Árvores Ramsey-restritas mínimas

Maurício Collares[1], **Antônio K. B. Fernandes**[1], **Guilherme O. Mota**[2], **Hugo M. Vicente**[1*]

[1]Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

[2]Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo (USP)

mauricio@collares.org, antoniokaique@hotmail.com
mota@ime.usp.br, hugovicente@yahoo.com.br

Abstract. *Given graphs G, S and H, we write $G \xrightarrow{mr} (S, H)$ if every edge-colouring of G contains a monochromatic copy of S or a rainbow copy of H. We prove that, for $S = K_{1,3}$ and H a complete binary tree of height h, the smallest tree T satisfying $T \xrightarrow{mr} (S, H)$ has size $2^{(1/2+o(1))h^2}$.*

Resumo. *Para grafos G, S e H, dizemos que $G \xrightarrow{mr} (S, H)$ se toda coloração das arestas de G tem uma cópia monocromática de S ou uma cópia multicolorida de H. Provamos que se $S = K_{1,3}$ e H é uma árvore binária completa de altura h, então o tamanho da menor árvore T que satisfaz $T \xrightarrow{mr} (S, H)$ é $2^{(1/2+o(1))h^2}$.*

1. Introdução

Para grafos G, S e H dizemos que uma coloração de $E(G)$ é (S, H)-*restrita* se ela não contém uma cópia monocromática de S nem uma cópia *multicolorida* de H (uma cópia de H em que todas as arestas têm cores diferentes). Denotaremos a propriedade "G não admite coloração (S, H)-restrita" por $G \xrightarrow{mr} (S, H)$. O *número de Ramsey restrito* $r_c(S, H)$, definido como o menor n tal que $K_n \xrightarrow{mr} (S, H)$, foi estudado por diversos autores (veja, e.g., [Alon et al. 2003, Gyárfás et al. 2007, Loh and Sudakov 2009]).

Em [Jamison et al. 2003] é mostrado que o $r_c(S, H)$ existe se e somente se S é uma estrela ou H é uma floresta. Em [Collares et al. 2021], foi determinado o limiar para a propriedade $G(n, p) \xrightarrow{mr} (S, H)$ no caso em que H é uma floresta, onde $G(n, p)$ denota o grafo aleatório de Erdős-Rényi. Em particular, no caso em que S é uma estrela, o limiar depende do parâmetro

$$m_F(S, H) = \min \{k(G) \mid G \text{ é floresta e } G \xrightarrow{mr} (S, H)\},$$

onde $k(G)$ denota o tamanho da maior componente conexa de G. Neste artigo iremos investigar a ordem de crescimento do parâmetro $m_F(S, H)$ quando $S = K_{1,3}$, a estrela de três pontas, em termos do tamanho de H. Quando H é um caminho com d arestas (denotado por P_d), mostramos que $m_F(K_{1,3}, H) = d^{(1/2+o(1))d}$. Quando H é uma árvore binária completa de altura h (denotada por T_h), mostramos que $m_F(K_{1,3}, H) = 2^{(1/2+o(1))h^2}$. Tais resultados implicam cotas inferiores e superiores no caso geral.

*Guilherme O. Mota teve apoio financeiro de CNPq (304733/2017-2, 428385/2018-4) e FAPESP (2018/04876-1, 2019/13364-7). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

2. Resultado

O objetivo deste resumo estendido é provar os Teoremas 2.5 e 2.6, que fornecem cotas inferiores e superiores para $m_F(K_{1,3}, H)$ quando H é uma árvore binária completa ou um caminho. Nossas cotas inferiores são consequências de mostrar, nos Lemas 2.3 e 2.4, que a coloração da Definição 2.1 tem boas propriedades.

As seguintes definições serão úteis. Uma árvore enraizada será denotada por um par (H, r). Dada uma árvore enraizada T e um vértice v, um vértice w é *descendente* de v se o caminho de v a w é aresta-disjunto do caminho de v à raiz. Denotaremos por $h_T(v)$ a distância do vértice v à raiz e por $D_T(v)$ o número de descendentes de v (incluindo o próprio v). Um vértice w é *filho* de outro vértice v se $vw \in E(T)$ e $h_T(w) > h_T(v)$.

Definição 2.1 (Coloração por peso)**.** *Dada uma árvore enraizada T, uma coloração por peso de T é uma função $\chi\colon E(T) \to \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade. Para qualquer vértice u, se $v_1, \ldots, v_k$ são os filhos de u, então $\{\chi(uv_1), \ldots, \chi(uv_k)\} = \{1, \ldots, k\}$ e $\chi(uv_i) < \chi(uv_j)$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$ tais que $D(v_i) > D(v_j)$.*

Para colorir uma árvore T com uma coloração por peso, ordenamos os filhos de cada vértice u por ordem decrescente de número de descendentes (desempatando de modo arbitrário) e colorimos as arestas entre u e seus filhos nessa ordem usando cores de 1 a k.

Observação 2.2. *Seja T uma árvore enraizada e χ uma coloração por peso de T. Se v é filho de u, então $D_T(u) \geq \chi(uv) D_T(v)$.*

Demonstração. u tem pelo menos $\chi(uv)$ filhos com $D_T(v)$ ou mais descendentes. □

Note que colorações por peso evitam $K_{1,3}$ monocromático. Para estimar o valor $m_F(K_{1,2}, H)$ (que corresponde ao caso de colorações *próprias* sem cópia multicolorida de H) em vez de $m_F(K_{1,3}, H)$, a definição de coloração por peso teria que evitar reusar a cor da aresta entre u e seu pai. Assim, na observação acima, o termo $\chi(uv)$ teria que ser substituído por $\max\{1, \chi(uv) - 1\}$. É fácil adaptar os argumentos seguintes para tal mudança, mas por simplicidade iremos omitir tais alterações.

A observação acima motiva a seguinte definição. Dada uma árvore não-enraizada H e $s \in V(H)$, defina $\mathcal{P}_s(H)$ como o conjunto de todos os caminhos começados em s e terminados numa folha de H, e seja

$$f(H) = \min \left\{ \max_{P \in \mathcal{P}_s(H)} \left(\prod_{e \in P} \chi(e) \right) \;\middle|\; \chi\colon E(H) \to \mathbb{N} \text{ é injetiva e } s \in V(H) \right\}. \tag{1}$$

Em outras palavras, dada uma coloração multicolorida das arestas de H e um enraizamento s de H, consideramos o máximo dos "pesos" (produtório das cores) dos caminhos da raiz até os demais vértices. A conexão entre a função f e cotas inferiores é dada abaixo.

Lema 2.3. *Seja T uma árvore enraizada e χ uma coloração por peso de T. Se χ contém uma cópia multicolorida de H, então $|V(T)| \geq f(H)$.*

Demonstração. Seja $\varphi\colon V(H) \to V(T)$ a imersão de uma cópia multicolorida de H em T, e seja $s \in V(H)$ o vértice que minimiza $h_T(\varphi(s))$. Temos da definição de f que

$$\max_{P \in \mathcal{P}_s(H)} \left(\prod_{e \in P} \chi(e) \right) \geq f(H). \tag{2}$$

Seja P um caminho arbitrário de $\mathcal{P}_s(H)$, escreva $P = v_0 \dots v_k$ e defina $w_i = \varphi(v_i)$. Pela escolha de s, $h_T(w_0) < \cdots < h_T(w_k)$. Aplicando a Observação 2.2 várias vezes, obtemos que $D_T(\varphi(s)) = D_T(w_0) \geq (\prod_{i=1}^{k} \chi(w_{i-1}w_i)) \cdot D_T(w_k)$. Como P era arbitrário e $D_T(w) \geq 1$ para todo $w \in T$, temos que

$$|V(T)| \geq D_T(\varphi(s)) \geq \max_{P \in \mathcal{P}_s(H)} \left(\prod_{i=1}^{k} \chi(w_{i-1}w_i) \right).$$

Juntamente com (2), isso conclui a prova do lema. $\square$

A árvore binária completa de altura h, denotada por B_h, é a árvore enraizada definida do seguinte modo. A árvore B_0 é constituída de apenas um vértice, a raiz. Para $h > 0$, a árvore B_h é a união disjunta de duas cópias T_1 e T_2 de B_{h-1} (com raízes r_1 e r_2), juntamente com um novo vértice r (a nova raiz) que é vizinho de r_1 e r_2.

Lema 2.4. *Seja $B_{h+1} = (H, r)$ a árvore binária completa de altura $h+1$. Vale que*

$$f(H) \geq 2^{\binom{h}{2}}.$$

Demonstração. Denote por $T_1 = (H_1, r_1)$ e $T_2 = (H_2, r_2)$ as cópias de B_h usadas na construção de B_{h+1}. Note que, para qualquer enraizamento $s \in V(H)$, existe $i \in \{1, 2\}$ tal que o caminho (em H) de s a qualquer vértice de T_i passa por r. Iremos tratar o caso em que $i = 1$, pois o outro caso é simétrico. Pela observação anterior, todo $P \in \mathcal{P}' := \mathcal{P}_{r_1}(H_1)$ está contido em algum caminho de $\mathcal{P}_s(H)$. Assim, por monotonicidade, basta mostrar que, para toda função injetiva $\chi \colon E(T_1) \to \mathbb{N}$,

$$\max_{P \in \mathcal{P}'} \left(\prod_{e \in P} \chi(e) \right) \geq 2^{\binom{h}{2}}. \tag{3}$$

Como T_1 tem 2^h folhas, vale que $|\mathcal{P}'| = 2^h$. Usando que o máximo de uma sequência de números é pelo menos a média deles, é suficiente mostrar que

$$\sum_{P \in \mathcal{P}'} \sum_{e \in P} \log_2 \chi(e) \geq 2^h \binom{h}{2}. \tag{4}$$

Como $e(T_1) = 2^{h+1} - 2$, podemos assumir que $\mathrm{Im}(\chi) = \{1, \dots, 2^{h+1} - 2\}$, pois trocar uma cor por outra de maior valor claramente não diminui o somatório. Seja $E_i \subset E(T_1)$ o conjunto das arestas que ligam um vértice de altura $i-1$ a um vértice de altura i em T_1. Como cada aresta de E_i está em 2^{h-i} caminhos de $\mathcal{P}'$, vale que

$$\sum_{P \in \mathcal{P}'} \sum_{e \in P} \log_2 \chi(e) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{e \in E_i} 2^{h-i} \log_2 \chi(e). \tag{5}$$

Aplicando a Desigualdade do Rearranjo, vemos que a soma é minimizada se, e somente se, para todo $1 \leq i < j \leq h$ e qualquer par $(e_i, e_j) \in E_i \times E_j$, vale que $\chi(e_i) < \chi(e_j)$.

Como $|E_i| = 2^i$, uma coloração que minimiza o lado direito de (5) satisfaz $\chi(E_i) = \{2^i - 1, \ldots, 2^{i+1} - 2\}$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{h} \sum_{e \in E_i} 2^{h-i} \log_2 \chi(e) \geq \sum_{i=1}^{h} 2^i \cdot 2^{h-i} \log_2(2^{i-1}) = 2^h \sum_{i=1}^{h} (i-1) = 2^h \binom{h}{2}. \quad (6)$$

Combinando (5) e (6), obtemos (4) e portanto (3), que já argumentamos que implica a desigualdade desejada. □

Teorema 2.5. *Seja $T_h = (H, r)$ a árvore binária completa de altura h. Então*

$$m_F(K_{1,3}, H) = 2^{(1/2+o(1))h^2}.$$

Demonstração. Começaremos analisando a cota superior. Seja G uma árvore enraizada de altura h em que, para $0 \leq i < h$, os vértices do nível i têm grau 2^{i+3}. Tal árvore tem $2^{\binom{h}{2}+3h}$ folhas, e portanto $2^{(1/2+o(1))h^2}$ vértices. Considere uma coloração de $E(G)$ sem cópia monocromática de $K_{1,3}$. Afirmamos que é possível encontrar uma cópia multicolorida de T_h imergindo os vértices "nível a nível". De fato, como cada vértice do nível i de G é incidente a arestas de pelo menos 2^{i+2} cores e a restrição de T_h aos vértices dos níveis $0, \ldots, i+1$ tem $2^{i+2} - 2$ arestas, há uma cor disponível ao imergir um filho de um vértice do nível i.

Para provar a cota inferior, relacionaremos os Lemas 2.3 e 2.4. Seja F uma floresta que tem uma cópia multicolorida de H em qualquer coloração que evita $K_{1,3}$. Enraizamos cada componente de F arbitrariamente e as colorimos com uma coloração por peso. Seja T uma componente que contém uma cópia multicolorida de H. Pelos Lemas 2.3 e 2.4 temos $k(F) \geq |V(T)| \geq f(H) \geq 2^{\binom{h-1}{2}}$. Como F era arbitrária, obtemos a cota inferior desejada. □

Teorema 2.6. *Seja P_d o caminho com d arestas. Então $m_F(K_{1,3}, P_d) = d^{(1/2+o(1))d}$.*

A prova do teorema acima será omitida por motivos de espaço. Ela é análoga a do Teorema 2.5, substituindo a aplicação do Lema 2.4 pela desigualdade $f(P_d) \geq \sqrt{(d!)} = d^{(1/2+o(1))d}$. O seguinte corolário segue diretamente do Teorema 2.6.

Corolário 2.7. *Para todo grafo G de diâmetro d, vale que $m_F(K_{1,3}, G) \geq \sqrt{(d!)}$.*

Referências

Alon, N., Jiang, T., Miller, Z., and Pritikin, D. (2003). Properly colored subgraphs and rainbow subgraphs in edge-colorings with local constraints. *Random Structures & Algorithms*, 23(4):409–433.

Collares, M., Kohayakawa, Y., Moreira, C. G., and Mota, G. O. (2021). Constrained colourings of random graphs. *Procedia Computer Science*. To appear.

Gyárfás, A., Lehel, J., and Schelp, R. H. (2007). Finding a monochromatic subgraph or a rainbow path. *Journal of Graph Theory*, 54(1):1–12.

Jamison, R. E., Jiang, T., and Ling, A. C. (2003). Constrained ramsey numbers of graphs. *Journal of Graph Theory*, 42(1):1–16.

Loh, P.-S. and Sudakov, B. (2009). Constrained ramsey numbers. *Combinatorics, Probability and Computing*, 18(1-2):247–258.