem dos vértices, a menor cor disponível é atribuída para cada vértice nessa ordem. O *número de Grundy* $\Gamma(G)$ de um grafo é o maior número de cores usadas em uma coloração pelo Algoritmo Guloso de Coloração considerando todas as ordens possíveis de $V(G)$. Esse parâmetro foi introduzido no contexto de grafos direcionados e com aplicação à jogos em [Grundy 1939] e posteriormente relacionado ao problema de coloração de grafos por

*Essa pesquisa foi financiada pelo CNPq (Grants 304831/2017-4 e 425297/2016-0) e CAPES (Grant 88887.197437/2018-00)

[Christen and Selkow 1979]. Em geral, o problema de determinar o número de Grundy é NP-completo [Goyal and Vishwanathan 1997].

Tendo em vista a dificuldade do problema, é natural a proposição de heurísticas para abordá-lo. Em [Rodrigues 2020], foi introduzido o *Algoritmo Guloso de Coloração d-imprópria* e, como feito habitualmente, um parâmetro para medir o seu pior caso, o número de Grundy d-impróprio $\Gamma^d(G)$ de um grafo G.

Neste trabalho, nós investigamos $\Gamma^d(G)$ em algumas subclasses de cografos.

2. Algoritmo Guloso de Coloração d-imprópria

De forma semelhante ao Algoritmo Guloso de Coloração, dada uma ordem dos vértices de um grafo, o Algoritmo Guloso de Coloração d-imprópria colore cada vértice com a menor cor *disponível* considerando os vértices já coloridos. A *impropriedade* de um vértice v indica o número de vizinhos coloridos com a mesma cor de v [Cowen et al. 1986]. Uma cor i está *disponível* para um vértice v se v tem no máximo d vizinhos coloridos com i e nenhum deles tem impropriedade d. Dizemos que um vértice v está *saturado* se v tem impropriedade d, e que uma cor é *saturada em um conjunto de vértices* se pelo menos um vértice do conjunto colorido com a cor é saturado. O *número de Grundy d-impróprio* de um grafo G, denotado por $\Gamma^d(G)$, é o maior inteiro k tal que o Algoritmo Guloso de Coloração d-imprópria retorna uma coloração d-imprópria com k cores, considerando todas as ordenações possíveis de $V(G)$.

Lema 1. *[Rodrigues 2020] Seja G um grafo qualquer e $d \geq 0$, então $\Gamma^d(G) \leq \left\lceil \frac{|V(G)|}{d+1} \right\rceil$. Se G é um grafo completo, esse limite é justo.*

Demonstração. Suponha que, por absurdo, $\Gamma^d(G) > \left\lceil \frac{|V(G)|}{d+1} \right\rceil$. Seja u um vértice colorido com a cor $\left\lceil \frac{|V(G)|}{d+1} \right\rceil + 1$. A existência de u implica que existe uma cor i, $i < \left\lceil \frac{|V(G)|}{d+1} \right\rceil + 1$, atribuída a menos de $d+1$ vértices. Como u não pôde receber a cor i e não existem $d+1$ vértices com a cor i que pudessem ser adjacentes a u, isso implica que existe v colorido com i, $uv \in E(G)$, tal que v possui d vizinhos com a cor i. Ora, isso implica que a cor i é atribuída a pelo menos $d+1$ vértices, uma contradição. No caso de grafos completos, cada conjunto de $d+1$ vértices satura uma cor e, portanto, esse limite é justo. □

O Lema 1 apresenta um limite superior trivial para o número de Grundy d-impróprio e consequentemente para o número cromático d-impróprio de um grafo G.

3. Número de Grundy d-impróprio de cografos

Seja P_4 um caminho induzido com quatro vértices. Dizemos que um grafo G é um *cografo* se G é livre de P_4's induzidos. O grafo G obtido pela *união disjunta* ($\cup$) de G_1 e G_2 tem $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. O grafo G obtido pela *união completa* ($+$) de G_1 e G_2 tem $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u, v) | u \in G_1, v \in G_2\}$. [Corneil et al. 1981] mostraram que um cografo pode ser definido recursivamente como segue: o grafo trivial é um cografo; se G_1 e G_2 são cografos, então o grafo G obtido a partir da união completa ou disjunta entre G_1 e G_2 é um cografo. O teorema que segue trata do número de Grundy d-impróprio de grafos desconexos.

Teorema 2. *[Rodrigues 2020] Seja $G = G_1 \cup G_2$. Então, $\Gamma^d(G) = \max\{\Gamma^d(G_1), \Gamma^d(G_2)\}$.*

Demonstração. Provamos que $\Gamma^d(G) \geq \max\{\Gamma^d(G_1), \Gamma^d(G_2)\}$ e $\Gamma^d(G) \leq \max\{\Gamma^d(G_1), \Gamma^d(G_2)\}$ e o resultado segue. Dada uma coloração d-imprópria gulosa de G com $\Gamma^d(G)$ cores, a necessidade de uma cor $\max\{\Gamma^d(G_1), \Gamma^d(G_2)\} + 1$ só seria justificada se novas arestas fossem adicionadas em G_1 ou em G_2 ou entre G_1 e G_2. Uma vez que a união disjunta não cria novas arestas, o limite superior está provado. Por outro lado, como a união das colorações gulosas de G_1 e G_2 com $\Gamma^d(G_1)$ e $\Gamma^d(G_2)$ cores, respectivamente, é uma coloração gulosa d-imprópria de G com $\max\{\Gamma^d(G_1), \Gamma^d(G_2)\}$ cores, o limite inferior está provado. □

A seguir, tratamos de classes de cografos conexos. O seguinte resultado é trivial, uma vez que o grafo obtido pela união completa de dois grafos completos é completo.

Teorema 3. *Sejam G_1 e G_2 grafos completos e $G = G_1 + G_2$ com $|V(G)| = n$. Então, $\Gamma^d(G) = \left\lceil \frac{n}{d+1} \right\rceil$.* □

O exame da união completa de dois grafos sem arestas G_1 e G_2 deve ser feito, entretanto, mais detalhadamente. Primeiramente, observe que o resultado da união completa, nesse caso, é um grafo bipartido completo $G = (V(G_1), V(G_2))$. Considere, sem perda de generalidade, um vértice v qualquer em $V(G_1)$. O vértice v estará proibido de receber uma cor i em duas situações. Caso tenha mais que d vizinhos coloridos com a cor i (e isso implica ter mais que d vértices coloridos com a cor i em $V(G_2)$) ou caso tenha em sua vizinhança um vértice saturado colorido com a cor i (e isso implica ter d vértices coloridos com a cor i em $V(G_1)$). Assim, uma coloração que satura uma cor c em ambas as partes da bipartição colore d vértices com c em $V(G_1)$ e em $V(G_2)$.

Teorema 4. *Sejam G_1 e G_2 grafos sem arestas onde $|V(G_1)| \leq |V(G_2)|$ e $G = G_1 + G_2$. Então, para $d \geq 1$ e $t = \left\lceil \frac{|V(G_1)|}{d} \right\rceil$, $\Gamma^d(G) = t$ se $|V(G_2)| \leq dt$ e $\Gamma^d(G) = t + 1$ caso contrário.*

Demonstração. Seja H um subgrafo induzido de G, obtido pela união completa de G_1 com $|V(G_1)|$ vértices de G_2. Uma ordem que alterna d vértices de $V(G_1)$ com d vértices de $V(G_2)$ colore sucessivamente $2d$ vértices do grafo para cada cor i saturada. Isso impede que a cor i seja usada no restante do grafo. Logo essa ordem utiliza $\left\lceil \frac{|V(H)|}{2d} \right\rceil$, ou seja, t cores para colorir H. Se $|V(G_1)| = |V(G_2)|$, então $\Gamma^d(G) = t$.

Se $|V(G_1)| < |V(G_2)|$, considere então uma coloração d-imprópria ótima de H com t cores. Observe que todos os vértices de G_1 estão coloridos. Se $|V(G_2)| \leq dt$, os vértices não coloridos de G_2 podem receber a cor t e $\Gamma^d(G) = t$. Agora, considere o caso em que $|V(G_2)| > dt$. Observe que todos os vértices de G_1 coloridos de 1 a $t-1$ estão saturados e os coloridos com t podem tornar-se saturados ao final da coloração de G. Além disso, todos os vértices de G_2 que receberam as cores 1 a $t-1$ estão saturados. Os $|V(G_2)| - dt$ vértices não coloridos de G_2 não podem ser coloridos com cor menor ou igual a t, pois isso violaria a impropriedade de vértices de G_1. Note que a cor $t+1$ não ocorre em G_1. Ademais, G_2 não possui arestas. Portanto, esses dois fatos indicam que a cor $t+1$ pode ser usada em todos os vértices ainda não coloridos de G_2. Isso encerra a prova. □

Observe que se G é um grafo isomorfo ao K_2, o caso de G é tratado por ambos Teoremas 3 e 4. Usamos o fato de que o parâmetro Γ^d é monotônico com respeito a subgrafos, ou seja, $\Gamma^d(H) \leq \Gamma^d(G)$ para todo $H \subseteq G$ (visto que a inclusão de arestas só pode aumentar o número de Grundy d-impróprio), para extrair resultados para a união completa de quaisquer cografos, considerando o caso $d = 1$. A seguir apresentamos um limite inferior de $\Gamma^1(G)$ para grafos G obtidos a partir da união completa entre dois cografos.

Teorema 5. *Sejam G_1 e G_2 cografos quaisquer onde $|V(G_1)| \leq |V(G_2)|$, e $G = G_1 + G_2$. Então, $\Gamma^1(G) = |V(G_1)|$ se $|V(G_1)| = |V(G_2)|$ e $\Gamma^1(G) \geq |V(G_1)| + 1$ caso contrário.*

Demonstração. O grafo G possui como subgrafo gerador o cografo obtido pela união completa de dois grafos sem arestas. Como a inclusão de arestas só pode aumentar o número de Grundy 1-impróprio, temos que os valores estabelecidos no Teorema 4 constituem um limite inferior para $\Gamma^d(G)$. Logo, usando o Teorema 4 para $d = 1$, obtemos $\Gamma^1(G) \geq |V(G_1)|$ quando $|V(G_1)| = |V(G_2)|$ ou $\Gamma^1(G) \geq |V(G_1)| + 1$ caso contrário. Ademais, usando Lema 1, no caso de $|V(G_1)| = |V(G_2)|$, obtém-se que $\Gamma^1(G) = |V(G_1)|$. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

Esse trabalho prosseguirá com o estudo do parâmetro em cografos em geral e nas suas superclasses, de grafos com poucos P_4's, que são definidas pela quantidade de P_4's admitidos a cada certo número fixo de vértices.

Os autores são gratos aos pareceristas pela leitura cuidadosa e valiosas sugestões. Como foi observado por um dos pareceristas, todos os resultados aqui apresentados aplicam-se a grafos que são obtidos por união completa ou união disjunta de dois grafos quaisquer (não apenas de cografos). Essa observação é verdadeira, a nossa escolha em trabalhar com cografos dá-se pelo desejo de obter uma estimativa recursiva do valor do parâmetro. Contudo, essa observação pertinente nos leva a almejar o estudo do comportamento do parâmetro com respeito a outras operações em grafos.

Referências

Christen, C. A. and Selkow, S. M. (1979). Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(1):49 – 59.

Corneil, D., Lerchs, H., and Burlingham, L. (1981). Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3):163 – 174.

Cowen, L., Goddard, W., and Jesurum, C. E. (1997). Defective coloring revisited. *Journal of Graph Theory*, 24(3):205–219.

Cowen, L. J., Cowen, R. H., and Woodall, D. R. (1986). Defective colorings of graphs in surfaces: Partitions into subgraphs of bounded valency. *Journal of Graph Theory*, 10(2):187–195.

Goyal, N. and Vishwanathan, S. (1997). NP-completeness of undirected grundy numbering and related problems. *Unpublished manuscript*.

Grundy, P. M. (1939). Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–9.

Karp, R. M. (1972). *Reducibility among Combinatorial Problems*, pages 85–103. Springer US, Boston, MA.

Rodrigues, E. (2020). Coloração k-imprópria gulosa. Dissertação de Mestrado, MDCC - Universidade Federal do Ceará.