

# Sobre Rotulações $\mathcal{L}(h, k)$ de Caterpillars\*

J. P. K. Castilho<sup>1</sup>, C. N. Campos<sup>1</sup>, L. M. Zatesko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IC – Universidade Estadual de Campinas, Brasil

<sup>2</sup>DAINF – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil

joao.pk@gmail.com, cnc@unicamp.br, zatesko@utfpr.edu.br

**Abstract.** An  $\mathcal{L}(h, k)$ -labelling is an assignment  $\sigma$  of integers to the vertices of a simple graph such that the labels of: adjacent vertices are at least  $h$  apart; vertices having a common neighbour are at least  $k$  apart. The largest difference between the labels of any two vertices is the span of  $\sigma$ . Determining the  $\mathcal{L}(h, k)$ -span, i.e. the least span amongst all  $\sigma$ , is NP-hard for trees. Caterpillars are a subclass of trees much studied in the context of labelling problems. We provide tight bounds for the  $\mathcal{L}(h, k)$ -span of every caterpillar  $G$ , determining the exact value if  $k$  divides  $h$  and  $G$  has at most seven vertices in a maximum path.

**Resumo.** Uma rotulação  $\mathcal{L}(h, k)$  é uma atribuição  $\sigma$  de inteiros aos vértices de um grafo simples tal que os rótulos de: vértices adjacentes diferem de pelo menos  $h$ ; vértices com um vizinho em comum diferem de pelo menos  $k$ . A maior diferença entre os rótulos de quaisquer dois vértices é o span de  $\sigma$ . Determinar o  $\mathcal{L}(h, k)$ -span, i.e. o menor span para todas as rotulações  $\sigma$ , é NP-difícil para árvores. Caterpillars são uma subclasse das árvores muito estudada no contexto de problemas de rotulação. Nós provamos limitantes justos para o  $\mathcal{L}(h, k)$ -span de todo caterpillar  $G$ , determinando o valor exato se  $k$  divide  $h$  e  $G$  tem no máximo sete vértices em um caminho máximo.

## 1. Introdução

Seja  $G$  um grafo simples com conjunto de vértices  $V(G)$  e conjunto de arestas  $E(G)$ . Uma aresta  $e \in E(G)$  com extremos  $u$  e  $v$  é denotada por  $uv$ . O grau de um vértice  $u \in V(G)$  é denotado por  $d(u)$ . O grau máximo de  $G$  é denotado por  $\Delta(G)$ , ou simplesmente  $\Delta$  quando livre de ambiguidade. Um *pingente* é um vértice de grau um. O conjunto de vértices adjacentes a  $u$  é denotado por  $N(u)$ .

Rotulações em grafos surgiram no contexto de problemas de decomposição (Rosa, 1967) e têm recebido atenção crescente nas últimas décadas (Gallian, 2020). Em particular, a rotulação  $\mathcal{L}(h, k)$  foi proposta por Georges e Mauro (1995) como uma generalização da rotulação  $\mathcal{L}(2, 1)$ , a qual surgiu como uma abordagem ao Problema de Atribuição de Canais (Griggs e Yeh, 1992).

---

\*Desenvolvido com apoio parcial de CNPq (425340/2016-3 e 428941/2016-8) e CAPES (cód. 001).

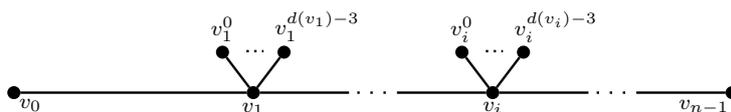
**Definição 1.** Sejam  $h, k \in \mathbb{Z} \geq 0$  e  $G$  um grafo simples. Uma rotulação  $\mathcal{L}(h, k)$  de  $G$  é uma função  $\sigma: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que:

- (i)  $|\sigma(u) - \sigma(v)| \geq h$ , para qualquer  $uv \in E(G)$ ;
- (ii)  $|\sigma(u) - \sigma(v)| \geq k$ , para quaisquer  $u, v \in V(G)$  tal que  $u \neq v$  e  $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ .

O *span* de  $\sigma$  é  $\lambda(\sigma) = \max_{u,v \in V(G)} \{\sigma(u) - \sigma(v)\}$ . O  $\mathcal{L}(h, k)$ -*span* de  $G$  é  $\lambda_{h,k}(G) = \min_{\sigma} \{\lambda(\sigma)\}$ .

O problema de determinar o  $\mathcal{L}(h, k)$ -span está resolvido apenas para classes de grafos básicas, como estrelas e caminhos, ou valores específicos de  $h$  e  $k$  (Georges e Mauro, 1995; Calamoneri et al., 2006; Griggs e Jin, 2007; Calamoneri, 2011). Para árvores, há uma dicotomia interessante: o problema é NP-difícil sempre que  $k$  não divide  $h$  (Fiala et al., 2008); quando  $k$  divide  $h$ , temos um algoritmo polinomial, embora o  $\mathcal{L}(h, k)$ -span não tenha sido caracterizado por uma fórmula fechada (Chang et al., 2000).

Uma subclasse das árvores muito estudada em problemas de rotulação são os caterpillars (Zhang e Deng, 2016; Luiz et al., 2020). Um *caterpillar* é uma árvore em que existe um caminho máximo  $P$  tal que cada vértice ou está em  $P$  ou é adjacente a um vértice de  $P$ , como na Figura 1. Quando todo vértice interno de  $P$  é adjacente a um mesmo número de pingentes, dizemos que o caterpillar é *uniforme*.



**Figura 1.** Um caterpillar com o caminho máximo de  $n$  vértices.

Este resumo é parte de um trabalho em andamento sobre o valor de  $\lambda_{h,k}(G)$  quando  $h \geq k$  e  $G$  é um caterpillar não isomorfo a um caminho. Inicialmente, determinamos esse valor quando  $G$  é uniforme (Castilho et al., 2021). Neste texto, estabelecemos que  $h + (\Delta - 1)k \leq \lambda_{h,k}(G) \leq \min\{h + \Delta k, 2h + (\Delta - 2)k\}$  mesmo se  $G$  não é uniforme. Em particular, para  $k = 1$ , temos  $h + \Delta - 1 \leq \lambda_{h,1}(G) \leq h + \Delta$ . Ademais, determinamos  $\lambda_{h,1}(G)$  quando  $G$  possui até sete vértices no caminho máximo<sup>1</sup>. É importante ressaltar que as estruturas críticas que impedem  $\lambda_{h,1}(G) = h + \Delta - 1$  nos casos estabelecidos também ocorrem e são generalizadas para todos os caterpillars. A investigação de todas essas estruturas para o caso geral está em fase de consolidação. Vale ressaltar também que nossos resultados para rotulações  $\mathcal{L}(h, 1)$  se estendem para rotulações  $\mathcal{L}(h, k)$  sempre que  $k$  divide  $h$ , pois  $k \cdot \lambda_{h,1}(G) = \lambda_{kh,k}(G)$  (Georges e Mauro, 1995).

## 2. Resultados

Os resultados deste trabalho são apresentados nos Teoremas 4 e 7. Para um caterpillar  $G$  e fixado um caminho máximo  $P$  com  $n$  vértices em  $G$ , os vértices de  $P$  são denotados por  $v_i$ , para  $0 \leq i < n$ , e os pingentes em cada  $v_i$ , quando existem, são denotados por  $v_i^j$ , para  $0 \leq j \leq d(v_i) - 3$ , como na Figura 1. Seja  $G'$  um caterpillar uniforme também com  $n$  vértices no caminho máximo e o mesmo grau máximo  $\Delta$  que  $G$ . Considerando que  $K_{1,\Delta} \subseteq G$  e  $G \subseteq G'$ , o Teorema 4 decorre dos Lemas 2 e 3.

<sup>1</sup>Durante a finalização da escrita deste resumo, encontramos o trabalho recente de Ladinek e Žerovnik (2020), em que condições suficientes são apresentadas para que uma árvore  $T$  tenha  $\lambda_{h,1}(T) = h + \Delta - 1$ . Observamos, porém, que tais condições contemplam apenas alguns casos particulares de nossos resultados.

**Lema 2** (Calamoneri et al., 2006). *Sejam  $h, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ , com  $h \geq k$ . Então,  $\lambda_{h,k}(K_{1,\Delta}) = h + (\Delta - 1)k$ .*  $\square$

**Lema 3** (Castilho et al., 2021). *Sejam  $h, k, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , com  $h \geq k$ , e  $G$  um caterpillar uniforme não isomorfo a um caminho, com  $n$  vértices no caminho máximo. Então,  $\lambda_{h,k}(G) = \min\{h + (\Delta - i)k, 2h + (\Delta - 2)k\}$ , com  $i = \max\{2 - \lceil (n - 2)/4 \rceil, 0\}$ .*  $\square$

**Teorema 4.** *Sejam  $h, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ , com  $h \geq k$ , e  $G$  um caterpillar não isomorfo a um caminho. Então,  $h + (\Delta - 1)k \leq \lambda_{h,k}(G) \leq \min\{h + \Delta k, 2h + (\Delta - 2)k\}$ .*  $\square$

No restante desta seção, consideramos o problema da rotulação  $\mathcal{L}(h, 1)$  dos caterpillars. Do Teorema 4 segue que:  $\lambda_{1,1}(G) = \Delta$ , um resultado já conhecido (Georges e Mauro, 1995);  $h + \Delta - 1 \leq \lambda_{h,1}(G) \leq h + \Delta$  quando  $h \geq 2$ . No Lema 5, introduzimos uma família de caterpillars que não podem ser rotulados com span  $h + \Delta - 1$ .

**Lema 5.** *Sejam  $h \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  e  $n \in \{5, 7\}$ . Seja  $\mathcal{X}$  a família de grafos definida por todos os caterpillars com  $\Delta \geq 3$  e  $n$  vértices no caminho máximo tal que: (i)  $n = 5$ ,  $d(v_1) = d(v_3) = \Delta$ , e  $d(v_2) = \max\{2, \Delta - h + 2\}$ ; ou (ii)  $n = 7$ ,  $d(v_1) = d(v_3) = d(v_5) = \Delta \leq h + 1$ . Então,  $\lambda_{h,1}(X) = h + \Delta$  para todo  $X \in \mathcal{X}$ .*  $\square$

Por sua vez, no Lema 6, apresentamos uma família  $\mathcal{S}$  de caterpillars que não têm como subgrafo algum grafo da família  $\mathcal{X}$  do Lema 5, exibindo uma rotulação  $\mathcal{L}(h, 1)$  com span  $h + \Delta - 1$  para todo grafo em  $\mathcal{S}$ . Em seguida, no Teorema 7, mostramos que todo caterpillar com até sete vértices no caminho máximo que não possui como subgrafo algum grafo de  $\mathcal{X}$  é subgrafo de algum grafo em  $\mathcal{S}$ .

**Lema 6.** *Seja  $h \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ . Seja  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$  a família de grafos definida pelos caterpillars com sete vértices no caminho máximo cujos vértices possuem graus conforme definidos na Tabela 1, de tal modo que: se  $S \in \{S_0, S_1\}$ , então  $\Delta(S) \geq 3$ ;  $\Delta(S_2) \geq h + 2$ ; se  $S \in \{S_3, S_4\}$ , então  $\Delta(S) \geq h + 1$ . Então,  $\lambda_{h,1}(S) = h + \Delta - 1$  para todo  $S \in \mathcal{S}$ .*  $\square$

**Tabela 1. A família de grafos  $\mathcal{S}$  do Lema 6 e uma rotulação com span  $h + \Delta - 1$  para cada grafo, sendo  $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_5$  os conjuntos de rótulos definidos na Tabela 2. Nas linhas  $\sigma(v_i^j)$ , entende-se que basta tomar qualquer atribuição bijetiva do conjunto estabelecido para os pingentes  $v_i^j$ .**

$S$	$d \text{ e } \sigma$	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$S_0$	$d(v_i)$	1	$\Delta - 1$	$\Delta$	$\Delta$	$\Delta - 1$	$\Delta - 1$	1
	$\sigma(v_i)$	1	$h + \Delta - 2$	0	$h + \Delta - 1$	1	$h + \Delta - 2$	0
	$\sigma(v_i^j)$	-	$\mathcal{A}_1 \setminus \{\Delta - 1\}$	$\mathcal{A}_0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_0 \setminus \{h\}$	$\mathcal{A}_1 \setminus \{\Delta - 1\}$	-
$S_1$	$d(v_i)$	1	$\Delta$	$\Delta$	$\Delta - 1$	$\Delta - 1$	$\Delta$	1
	$\sigma(v_i)$	$h + \Delta - 2$	0	$h + \Delta - 1$	1	$h + \Delta - 2$	0	$h + \Delta - 1$
	$\sigma(v_i^j)$	-	$\mathcal{A}_0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_0 \setminus \{h\}$	$\mathcal{A}_1 \setminus \{\Delta - 1\}$	$\mathcal{A}_0$	-
$S_2$	$d(v_i)$	1	$\Delta$	$\Delta - h + 1$	$\Delta$	$\Delta - h + 1$	$\Delta$	1
	$\sigma(v_i)$	$h + 1$	0	$h$	$h + \Delta - 1$	$h + 1$	0	$h$
	$\sigma(v_i^j)$	-	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4 \setminus \{h, h + 1\}$	$\{1\} \cup \mathcal{A}_3 \setminus \{2h\}$	$\mathcal{A}_2$	-
$S_3$	$d(v_i)$	1	$\Delta$	$\Delta - h + 1$	$\Delta$	$\Delta$	$\Delta - 1$	1
	$\sigma(v_i)$	$h + 1$	0	$h$	$h + \Delta - 1$	0	$h + \Delta - 2$	1
	$\sigma(v_i^j)$	-	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4 \setminus \{0, h\}$	$\mathcal{A}_0$	$\mathcal{A}_1 \setminus \{\Delta - 1\}$	-
$S_4$	$d(v_i)$	1	$\Delta$	$\Delta$	$\Delta - h + 1$	$\Delta$	$\Delta$	1
	$\sigma(v_i)$	1	$h + \Delta - 1$	0	$h$	$h + \Delta - 1$	0	$h + \Delta - 2$
	$\sigma(v_i^j)$	-	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_5$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4 \setminus \{0, h\}$	$\mathcal{A}_0$	-

**Tabela 2. Os conjuntos  $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_5$  usados na rotulação dos grafos da família  $\mathcal{S}$ .**

$\mathcal{A}_0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{A}_5$
$[h \dots h+\Delta-3]$	$[2 \dots \Delta-1]$	$[h+2 \dots h+\Delta-1]$	$[2h \dots h+\Delta-2]$	$[0 \dots \Delta-1]$	$[h+1 \dots h+\Delta-2]$

**Teorema 7.** *Sejam  $h, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , com  $n \leq 7$ , e  $G$  um caterpillar não isomorfo a um caminho, com  $n$  vértices no caminho máximo. Seja  $\mathcal{X}$  como no Lema 5. Então,*

$$\lambda_{h,1}(G) = \begin{cases} h + \Delta - 1 & \text{se } h = 1 \text{ ou } X \not\subseteq G \text{ para todo } X \in \mathcal{X}, \\ h + \Delta & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Esboço de demonstração.* Se  $n = 3$ , então  $G \cong K_{1,\Delta}$  e, pelo Lema 2,  $\lambda_{h,1}(G) = h + \Delta - 1$ . Se  $h = 1$ , então  $\lambda_{1,1}(G) = \Delta$  pelo Teorema 4. Considere, portanto,  $n \geq 4$  e  $h \geq 2$ .

Se  $X \subseteq G$  para algum  $X \in \mathcal{X}$ , então  $\lambda_{h,1}(G) \geq h + \Delta$  pelo Lema 5, e, como  $\lambda_{h,1}(G) \leq h + \Delta$  pelo Teorema 4, temos  $\lambda_{h,1}(G) = h + \Delta$ . Caso contrário, podemos verificar, por inspeção, que  $G \subseteq S$  para algum  $S \in \mathcal{S}$ , sendo  $\mathcal{S}$  como no Lema 6.  $\square$

## Referências

- Calamoneri, T. (2011). The  $\mathcal{L}(h, k)$ -labelling problem: an updated survey and annotated bibliography. *Comput. J.*, 54:1344–1371.
- Calamoneri, T., Pelc, A., e Petreschi, R. (2006). Labeling trees with a condition at distance two. *Discrete Math.*, 306(14):1534–1539.
- Castilho, J. P. K., Campos, C. N., e Zatesko, L. M. (2021). Proper  $\mathcal{L}(h, k)$ -labelling of caterpillars and multisunlets. Submitted.
- Chang, G. J., Ke, W.-T., Kuo, D., Liu, D. D.-F., e Yeh, R. K. (2000). *Discrete Math.*, 220:57–66.
- Fiala, J., Golovach, P. A., e Kratochvíl, J. (2008). Computational complexity of the distance constrained labeling problem for trees. In *Proc. 35th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP '08)*, pages 294–305.
- Gallian, J. A. (2020). A dynamic survey of graph labeling. *Eletron. J. Combin.*, (DS6).
- Georges, J. e Mauro, D. (1995). Generalized vertex labelings with a condition at distance two. *Congr. Numer.*, 109:141–159.
- Griggs, J. R. e Jin, X. T. (2007). Real number labelings for paths and cycles. *Internet Math.*, 4(1):65–86.
- Griggs, J. R. e Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM J. Discrete Math.*, 5:586–595.
- Ladinek, I. H. e Žerovnik, J. (2020). On  $\mathcal{L}(d, 1)$ -labelling of trees. *Math. Interdisc. Res.*, 5(2):87–102.
- Luiz, A. G., Campos, C. N., e Richter, R. B. (2020). Some families of 0-rotatable graceful caterpillars. *Graphs Combin.*, 36:1655–1673.
- Rosa, A. (1967). On certain valuations of the vertices of a graph. *J. Graph Theory*, pages 349–355.
- Zhang, X. e Deng, K. (2016). The  $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ -labellings of caterpillars. *Int. J. Comput. Math.: Comput. Syst. Theory*, 1(3–4):85–97.