Um modelo estendido para o problema de roteamento em anéis de dois níveis

Cecília Lescano Osório[1], Edna Ayako Hoshino[1]

[1]Faculdade de Computação – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)
Cidade Universitária, Caixa Postal 549. CEP 79070-900. Campo Grande - MS - Brasil

cecilia.osorio@ufms.br, eah@facom.ufms.br

Abstract. *This work introduces a branch-and-price approach for the design of a two-level network in which each level is a ring.*

Resumo. *Este trabalho apresenta uma abordagem branch-and-price para o projeto de uma rede hierárquica em dois níveis onde cada nível é um anel.*

1. Introdução

Neste trabalho é estudado o problema de roteamento em anéis de dois níveis (RRP), do inglês *ring/ring problem*, que consiste na construção de uma rede hierárquica em dois níveis, chamada **rede** *ring/ring*, na qual cada nível é um anel ou ciclo, ou ainda *ring*. O ciclo do primeiro nível é chamado *backbone* e deve passar por um nó especial denotado por d. Cada ciclo do nível secundário é chamado **rede de acesso** e deve possuir exatamente um nó (denominado *hub*) em comum com o *backbone*. As redes de acesso devem ser disjuntas, exceto possivelmente pelos *hubs*.

Uma instância do RRP é dada por um grafo não orientado completo $G = (V, E)$, funções $s : E \mapsto \mathbb{Z}$ e $b : E \mapsto \mathbb{Z}$, que associam a cada aresta um custo de incluí-la em uma rede de acesso e no *backbone*, respectivamente, e uma função $f : V \mapsto \mathbb{Z}$, correspondente ao custo de se incluir facilidades em cada vértice para permitir que ele faça parte do *backbone* e de uma ou mais redes de acesso, ou seja, para que se torne um *hub*, além de um valor k que é o número máximo de redes de acesso permitidas em um mesmo *hub* e de um valor Q que limita o comprimento de cada ciclo, seja *backbone* ou rede de acesso. Com esses dados, o **RRP** consiste em construir uma rede *ring*/*ring* de custo total mínimo.

Foi desenvolvido um modelo de programação linear inteira (PLI) com um número exponencial de variáveis para a resolução desse problema, no qual cada coluna representa um possível ciclo de tamanho menor ou igual a Q.

Variações do problema já foram estudadas na literatura, utilizando-se outros métodos para a sua solução, como em [Rodríguez-Martín et al. 2016a] e [Rodríguez-Martín et al. 2016b], que utilizam a abordagem *branch-and-cut*. Um algoritmo *branch-and-price* para o problema já foi apresentado em [Thomadsen and Stidsen 2005], porém em sua abordagem a construção da rede *ring*/*ring* é dividida em etapas, que são resolvidas separadamente. Observe que a solução ótima da abordagem de [Thomadsen and Stidsen 2005] pode ser uma solução subótima para o RRP. Este trabalho se diferencia dele por considerar toda a construção da rede como um único passo.

2. Formulação matemática proposta

Considere $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os possíveis ciclos do grafo G. O modelo de PLI proposto consiste em uma formulação de partição, na qual associa-se uma variável de decisão λ_p para cada ciclo $p \in \mathcal{P}$.

2.1. Problema Mestre

Denote por $\{i,j\}$ uma aresta em E com extremidades i e j. Considere $A = \{(i,j),(j,i) : \{i,j\} \in E\}$ sendo o conjunto de arcos obtidos pelas orientações das arestas em E. No modelo, a variável $\lambda_p = 1$ se e somente se o ciclo p faz parte da solução. Variáveis adicionais são usadas para modelar o problema mestre. A variável binária $w_i = 1$ se e somente se vértice i possui facilidade instalada, ou seja, i pertence ao *backbone* e pode conectar redes de acessos. Dois grupos de variáveis binárias y e x são associados a cada arco em A. A variável $x_{(i,j)} = 1$ se e somente se (i,j) pertence à solução enquanto $y_{(i,j)} = 1$, se e somente se (i,j) pertence ao backbone. Um grupo de variáveis inteiras u é usado para modelar as restrições MTZ [Miller et al. 1960] para a eliminação de subciclos.

Utilizamos um vetor característico a^p para representar um ciclo p, sendo $a^p_{\{i,j\}} = 1$ se a aresta $\{i,j\}$ pertence a um ciclo p, e $a^p_{\{i,j\}} = 0$ caso contrário. O custo de um ciclo $p \in \mathcal{P}$, considerando-se apenas os custos de conectar os vértices do ciclo em uma rede de acesso, é denotado por c_p e é dado pela equação $c_p = \sum_{\{i,j\}\in E} s_{\{i,j\}} a^p_{\{i,j\}}$. Considere $\bar{b}_{\{i,j\}} = b_{\{i,j\}} - s_{\{i,j\}}$. O modelo para o RRP é como segue:

$$\min \sum_{p\in P} c_p\lambda_p + \sum_{i\in V\setminus\{d\}} f_i w_i + \sum_{\{i,j\}\in E} \bar{b}_{\{i,j\}}(y_{(i,j)} + y_{(j,i)}) \tag{1}$$

$$s.a. \sum_{p\in P} a^p_{\{i,d\}}\lambda_p = y_{(d,i)} + y_{(i,d)} \qquad \forall i \in V \setminus \{d\} \tag{2}$$

$$\sum_{p\in P} a^p_{\{i,j\}}\lambda_p \geq y_{(i,j)} + y_{(j,i)} \qquad \forall \{i,j\} \in E, i \neq d, j \neq d \tag{3}$$

$$\sum_{i\in V\setminus\{d\}} y_{(i,d)} = 1 \tag{4}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} y_{(j,i)} \leq 1 \qquad \forall i \in V \setminus \{d\} \tag{5}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{d\}} y_{(d,j)} = 1 \tag{6}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} y_{(j,i)} = \sum_{j\in V\setminus\{i\}} y_{(i,j)} \qquad \forall i \in V \setminus \{d\} \tag{7}$$

$$y_{(i,j)} + y_{(j,i)} \leq 1 \qquad \forall \{i,j\} \in E \tag{8}$$

$$\sum_{p\in P} a^p_{\{i,j\}}\lambda_p = x_{(i,j)} + x_{(j,i)} \qquad \forall \{i,j\} \in E \tag{9}$$

$$\sum_{p\in P}\sum_{i\in V}\sum_{j\in V\setminus\{i\}} a^p_{\{i,j\}}\lambda_p - 2\sum_{p\in P}\lambda_p = 2n-2 \tag{10}$$

$$\sum_{p\in P}\sum_{j\in V\setminus\{i\}} a^p_{\{i,j\}}\lambda_p - 2kw_i \leq 2 \qquad \forall i \in V \setminus \{d\} \tag{11}$$

$$(n+1)x_{(i,j)} + u_i - u_j - (n+1)w_j \leq n \qquad \forall (i,j) \in A \quad (12)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} y_{(i,j)} + \sum_{j \in V \setminus \{i\}} y_{(j,i)} \geq 2w_i, \forall i \in V \setminus \{d\} \quad (13)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{(j,i)} - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{(i,j)} = 0 \qquad \forall i \in V \setminus \{d\} \quad (14)$$

$$x_{(i,j)} + x_{(j,i)} \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in A \quad (15)$$

$$x, y \in \mathbb{B}^{|A|}, w \in \mathbb{B}^{|V|}, u \in \mathbb{N}^{|V|}, \lambda_p \geq 0, \forall p \in \mathcal{P}. \quad (16)$$

2.2. Problema de Pricing

Sejam $\pi_{\{i,j\}}$, $\theta_{\{i,j\}}$ e γ_i as variáveis duais associadas às Restrições (2-3), (9) e (10-11), respectivamente. Portanto, o custo reduzido $\bar{c}_{\{i,j\}}$ de cada aresta $\{i,j\}$ e o custo reduzido $\bar{c}_p$ de um ciclo p são calculados conforme segue:

$$\bar{c}_{\{i,j\}} = \sum_{\{i,j\} \in E} (c_{\{i,j\}} - \pi_{\{i,j\}} - \theta_{\{i,j\}} - 2\gamma_0 - \gamma_i - \gamma_j). \quad (17)$$

$$\bar{c}_p = \sum_{\{i,j\} \in E} \bar{c}_{\{i,j\}} + 2\gamma_d. \quad (18)$$

O objetivo do *pricing* é encontrar um ciclo em $\mathcal{P}$ de custo reduzido mínimo. Este problema é muito comum em problemas de roteamento de veículos e trata-se do problema conhecido como o problema de caminho mínimo com restrição de recursos, do inglês, *shortest path with resource constraints*, que é NP-difícil [Irnich S. 2005]. Por limitação de espaço, seu modelo de PLI é omitido do texto.

3. Contribuições e trabalhos futuros

Um dos desafios encontrados na construção do modelo foi garantir que os únicos vértices presentes em mais de um ciclo sejam os *hubs*. A Figura 1 ilustra um exemplo de rede formada pela união de ciclos que não respeita essa propriedade, e portanto não é *ring/ring*.

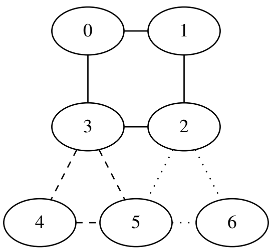

Figura 1. Exemplo de rede formada pela união de ciclos que não é *ring/ring*. O *backbone* **é representado com arestas contínuas, e as duas redes de acessos estão diferenciadas por arestas tracejadas e pontilhadas. Observe que ambas as redes de acesso possuem o vértice 5, que não é *hub*.**

Para modelar essas propriedades, observamos uma relação entre o número total de ciclos em um *ring/ring* e o número de arestas incidentes em cada vértice, que é formalizada no seguinte teorema e usada na restrição (10).

Teorema 1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices, R uma rede ring/ring em G com um total de ρ ciclos e $d(i)$ o número de arestas de R incidentes em cada vértice i. A seguinte desigualdade é uma desigualdade válida para o RRP:*

$$\sum_{i \in V}(d(i)) - 2\rho = 2n - 2. \tag{19}$$

Um programa foi implementado em C usando a ferramenta SCIP [Gamrath et al. 2016] para resolver o modelo desenvolvido. O problema é resolvido por um algoritmo *branch-and-price*, utilizando o método da geração de colunas para obter a relaxação linear. Resultados computacinais foram obtidos para grafos com até $|V| = 26$, mas o programa não encontrou solução ótima em um tempo limite de meia hora. Para lidar com problemas de simetria, que comprometia o desempenho do programa, foram incluidas outras restrições no modelo. A maior dificuldade parece estar no problema de *pricing*. Alternativas para acelerar a resolução incluem a relaxação do problema de *pricing*, permitindo a repetição de vértices como usadas com sucesso em variantes do VRP como discutido em [Baldacci et al. 2011] e [Poggi and Uchoa 2014], e também o uso de heurísticas de *pricing*. O trabalho daqui para frente consiste no estudo dessas alternativas e na escolha da mais adequada.

Referências

Baldacci, R., Mingozzi, A., and Roberti, R. (2011). New route relaxation and pricing strategies for the vehicle routing problem. *Operations Research*, 59(5):1269–1283.

Gamrath, G., Fischer, T., Gally, T., Gleixner, A. M., Hendel, G., Koch, T., Maher, S. J., Miltenberger, M., Müller, B., Pfetsch, M. E., Puchert, C., Rehfeldt, D., Schenker, S., Schwarz, R., Serrano, F., Shinano, Y., Vigerske, S., Weninger, D., Winkler, M., Witt, J. T., and Witzig, J. (2016). The SCIP Optimization Suite 3.2. Technical report, Optimization Online.

Irnich S., D. G. (2005). *Column Generation*, chapter Shortest Path Problems with Resource Constraints. Springer.

Miller, C., Tucker, A., and Zemlin, R. (1960). Integer programming formulations and traveling salesman problems. *Journal of ACM*, 7:326–329.

Poggi, M. and Uchoa, E. (2014). Chapter 3: New exact algorithms for the capacitated vehicle routing problem. In *MOS-SIAM Series on Optimization*, pages 59–86. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Rodríguez-Martín, I., Salazar-González, J.-J., and Yaman, H. (2016a). A branch-and-cut algorithm for two-level survivable network design problems. *Computers & Operations Research*, 67:102–112.

Rodríguez-Martín, I., Salazar-González, J.-J., and Yaman, H. (2016b). The ring/κ-rings network design problem: Model and branch-and-cut algorithm. *Networks*, 68(2):130–140.

Thomadsen, T. and Stidsen, T. (2005). Hierarchical ring network design using branch-and-price. *Telecommunication systems*, 29(1):61–76.