Conjuntos Dominantes e Dominantes Independentes em Grafos de Petersen Generalizados

A. A. Pereira[1], **C. N. Campos**[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 1251 – 13083-852 – Campinas – SP – Brazil

alessandra.pereira@students.ic.unicamp.br, campos@ic.unicamp.br

Abstract. *A dominating set of a graph G is a set S of vertices such that every vertex in G is either in S or is adjacent to a vertex in S. An independent dominating set of G is both dominating and independent in G. In this work, we study dominating and independent dominating sets of Generalized Petersen graphs.*

Resumo. *Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um conjunto dominante se todo vértice de G é um elemento de S ou é adjacente a um elemento de S. Um conjunto dominante independente de G é, ao mesmo tempo, um conjunto dominante e um conjunto independente em G. Neste trabalho, estudamos conjuntos dominantes e conjuntos dominantes independentes dos Grafos de Petersen Generalizados.*

1. Introdução

Seja G um grafo simples, finito e não orientado com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. O grau mínimo de G é denotado por $\delta(G)$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto dominante* se, para todo $v \in V(G)$, $v \in S$ ou v é adjacente a algum vértice de S. Note que $V(G)$ é um conjunto dominante. Desta forma, o desafio é encontrar um conjunto dominante de cardinalidade mínima. A cardinalidade de um menor conjunto dominante de G é chamada de *número de dominação* e é denotada por $\gamma(G)$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *independente* se todos os seus vértices são dois a dois não adjacentes. Um *conjunto dominante independente* de G é, ao mesmo tempo, um conjunto dominante e um conjunto independente. O *número de dominação independente* de G, denotado por $i(G)$, é a cardinalidade de um menor conjunto dominante independente de G.

Determinar $\gamma(G)$ e $i(G)$ para um grafo arbitrário G são problemas NP-difíceis (Garey e Johnson, 1979), mesmo quando restritos a grafos cúbicos (Liu et al., 2015). Isto estimula a busca por limitantes para $\gamma(G)$ e $i(G)$. Ore (1962) provou que $\gamma(G) \leq |V(G)|/2$ para G com $\delta(G) \geq 1$. Blank (1973) e McCuaig e Shepherd (1989) provaram, de maneira independente, que $\gamma(G) \leq 2|V(G)|/5$ para grafos conexos com $\delta(G) \geq 2$. Reed (1996) mostrou que $\gamma(G) \leq 3|V(G)|/8$ quando restrito a grafos conexos com $\delta(G) \geq 3$. Todos estes limitantes são justos. Reed conjecturou, ainda, que para grafos cúbicos conexos $\gamma(G) \leq \lceil |V(G)|/3 \rceil$. No entanto, Kostochka e Stodolsky (2005) mostraram que esta conjectura é falsa. De fato, eles exibiram uma classe infinita de grafos cúbicos conexos para os quais $\gamma(G) > \lceil |V(G)|/3 \rceil$. Estes trabalhos estimularam a pesquisa por grafos cúbicos que verificam ou melhoram a conjectura de Reed.

Como todo conjunto dominante independente é um conjunto dominante, segue que $\gamma(G) \leq i(G)$. Decidir se $\gamma(G) = i(G)$ também é um problema NP-completo (Alvarado et al., 2015). De fato, mesmo quando restrita a grafos cúbicos e conexos, a diferença

$i(G) - \gamma(G)$ pode ser arbitrariamente grande (Žerovnik e Oplerova, 1993). Isto motiva tanto o estudo dos grafos cúbicos com número de dominação limitado pelo valor da conjectura de Reed, como também a determinação do número de dominação independente destes grafos, para avaliar o quão distantes estes dois parâmetros estão. Neste contexto, este trabalho aborda os números de dominação e número de dominação independente dos Grafos de Petersen Generalizados, denotados por $P(l, k)$. Provamos que para $P(l, k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, o número de dominação é igual ao número de dominação independente, exceto para $P(11, 3)$ e para $P(l, 1)$ em que $l \equiv 1 \pmod 4$.

2. Resultados

Watkins (1969) define um *Grafo de Petersen Generalizado* $P(l, k)$, $k \leq \lfloor (l-1)/2 \rfloor$ e $l \geq 3$, tal que $V(P(l, k)) = X \cup Y$, com $X = \{x_i : 0 \leq i < l\}$ e $Y = \{y_i : 0 \leq i < l\}$, e $E(P(l, k)) = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, com $E_0 = \{x_i x_{i+1} : 0 \leq i < l\}$, $E_1 = \{y_i y_{i+k} : 0 \leq i < l\}$ e $E_2 = \{x_i y_i : 0 \leq i < l\}$, supondo os índices tomados módulo l. O número de dominação do $P(l, k)$ tem sido bastante estudado na literatura. No entanto, $\gamma(P(l, k))$ é conhecido em poucos casos. De particular relevância para o nosso trabalho são os resultados obtidos por Ebrahimi et al. (2009), estabelecidos no Teorema 1.

Teorema 1 (Ebrahimi et al. (2009))**.** *Seja $G = P(l, k)$ para $k \in \{1, 2, 3\}$. Então,*

$$\gamma(G) = \begin{cases} \lfloor l/2 \rfloor + 1 & \textit{se } k = 1 \textit{ e } l \equiv 1, 2 \pmod 4; \\ \lceil l/2 \rceil & \textit{se } k = 1 \textit{ e } l \equiv 0, 3 \pmod 4; \\ \lceil 3l/5 \rceil & \textit{se } k = 2; \\ \lceil l/2 \rceil & \textit{se } k = 3 \textit{ e } l \equiv 0, 1 \pmod 4 \textit{ ou } l = 11; \\ \lceil l/2 \rceil + 1 & \textit{se } k = 3,\ l \equiv 2, 3 \pmod 4 \textit{ e } l \neq 11. \end{cases}$$ □

Neste trabalho, determinamos o número de dominação independente do $P(l, k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, e o comparamos com os resultados de Ebrahimi et al. (2009). Em particular, o Teorema 3, com o auxílio do Lema 2, prova que $i(P(l, 1)) = \gamma(P(l, 1))$, quando $l \equiv 0, 2, 3 \pmod 4$, e $i(P(l, 1)) = \gamma(P(l, 1)) + 1$, quando $l \equiv 1 \pmod 4$; o Teorema 4 prova que $i(P(l, 2)) = \gamma(P(l, 2))$; e o Teorema 5 prova que $i(P(l, 3)) = \gamma(P(l, 3))$, quando $l \neq 11$, e $i(P(11, 3)) = \gamma(P(11, 3)) + 1$.

Lema 2. *Se $G = P(l, 1)$, $l \equiv 1 \pmod 4$, então $i(G) \geq \lfloor l/2 \rfloor + 2$.* □

Teorema 3. *Seja $P(l, 1)$ um Grafo de Petersen Generalizado com $l \geq 3$. Então,*

$$i(P(l,1)) = \begin{cases} \lfloor l/2 \rfloor + 2 & \textit{se } l \equiv 1 \pmod 4, \\ \lfloor l/2 \rfloor + 1 & \textit{se } l \equiv 2 \pmod 4, \\ \lceil l/2 \rceil & \textit{se } l \equiv 0, 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Esboço da demonstração. Seja $G = P(l, 1)$ com $l = 4t + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Note que, pela definição de k, se $k = 1$, então $l \geq 3$. Seja $S \subseteq V(G)$ tal que $S = A \cup B \cup R$ em que $A = \{x_{4i+1} : 0 \leq i < \lfloor (l+2)/4 \rfloor\}$, $B = \{y_{4i+3} : 0 \leq i < \lfloor l/4 \rfloor\}$, $R = \emptyset$ se $r = 0$, $R = \{x_{l-1}, y_0\}$ se $r = 1$, e $R = \{y_0\}$ se $r \in \{2, 3\}$.

Inicialmente, observe que S é um conjunto independente. Vamos, agora, mostrar que S é um conjunto dominante. Cada $x_{4i+1} \in A$ domina x_{4i}, x_{4i+1}, y_{4i+1} e x_{4i+2}

e cada $y_{4i+3} \in B$ domina y_{4i+2}, y_{4i+3}, x_{4i+3} e y_{4i+4}. Note que $A = \{x_1, x_5, \ldots, x_\alpha\}$ e $B = \{y_3, y_7, \ldots, y_\beta\}$ em que $\alpha = 4\lfloor (l+2)/4 \rfloor - 3$ e $\beta = 4\lfloor l/4 \rfloor - 1$. Logo: quando $l \equiv 0 \pmod 4$, $A \cup B$ domina $V(G)$; quando $l \equiv 1 \pmod 4$, $A \cup B$ domina $V(G) \setminus \{x_{l-1}, y_0\}$; quando $l \equiv 2 \pmod 4$, $A \cup B$ domina $V(G) \setminus \{y_0\}$; e, por fim, quando $l \equiv 3 \pmod 4$, $A \cup B$ domina $V(G) \setminus \{y_{l-1}, y_0\}$. Concluímos que S é um conjunto dominante independente de G, dado que $x_{l-1}, y_0 \in R$ e a aresta $y_{l-1}y_0 \in E(G)$. Por construção, $|S| = \lceil l/2 \rceil$ se $l \equiv 0, 3 \pmod 4$, $|S| = \lfloor l/2 \rfloor + 1$ se $l \equiv 2 \pmod 4$ e $|S| = \lfloor l/2 \rfloor + 2$ se $l \equiv 1 \pmod 4$. O resultado segue considerando os valores de $\gamma(G)$ determinados por Ebrahimi et al. (2009) e o Lema 2. $\square$

Teorema 4. *Seja $P(l, 2)$ um Grafo de Petersen Generalizado com $l \geq 5$. Então, $i(P(l, 2)) = \lceil 3l/5 \rceil$.*

Esboço da demonstração. Seja $G = P(l, 2)$, $l \geq 5$. Considerando Ebrahimi et al. (2009), segue que $i(G) \geq \lceil 3l/5 \rceil$. Resta mostrar que $i(G) \leq \lceil 3l/5 \rceil$. Para isso, construímos um conjunto dominante independente S com esta cardinalidade.

Seja $l = 5t + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Particione $V(G)$ em t partes $B^0, B^2, \ldots, B^{t-1}$ tais que $B^i = \{x_{5i+j}, y_{5i+j} : 0 \leq j \leq 4\}$, e uma parte adicional $B^t = \{x_{l-r+j}, y_{l-r+j} : 0 \leq j < r\}$ se $r \neq 0$ (considere $B^t = \emptyset$ se $r = 0$). Note que $|B^i| = 10$ quando $0 \leq i < t$ e $|B^t| = 2r$. Para $0 \leq i < t$, seja $D^i = \{x_{5i+1}, y_{5i+2}, x_{5i+3}\}$. A Figura 1 ilustra B^i e D^i. Note que D^i domina todos os vértices de B^i e que seus vértices não são adjacentes entre si e nem a vértices de B^j, $j \neq i$. Desta forma, $S^0 = \cup_{i=0}^{t-1} D^i$ domina $G[V(G) \setminus B^t]$.

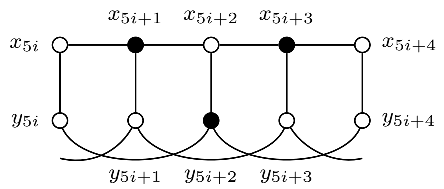


Figura 1. Bloco B^i. Vértices de D^i representados em preto.

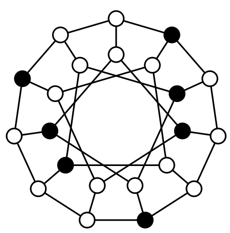
Para $r = 0$, $G = G[\cup_{i=0}^{t-1} B^i]$. Logo, S^0 domina $V(G)$ e $S^0 = \lceil 3l/5 \rceil$. Resta, analisar B^t, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sejam $S^1 = \{y_{l-1}\}$, $S^2 = \{x_{l-2}\}$, $S^3 = \emptyset$ e $S^4 = \{y_{l-4}\}$. Como $B^t = \{x_{l-r+j}, y_{l-r+j} : 0 \leq j < r\}$, concluímos que $S = \cup_{i=0}^{r} S^i$ é um conjunto dominante independente de G. Ademais, $|S| = 3t+1$ se $r = 1$, $|S| = 3t+2$ se $r \in \{2, 3\}$ e $|S| = 3t + 3$ se $r = 4$. Em todos os casos, $|S| = \lceil 3l/5 \rceil$ e o resultado segue. $\square$

Teorema 5. *Seja $P(l, 3)$ um Grafo de Petersen Generalizado com $l \geq 7$. Então,*

$$i(P(l,3)) = \begin{cases} \lceil l/2 \rceil & \textit{se } l \equiv 0, 1 \pmod 4; \\ \lceil l/2 \rceil + 1 & \textit{se } l \equiv 2, 3 \pmod 4). \end{cases}$$

Esboço da demonstração. Seja $G = P(l, 3)$, $l \geq 7$. Como nos casos anteriores, $i(G) \geq \gamma(G)$, com $\gamma(G)$ determinado por Ebrahimi et al. (2009).

Considere, inicialmente, $G = P(11, 3)$. É possível mostrar que todo conjunto dominante mínimo neste grafo possui um par de vértices adjacentes (Ebrahimi et al., 2009). Logo, $i(G) > \gamma(G) = 6$. A figura ao lado exibe um conjunto dominante independente de G com cardinalidade sete. Logo, $i(G) = 7 = \lceil l/2 \rceil + 1$ e o resultado segue.



Suponha, agora, $l \neq 11$ com $l = 4t + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Seja $S \subseteq V(G)$ tal que $S = A \cup B \cup R$ em que $A = \{x_{4i+1} : 0 \leq i < \lfloor (l+1)/4 \rfloor\}$, $B = \{y_{4i+3} : 0 \leq i < \lfloor l/4 \rfloor\}$, $R = \emptyset$ se $r = 0$, $R = \{y_{l-1}\}$ se $r = 1$, $R = \{x_{l-2}, y_{l-1}\}$ se $r = 2$ e $R = \{y_2, y_{l-3}\}$ se $r = 3$.

Inicialmente, observe que S é um conjunto independente. Vamos, agora, mostrar que S é um conjunto dominante. Cada $x_{4i+1} \in A$ domina x_{4i}, x_{4i+1}, y_{4i+1} e x_{4i+2}, e cada $y_{4i+3} \in B$ domina y_{4i}, y_{4i+3}, x_{4i+3} e y_{4i+6}. Note que $A = \{x_1, x_5, \ldots, x_\alpha\}$ e $B = \{y_3, y_7, \ldots, y_\beta\}$ em que $\alpha = 4\lfloor (l+1)/4 \rfloor - 3$ e $\beta = 4\lfloor l/4 \rfloor - 1$. Logo: quando $l \equiv 0 \pmod 4$, $A \cup B$ dominam $V(G)$; quando $l \equiv 1 \pmod 4$, $A \cup B$ domina $V(G) \setminus \{y_2, x_{l-1}, y_{l-1}\}$; quando $l \equiv 2 \pmod 4$, $A \cup B$ domina $V(G) \setminus \{y_2, x_{l-2}, x_{l-1}, y_{l-2}, y_{l-1}\}$; e, por fim, quando $l \equiv 3 \pmod 4$, $A \cup B$ domina $V(G) \setminus \{y_2, y_{l-3}\}$. O resultado segue considerando que os vértices não dominados por $A \cup B$ ou estão em R ou são adjacentes a um vértice de R. $\square$

Neste trabalho, estudamos o número de dominação e o número de dominação independente dos Grafos de Petersen Generalizados $P(l, k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$. A partir dos resultados obtidos, conjecturamos que a diferença $i(P(l, k)) - \gamma(P(l, k))$ esteja limitada a um. A análise preliminar dos casos $k = 4$ e $k = 5$ verifica esta conjectura. Entretanto, os casos em que a diferença ocorre ainda não estão bem caracterizados. Nossos estudos estão agora focados nesta conjectura e na busca por uma propriedade que determine quais são os grafos para os quais $i(P(l, k)) \neq \gamma(P(l, k))$.

Referências

Alvarado, J. D., Dantas, S., e Rautenbach, D. (2015). Complexity of comparing the domination number to the independent domination, connected domination, and paired domination numbers. *Matemática Contemporânea*, 44(1):1–8.

Blank, M. (1973). An estimate of the external stability number of a graph without suspended vertices. *Prikl. Math. i Programmirovanie*, 10:3–11.

Ebrahimi, B. J., Jahanbakht, N., e Mahmoodian, E. S. (2009). Vertex domination of generalized petersen graphs. *Discrete mathematics*, 309(13):4355–4361.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, US.

Kostochka, A. V. e Stodolsky, B. Y. (2005). On domination in connected cubic graphs. *Discrete mathematics*, 304(1–3):45–50.

Liu, C. H., Poon, S. H., e Lin, J. Y. (2015). Independent dominating set problem revisited. *Theoretical Computer Science*, 562:1–22.

McCuaig, W. e Shepherd, B. (1989). Domination in graphs with minimum degree two. *Journal of Graph Theory*, 13(6):749–762.

Ore, O. (1962). *Theory of Graphs*. American Mathematical Society, Providence, US.

Reed, B. (1996). Paths, stars and the number three. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5(3):277–295.

Žerovnik, J. e Oplerova, J. (1993). A counterexample to conjecture of Barefoot, Harary, and Jones. *Graphs and Combinatorics*, 9(2–4):205–207.

Watkins, M. E. (1969). A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 6(2):152–164.