Sobre $(2, 1)$-colorações em grafos exoplanares maximais *

A. L. Jonck Junior[1], **C. N. Campos** [1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 1251 – 13083-852 – Campinas – SP – Brazil

a261488@dac.unicamp.br, cnc@unicamp.br

Abstract. *An (m, d)-colouring is an assignment π of m colours to the vertices of G so that every vertex u of G has at most d neighbours assigned colour $\pi(u)$. In this work, we present a necessary condition for the existence of $(2, 1)$-colourings in maximal outerplanar graphs having at least four vertices.*

Resumo. *Uma (m, d)-coloração π de um grafo G é uma atribuição de m cores aos vértices do grafo de maneira que, para todo vértice u de G, no máximo d vizinhos de u possuem a cor $\pi(u)$. Neste trabalho, exibimos uma condição necessária para a existência de $(2, 1)$-colorações em grafos exoplanares maximais com pelo menos quatro vértices.*

1. Introdução

Seja G um grafo simples, finito e não orientado, com conjunto de *vértices* $V(G)$ e conjunto de *arestas* $E(G)$. Denotamos uv uma aresta com *extremos* u e v. Um *k-vértice* é um vértice de *grau* k. O *grau máximo* de G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior k para o qual existe um k-vértice em G. Dois vértices adjacentes em G são ditos *vizinhos*. Uma *coloração* (*de vértices*) de um grafo G é uma função de $\pi : V(G) \to \mathscr{C}$, tal que $\mathscr{C}$ é um conjunto de *cores*. A coloração π é dita *própria* se $\pi(u) \neq \pi(v)$ para todo par de vértices adjacentes u e v. Se $|\mathscr{C}| = k$, dizemos que π é uma *k-coloração* de G. É bem conhecido na literatura que decidir se um grafo G possui uma k-coloração própria, para $k > 2$, é um problema NP-completo (Karp, 1972).

Coloração de vértices e, de forma mais ampla, Problemas de Coloração, surgiram no contexto do Problema das Quatro Cores e constituem uma importante área de pesquisa em Teoria de Grafos. O foco deste trabalho é uma variação do conceito de coloração própria de vértices, independentemente proposta por Harary (1985), Andrews and Jacobson (1985), e Cowen et al. (1986). Uma *coloração imprópria* é uma generalização de coloração própria de vértices, em que relaxa-se a restrição de vértices adjacentes receberem cores distintas. Dizemos que um grafo G possui uma *(m, d)-coloração* se seus vértices podem ser coloridos com no máximo m cores, de tal maneira que cada vértice seja adjacente a no máximo d outros vértices com a mesma cor que ele próprio. Um *subgrafo monocromático* de uma (m, d)-coloração π é um subgrafo de G induzido pelos vértices de mesma cor em π. Formalmente, uma atribuição de cores $\pi : V(G) \to \mathscr{C}$ é uma (m, d)-coloração de G se e somente se $|\mathscr{C}| = m$ e $\Delta(G[V_i]) \leq d$, em que V_i é o conjunto de vértices, possivelmente vazio, de cor i em π e $1 \leq i \leq m$. Se $\pi(u) = i$, o grau do vértice u em $G[V_i]$ é denotado por $\mathrm{def}_\pi(u)$.

*Desenvolvido com apoio parcial do CNPq.

Decidir se um grafo G arbitrário possui uma (m, d)-coloração, para $m \geq 2$ e $d > 0$, é um problema NP-completo (Cowen et al., 1997). Entretanto, resultados interessantes têm sido obtidos em classes de grafos. Cowen et al. (1986) mostraram que todo grafo planar possui uma $(3, 2)$-coloração e todo grafo exoplanar possui uma $(2, 2)$-coloração. Nesse trabalho, os autores demonstram, ainda, que esses limites são justos, ou seja: existe pelo menos um grafo planar que não possui uma $(3, 1)$-coloração ou uma $(2, d)$-coloração para todo $d \geq 0$; e existe pelo menos um grafo exoplanar que não possui uma $(2, 1)$-coloração. Decidir a existência de $(3, 1)$-colorações ou $(2, d)$-colorações, para $d > 0$, são problemas NP-completos mesmo no contexto de grafos planares (Angelini et al., 2017). Ainda assim, $(3, 1)$-colorações foram construídas para algumas famílias de grafos planares, como os grafos planares sem triângulos adjacentes e sem ciclos de tamanho cinco (Xu, 2009), grafos planares sem triângulos adjacentes a ciclos de tamanho três ou seis (Huang, 2020), grafos planares sem ciclos de tamanho quatro ou nove (Dai et al., 2017) e grafos planares sem ciclos adjacentes de tamanho no máximo cinco (Zhang et al., 2016). Além disso, o Teorema de Grötzsch, que estabelece que grafos planares sem triângulos possuem uma $(3, 0)$-coloração, levanta a pergunta sobre a existência de $(2, d)$-colorações, para algum d. De fato, há muito interesse na determinação das subclasses de grafos planares que possuem uma $(2, d)$-coloração, para $d > 0$. Resultados como grafos planares sem ciclos de tamanho quatro e cinco possuem uma $(2, 4)$-coloração (Sittitrai and Nakprasit, 2018) e grafos planares com cintura pelo menos cinco possuem uma $(2, 5)$-coloração (Choi and Raspaud, 2015) são frutos desse interesse.

Os grafos exoplanares são uma importante subclasse dos grafos planares para a qual sabemos que existem $(2, 2)$-colorações. Entretanto, decidir quais deles possuem $(2, 1)$-colorações é uma questão em aberto. Sabemos que um K_3 possui uma $(2, 1)$-coloração. Neste trabalho, exibimos uma condição necessária para os grafos exoplanares maximais com pelo menos quatro vértices possuírem uma $(2, 1)$-coloração; a suficiência dessa condição está em fase de consolidação.

2. Resultados

Um grafo simples G é dito *exoplanar*[1] se possui uma imersão planar tal que todos os seus vértices incidem na face externa. Um grafo exoplanar G é dito *maximal* se $G + uv$ não é exoplanar para quaisquer dois vértices u e v não adjacentes de G. Note que, se G é exoplanar maximal, então G é 2-conexo e possui uma imersão planar $\widetilde{G}$ em que os vértices que estão na fronteira da face externa formam um ciclo hamiltoniano e todas as outras faces *internas* são triângulos. O número de faces internas de G é $|V(G)| - 2$. Uma face interna f de $\widetilde{G}$ é um *triângulo inscrito* se f não é adjacente à face externa. Além disso, se $\widetilde{G} \ncong K_3$ possui k triângulos inscritos, então G possui $k + 2$ vértices de grau dois. Vamos denominar $\widetilde{G}$ de grafo *exoplano maximal* e denotá-lo também como G. Se G é um grafo exoplano maximal sem triângulos inscritos com pelo menos quatro vértices, dizemos que G é *zebrado*. Note que, nesse caso, G possui exatamente dois 2-vértices. A Figura 1 ilustra um grafo zebrado.

Se G^* é o grafo dual de um grafo zebrado G, então o seu *dual fraco* H é definido como $G^* - f_{ext}$, em que f_{ext} é o vértice de G^* que corresponde à face externa de G. Seja $C = v_0, v_1, ..., v_{n-1}$ o ciclo hamiltoniano de G com $d(v_0) = 2$. Dado que $H \cong P_{n-2}$, seja

[1] Na literatura em Português, esses grafos são algumas vezes denominados periplanares.

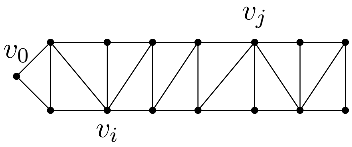

Figura 1. Um grafo zebrado.

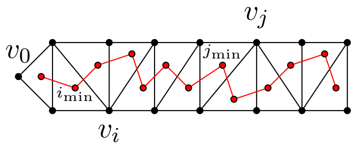

Figura 2. Dual fraco em vermelho.

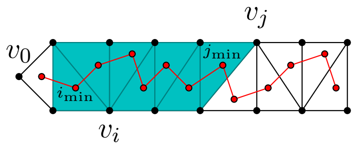

Figura 3. Subgrafo G_{ij} em azul.

$P = f_1, f_2, ..., f_{n-2}$ esse caminho, em que v_0 incide na face correspondente a f_1. Para um vértice $v_k \in V(G)$, definimos $k_{\min} = \min\{j : v_k$ incide em $f_j\}$. Dados $v_i, v_j \in V(G)$, definimos $|ij| = |i_{\min} - j_{\min}| + 1$. Observe que esse valor corresponde ao número de faces entre a primeira face em que v_i incide e a primeira face em que v_j incide, seguindo a ordem definida pelo caminho P (veja a Figura 2). Um grafo G é dito 5-*ímpar* se G é zebrado e para todo par de 5-vértices v_i, v_j, temos que $|ij|$ é ímpar. Seja $G_{ij} \subseteq G$ o subgrafo induzido pelos vértices que incidem em faces que correspondem aos vértices do segmento $f_{i_{\min}} P f_{j_{\min}}$. Note que G_{ij} é zebrado. A Figura 2 exibe o segmento $f_{i_{\min}} P f_{j_{\min}}$ para dois vértices v_i e v_j e a Figura 3 apresenta o grafo G_{ij}.

Um *leque* F_n é um grafo, com $n+1$ vértices, obtido pela junção de um K_1 e um P_n. Leques F_5 têm um papel importante em $(2,1)$-colorações. Em particular, dados $x, y \in V(F_5)$, em que x é 5-vértice e y é 3-vértice não adjacente a 2-vértices, dizemos que (x, y) é o *par central* desse F_5. O resultado principal desta seção é o Teorema 3, que apresenta uma condição necessária para a existência de $(2,1)$-colorações em grafos exoplanares maximais. Para demonstrar esse resultado, são necessários os dois lemas a seguir.

Lema 1. *Seja G um grafo zebrado que admite uma $(2,1)$-coloração π. Então:*

(i) se $v \in V(G)$ é 5-vértice, então, sendo (v, w) o par central de $G[N[v]] \cong F_5$, $\pi(v) = \pi(w)$ e os vértices de $N[v] \setminus \{v, w\}$ recebem a outra cor;

(ii) se u e v são os 2-vértices de G, então $|def_\pi(u) - def_\pi(v)| \equiv |V(G)| \pmod 2$. □

Esboço da demonstração. O item (i) segue por inspeção. A prova do item (ii) é por indução no número k de faces internas de um grafo zebrado G que admite uma $(2,1)$-coloração π. Se G possui duas faces internas, então $G \cong K_4 - e$ e o resultado segue por inspeção. Suponha G com $k > 2$ faces internas. Sejam u e v os dois 2-vértices de G. Suponha k par. A demonstração é dividida em dois casos dependendo do valor de $\mathrm{def}_\pi(u) \in \{0, 1\}$. Em ambos os casos, construímos $H = G - u$, que possui $k-1$ faces, e analisamos π_H, restrição de π a H. Se $\mathrm{def}_\pi(u) = 0$, então os vizinhos de u devem possuir a mesma cor em π. Logo, em H, um 2-vértice w, vizinho de u, possui $\mathrm{def}_{\pi_H}(w) = 1$. Pela hipótese de indução, concluímos $\mathrm{def}_{\pi_H}(v) = 0$. Portanto, $\mathrm{def}_\pi(v) = \mathrm{def}_\pi(u) = 0$. Por outro lado, se $\mathrm{def}_\pi(u) = 1$, é possível mostrar que w, vizinho de u tal que $\pi(w) = \pi(u)$, é um 2-vértice. Logo, $\mathrm{def}_{\pi_H}(w) = 0$. Pela hipótese de indução, $\mathrm{def}_{\pi_H}(v) = 1$. Portanto, $\mathrm{def}_\pi(v) = \mathrm{def}_\pi(u) = 1$. A demonstração do caso em que k é ímpar é análoga. □

Lema 2. *Seja G um grafo exoplanar maximal. Se G possui um triângulo inscrito ou $\Delta(G) \geq 6$, então G não possui uma $(2,1)$-coloração.* □

Teorema 3. *Seja G um grafo exoplanar maximal não isomorfo ao grafo K_3. Se G possui uma $(2,1)$-coloração, então G é 5-ímpar.*

Demonstração. Seja G uma imersão planar de um grafo exoplanar maximal não isomorfo ao grafo K_3. Suponha π uma $(2,1)$-coloração de G. Pelo Lema 2, G é zebrado e possui $\Delta(G) \leq 5$. Se $\Delta(G) \leq 4$ ou G possui exatamente um 5-vértice, então G é 5-ímpar. Suponha, então, que G possua dois 5-vértices v_i e v_j, com $i < j$.

Suponha, por contradição, que $|ij|$ seja par. Considere o subgrafo zebrado G_{ij}. Note que seus dois 2-vértices são v_j e x, em que x é um vértice adjacente a v_i (veja a Figura 3). Seja π_{ij} a $(2,1)$-coloração de G_{ij} que é restrição de π a G_{ij}. Pelo item (ii) do Lema 1, $\text{def}_{\pi_{ij}}(x) = \text{def}_{\pi_{ij}}(v_j)$. Como, em G_{ij}, x é adjacente a um 5-vértice, pelo item (i) do Lema 1, $\text{def}_{\pi_{ij}}(x) = 1$. Logo, $\text{def}_{\pi_{ij}}(v_j) = 1$. Entretanto, como v_j é 5-vértice em G, existe $y \in V(G) \setminus V(G_{ij})$ tal que (v_j, y) é par central de um F_5. Pelo item (i) do Lema 1, $\pi(v_j) = \pi(y)$. Portanto, $\text{def}_{\pi}(v_j) > \text{def}_{\pi_{ij}}(v_j) = 1$, o que é uma contradição. $\square$

De fato, o Teorema 3 é um bicondicional. A recíproca desse teorema, em fase de formalização, envolve a construção de uma $(2,1)$-coloração para um grafo 5-ímpar.

Referências

Andrews, J. A. and Jacobson, M. S. (1985). On a generalization of chromatic number. *Congressus Numerantium*, 47:33–48.

Angelini, P., Bekos, M. A., De Luca, F., Didimo, W., Kaufmann, M., Kobourov, S., Montecchiani, F., Raftopoulou, C. N., Roselli, V., and Symvonis, A. (2017). Vertex-coloring with defects. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 21(3):313–340.

Choi, I. and Raspaud, A. (2015). Planar graphs with girth at least 5 are (3,5)-colorable. *Discrete Mathematics*, 338(4):661 – 667.

Cowen, L., Goddard, W., and Jesurum, C. E. (1997). Defective coloring revisited. *Journal of Graph Theory*, 24(3):205–219.

Cowen, L. J., Cowen, R. H., and Woodall, D. R. (1986). Defective colorings of graphs in surfaces: partitions into subgraphs of bounded valency. *Journal of Graph Theory*, 10(2):187–195.

Dai, L., Wang, Y., and Xu, J. (2017). Every planar graph without cycles of length 4 or 9 is (1,1,0)-colorable. *Discrete Mathematics*, 340(9):2108 – 2122.

Harary, F. (1985). Conditional colorability in graphs. In *Graphs and applications*, pages 127–136. Wiley-Interscience Publication.

Huang, Z. (2020). Every planar graph without triangles adjacent to cycles of length 3 or 6 is (1,1,1)-colorable. *Discrete Mathematics*, 343(6):111846.

Karp, R. M. (1972). *Reducibility among Combinatorial Problems*, pages 85–103. Springer US, Boston, MA.

Sittitrai, P. and Nakprasit, K. (2018). Defective 2-colorings of planar graphs without 4-cycles and 5-cycles. *Discrete Mathematics*, 341(8):2142 – 2150.

Xu, B. (2009). On $(3,1)^*$-coloring of plane graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(1):205–220.

Zhang, C., Wang, Y., and Chen, M. (2016). Planar graphs without adjacent cycles of length at most five are (1,1,0)-colorable. *Discrete Mathematics*, 339(12):3032 – 3042.