

Emparelhamento Desconexo é NP-Completo

Guilherme de C. M. Gomes¹, Bruno P. Masquio², Paulo E. D. Pinto²,
Vinícius F. Santos¹, Jayme L. Szwarcfiter^{2,3}

¹ Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) – Belo Horizonte, MG – Brazil

² Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) – Rio de Janeiro, RJ – Brazil

³ Instituto de Matemática e PESC/COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro, RJ – Brazil

{gcm.gomes, viniciussantos}@dcc.ufmg.br,
{brunomasquio, pauloedp}@ime.uerj.br, jayme@nce.ufrj.br

Abstract. A subset $M \subseteq E$ of edges of a graph $G = (V, E)$ is a matching if no two edges of M share a common vertex. Recently, subgraph-restricted matchings have been proposed, which require some properties from the subgraph induced by M -saturated vertices of G . We treat the disconnected matching problem, whose property is that the referred induced subgraph is disconnected. Although some efficient algorithms have already been shown for some classes, the complexity of the general problem remained opened. We present a proof that the disconnected matching is NP-complete, even for bipartite graphs with limited diameter.

Resumo. Um subconjunto $M \subseteq E$ de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é um emparelhamento se nenhum par de arestas de M compartilha um vértice comum. Recentemente, \mathcal{P} -emparelhamentos foram propostos, os quais requerem algumas propriedades dos subgrafos induzidos pelos vértices M -saturados de G . Tratamos um deles, o problema do emparelhamento desconexo, cuja propriedade é que o referido subgrafo induzido seja desconexo. Embora alguns algoritmos eficientes já tenham sido mostrados para algumas classes, a complexidade do problema geral permanecia em aberto. Apresentamos uma prova de que o emparelhamento desconexo é NP-completo, mesmo para grafos bipartidos e grafos com diâmetro limitado.

1. Introdução

Problemas relacionados a emparelhamentos são amplamente estudados há décadas pela comunidade científica, e já possuem resultados e aplicações importantes. Esses estudos podem abordar o problema de diversas formas, como, por exemplo, para grafos ponderados ou não, para determinadas classes de grafos ou para emparelhamentos satisfazendo uma propriedade \mathcal{P} . Esta última abordagem, recentemente proposta, busca encontrar um emparelhamento M em um grafo G tal que o subgrafo induzido pelos vértices M -saturados, denotado por $G[M]$, satisfaz a propriedade \mathcal{P} .

Elencamos alguns tipos de \mathcal{P} -emparelhamentos na Tabela 1, mostrando o nome do emparelhamento, a propriedade que o subgrafo induzido deve possuir, e a complexidade do problema para grafos em geral.

Emparelhamento	Propriedade \mathcal{P} do subgrafo	Complexidade
induzido	1-regular	NP-completo [Cameron 1989]
acíclico	acíclico	NP-completo [Goddard et al. 2005]
k -degenerado	k -degenerado ¹	NP-completo [Baste and Rautenbach 2018]
unicamente restrito	possui um único emparelhamento perfeito	NP-completo [Golombic et al. 2001]
conexo	conexo	polinomial [Masquio et al. 2020] [Goddard et al. 2005]
desconexo	desconexo	NP-completo [Este trabalho]

Tabela 1. \mathcal{P} -emparelhamentos a subgrafos e complexidades.

Vale ressaltar que alguns problemas continuam NP-completos mesmo para classes restritas. Por exemplo, o problema do emparelhamento induzido foi provado ser NP-completo, mesmo para grafos bipartidos. Porém, existem alguns problemas que são polinomiais para algumas classes, como é o caso de emparelhamentos desconexos, que foi mostrado ser $O(|V||E|)$ para grafos cordais [Masquio et al. 2019].

2. NP-completude de Emparelhamento Desconexo

Vamos esboçar a prova da NP-completude do problema de decisão EMPARELHAMENTO DESCONEXO. Tal problema é definido pela entrada (G, k) , sendo G um grafo e k um inteiro e a pergunta “Existe, em G , emparelhamento desconexo de cardinalidade $\geq k$?”

Para isso, utilizaremos uma redução do problema ONE-IN-THREE 3SAT, que é NP-completo [Garey and Johnson 1979]. A entrada deste problema é um conjunto I de m cláusulas na FNC, em que cada uma possui exatamente 3 literais, e sua pergunta é “Existe uma atribuição às variáveis V ou F tal que um único literal em cada cláusula seja igual a V ?”

Sem perda de generalidade, vamos considerar que, em ONE-IN-THREE 3SAT, não se repetem duas variáveis em uma mesma cláusula de I . Isso é possível pois essas cláusulas podem ser substituídas de forma simples sem que seja afetada a complexidade do problema. Além disso, toda variável deve estar presente em pelo menos uma cláusula.

2.1. Transformação da entrada de ONE-IN-THREE 3SAT

Vamos descrever uma transformação de uma entrada do ONE-IN-THREE 3SAT para o EMPARELHAMENTO DESCONEXO. Para tanto, construiremos um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ a partir de um conjunto de cláusulas da seguinte forma, como na Figura 1b.

1. Para cada cláusula c_i , adicionar uma cópia do subgrafo B_i da Figura 1a.
2. Para cada variável x presente em duas cláusulas c_i e c_j , sendo o q -ésimo literal de c_i e o t -ésimo literal de c_j , adicionar quatro arestas. Se x é negada em exatamente uma das cláusulas, adicionar o conjunto de arestas $\{(r_{iq}, l_{jt}), (l_{i(q+3)}, r_{j(t+3)})\}$. Senão, adicionar $\{(l_{i(q+3)}, r_{jt}), (r_{iq}, l_{j(t+3)})\}$.

¹Um grafo G é k -degenerado se o grau mínimo de $H \subseteq G$, $|V(H)| > 0$, é no máximo k .

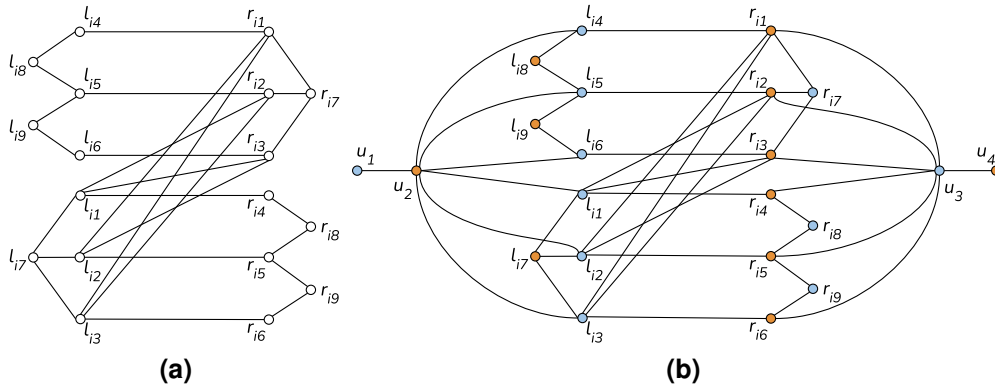


Figura 1. Em (a), o subgrafo B_i e, em (b), o subgrafo induzido de G pelos vértices $V(B_i) \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $u_1 \in V(U_1)$, $u_2 \in V(U_2)$, $u_3 \in V(U_3)$ e $u_4 \in V(U_4)$.

3. Gerar dois subgrafos bipartidos completos H_1 e H_2 , ambos isomorfos a $K_{3m,3m}$, $V(H_1) = V(U_1) \cup V(U_2)$ e $V(H_2) = V(U_3) \cup V(U_4)$.
4. Para cada $u_2 \in V(U_2)$ e cláusula c_i , adicionar as arestas $\{(u_2, l_{ij}) \mid j \in [6]\}$
5. Para cada $u_3 \in V(U_3)$ e cláusula c_i , adicionar as arestas $\{(u_3, r_{ij}) \mid j \in [6]\}$.
6. Defina $k = 12m$.

2.2. Propriedades de emparelhamentos desconexos em G

Descrevemos algumas propriedades do emparelhamento desconexo de cardinalidade pelo menos k determinada em um grafo G , gerado a partir do método da Subseção 2.1. Por fim, mostraremos que uma solução de ONE-IN-THREE 3SAT pode ser transformada em um emparelhamento desconexo de cardinalidade pelo menos k e vice-versa.

Lema 1 *Se M é um emparelhamento desconexo de cardinalidade pelo menos k , então $G[M]$ possui exatamente duas componentes conexas.*

Lema 2 *Se M é um emparelhamento desconexo de cardinalidade pelo menos k , B_i um subgrafo de cláusula e W_i o conjunto de vértices M -saturados de B_i , então W_i tem cardinalidade 12 e é um dos três conjuntos indicados na Tabela 2.*

Corolário 1 *Um emparelhamento desconexo máximo em um grafo definido na Subseção 2.1 tem cardinalidade k .*

Mostraremos agora, por um lado, uma transformação de um emparelhamento desconexo de cardinalidade pelo menos k em uma solução de ONE-IN-THREE 3SAT. Para cada cláusula c_i , em que x_{ij} corresponde ao j -ésimo literal de c_i , gerar as seguintes atribuições. Se o vértice l_{ij} é M -saturado, então $x_{ij} = V$. Senão, $x_{ij} = F$.

Por outro lado, também podemos transformar uma solução de ONE-IN-THREE 3SAT em um emparelhamento desconexo de cardinalidade k a partir do método a seguir. Para cada cláusula c_i , cujo literal verdadeiro é o j -ésimo, adicionar a M o conjunto de arestas definido por $\{(l_{ij}, l_{i7}), (r_{ij}, r_{i7}), (l_{iq}, l_{i8}), (r_{iq}, r_{i8}), (r_{it}, l_{i9}), (r_{it}, r_{i9}) \mid q \in \{4, 5\}, t \in \{5, 6\}, q \neq j + 3 \neq t \neq q\}$. Ademais, para H_1 , adicione ao emparelhamento $3m$ arestas, cada uma incidente de forma disjunta a quaisquer dois vértices, um de cada bipartição de H_1 . Repita o processo para H_2 .

Vértices possivelmente saturados em B_i
$\{l_{i1}, l_{i5}, l_{i6}, l_{i7}, l_{i8}, l_{i9}, r_{i1}, r_{i5}, r_{i6}, r_{i7}, r_{i8}, r_{i9}\}$
$\{l_{i2}, l_{i4}, l_{i6}, l_{i7}, l_{i8}, l_{i9}, r_{i2}, r_{i4}, r_{i6}, r_{i7}, r_{i8}, r_{i9}\}$
$\{l_{i3}, l_{i4}, l_{i5}, l_{i7}, l_{i8}, l_{i9}, r_{i3}, r_{i4}, r_{i5}, r_{i7}, r_{i8}, r_{i9}\}$

Tabela 2. Os conjuntos de vértices possivelmente saturados de um subgrafo B_i

2.3. Restrição para grafos de diâmetro limitado

O Lema 3, mostra que uma pequena modificação na transformação da Subseção 2.1, mantém válidos os Lemas anteriores, reduzindo, porém, o diâmetro do grafo para 3.

Lema 3 *Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$ o grafo bipartido construído a partir da Subseção 2.1 e $G' = (V'_1 \cup V'_2, E')$ de modo que $V(G') = V(G) \cup \{w_1, w_2\}$ e $E(G') = E(G) \cup \{(w_1, w_2)\} \cup \{(v, w_1) \mid v \in V(V_1)\} \cup \{(v, w_2) \mid v \in V(V_2)\}$. Se M é um emparelhamento desconexo em G' , $|M| \geq k$, então M também é um emparelhamento desconexo em G .*

O Teorema 1 resume a prova de que o problema em questão é NP-completo mesmo para classes restritas de grafos.

Teorema 1 EMPARELHAMENTO DESCONEXO é NP-completo mesmo para grafos bipartidos de diâmetro 3.

Os resultados anteriores implicam as seguintes dicotomias, em termos do diâmetro.

Corolário 2 *Para grafos bipartidos com diâmetro $\leq d$, EMPARELHAMENTO DESCONEXO é NP-completo se d for pelo menos 3 e pertence a P caso contrário.*

Corolário 3 *Para grafos com diâmetro $\leq d$, EMPARELHAMENTO DESCONEXO é NP-completo se d for pelo menos 2 e pertence a P caso contrário.*

Referências

- Baste, J. and Rautenbach, D. (2018). Degenerate matchings and edge colorings. *Discrete Applied Mathematics*, 239:38–44.
- Cameron, K. (1989). Induced matchings. *Discrete Applied Mathematics*, 24(1):97–102.
- Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.
- Goddard, W., Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., and Laskar, R. (2005). Generalized subgraph-restricted matchings in graphs. *Discrete Mathematics*, 293(1):129–138.
- Golumbic, M. C., Hirst, T., and Lewenstein, M. (2001). Uniquely restricted matchings. *Algorithmica*, 31(2):139–154.
- Masquio, B. P., Pinto, P. E. D., and Szwarcfiter, J. L. (2019). Algoritmos eficientes para emparelhamentos desconexos em grafos cordais e grafos bloco. In *Anais do IV Encontro de Teoria da Computação*, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.
- Masquio, B. P., Pinto, P. E. D., and Szwarcfiter, J. L. (2020). Emparelhamentos conexos. In *Anais do V Encontro de Teoria da Computação*, Cuiabá, MT, Brasil. SBC.