Sobre o Número de Orientação Própria de Grafos Cordais*

Julio Araujo[1], Alexandre Cezar[1], Carlos V.G.C. Lima[2], Vinicius F. dos Santos[3], Ana Silva[1]

[1]Pargo, Departamento de Matemática – Universidade Federal do Ceará, Brasil
{julio, anasilva}@mat.ufc.br e alexcezar@alu.ufc.br

[2]Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri, Brasil
vinicius.lima@ufca.edu.br

[3]Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil
viniciussantos@dcc.ufmg.br

Abstract. *An orientation D of a simple graph $G = (V, E)$ is proper if u and v have distinct indegrees, whenever $uv \in E$. The proper orientation number of a graph G is the smallest positive integer k such that G has a proper orientation D with maximum indegree equal to k, denoted by $\overrightarrow{\chi}(G)$. We prove that deciding whether $\overrightarrow{\chi}(G) \leq k$ is* FPT*, parameterized by k, when restricted to chordal graphs, present an exponential kernel to this class and prove that no polynomial kernel may exist, unless* NP $\subseteq$ coNP/poly*. We also present improved kernels for split and cobipartite graphs. Furthermore, we provide bounds for subclasses of chordal graphs, like block and outerplanar chordal graphs, and for cographs.*

Resumo. *Uma orientação D de um grafo simples $G = (V, E)$ é própria se os vértices u e v possuem graus de entrada distintos, sempre que $uv \in E$. O número de orientação de um grafo G é o menor inteiro positivo k tal que G tem uma orientação própria D com maior grau de entrada igual a k, denotado por $\overrightarrow{\chi}(G)$. Mostramos que decidir se $\overrightarrow{\chi}(G) \leq k$ é* FPT*, parametrizado por k, quando restrito a grafos cordais, apresentamos um kernel exponencial para esta classe de grafos e mostramos que não existe kernel polinomial a menos que* NP $\subseteq$ coNP/poly*. Apresentamos também kernels melhores para grafos split e cobipartidos. Além disto, apresentamos limitantes para subclasses de grafos cordais como grafos blocos, periplanares cordais e para cografos.*

1. Introdução

Neste trabalho, utilizamos as noções e notações de Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional que podem ser encontradas em [Bondy and Murty 2008, Garey and Johnson 1979, Cygan et al. 2015, Fomin et al. 2019]. Todos os grafos são considerados finitos e simples.

Uma *orientação* D de um grafo simples $G = (V, E)$ é um digrafo obtido a partir de G em que substituímos cada aresta por uma das duas possibilidades de arcos com suas mesmas extremidades. Para cada vértice $v \in V$, o *grau de entrada* de v é o número de arcos que entram em v. Uma orientação é dita *própria* se vértices vizinhos em G possuem diferentes graus de entrada. Denotamos uma k-orientação própria se o maior grau de

*Este trabalho tem o apoio dos projetos 437841/2018-9, 304478/2018-0, 311679/2018-8 e 421660/2016-3, CAPES/STIC-AmSud 88881.197438/2018-01 e FAPEMIG APQ-02592-16.

entrada dentre os vértices do grafo vale k. Introduzido por [Ahadi and Dehghan 2013], o *número de orientação própria* de G, $\overrightarrow{\chi}(G)$, é o menor inteiro k tal que G admite uma k-orientação própria.

2. Resultados de complexidade

Apresentamos agora a complexidade do problema de determinar o número de orientação de um grafo G quando parametrizada pelo valor da solução.

Proposição 1. ORIENTAÇÃO PRÓPRIA PARAMETRIZADA *pode ser resolvido em tempo* $O(2^{k^2} \cdot k^{3k+1} \cdot n)$*, para todo grafo cordal com n vértices, parametrizada por k.*

É sabido que se existe um algoritmo de ordem $f(k) \cdot \texttt{poly}(n)$ que resolve um problema Π parametrizado por k, então Π admite kernel de tamanho $f(k)$ [Cygan et al. 2015], nos dando que ORIENTAÇÃO PRÓPRIA PARAMETRIZADA possui kernel de tamanho $O(2^{k^2} \cdot k^{3k+1})$ para grafos cordais. A seguir, argumentamos que é pouco provável que exista kernel de tamanho polinomial em k. Dados os grafos G e H, denotamos a *união disjunta* de G e H por $G \cup H$. O resultado a seguir pode ser observado.

Proposição 2. *Se* $G = G_1 \cup G_2$*, então* $\overrightarrow{\chi}(G) = \max\left\{\overrightarrow{\chi}(G_1), \overrightarrow{\chi}(G_2)\right\}$.

Em [Araujo et al. 2020a, Araujo et al. 2020b], os autores mostram que o problema de ORIENTAÇÃO PRÓPRIA em grafos cordais é NP-completo, mesmo quando o diâmetro é limitado. Desta forma, é natural questionar o que pode ser dito em sua versão parametrizada. Utilizando a noção de *AND-cross-composition*, em [Fomin et al. 2019, Drucker 2012] é mostrado que se uma linguagem NP-difícil L pode ser composta em uma linguagem parametrizada Q, então Q não admite compressão polinomial a menos que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{coNP/poly}$. Aplicamos este resultado tomando várias instâncias de ORIENTAÇÃO PRÓPRIA em grafos cordais com mesmo inteiro k, de onde obtemos uma AND-cross-composition em uma instância de ORIENTAÇÃO PRÓPRIA PARAMETRIZADA. Com isto:

Corolário 3. ORIENTAÇÃO PRÓPRIA PARAMETRIZADA *restrito a grafos cordais não admite kernel polinomial a menos que* $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{coNP/poly}$.

Em [Araujo et al. 2015] os autores mostram que determinar se $\overrightarrow{\chi}(G) = \omega(G) - 1$ pode ser feito em tempo polinomial para grafos split, mas permanece em aberto a complexidade de determinar se $\overrightarrow{\chi}(G) \leq \omega(G)$. Se determinar que $\overrightarrow{\chi}(G) \leq k$ for NP-completo para splits e cobipartidos, uma pergunta natural seria analisar a versão parametrizada do problema. Lembre que grafos split são cordais, portanto a Proposição 1 pode ser aplicada. A proposição a seguir nos mostra um kernel melhor para splits, mas ainda exponencial. Decidir se existe algum kernel polinomial para grafos split seria um passo natural. Apresentamos também um resultado sobre grafos cobipartidos.

Proposição 4. ORIENTAÇÃO PRÓPRIA PARAMETRIZADA *admite kernel* $O(2^k k^2)$ *para grafos split.*

Proposição 5. ORIENTAÇÃO PRÓPRIA PARAMETRIZADA *admite kernel linear para grafos cobipartidos.*

3. Limitantes para o número de orientação

3.1. Subclasses de grafos cordais

Primeiramente apresentamos um resultado que é necessário para os demais adiante.

Proposição 6. *Dado um grafo G. Um subconjunto* $S \subseteq V(G)$ *e uma k-orientação própria* D_s *de* $G[S]$ *tal que, para cada* $v \in V(G) \setminus S$ *e* $u \in N(v) \cap S$*, temos* $|N(v) \cap S| > d^-_{D_S}(u)$*, então* D_S *pode ser estendida a uma* $\Delta(G)$*-orientação própria D de G, tal que*

1. *se $v \in S$, então $d^-_D(v) = d^-_{D_S}(v)$; e*
2. *se $v \in V(G) \setminus S$, então $d^-_D(v) \leq d_G(v)$.*

Resultado este que nos dá o seguinte corolário:

Corolário 7. *Considere um grafo G e c um inteiro positivo. Se G não possui vértices adjacentes de graus pelo menos menos $c + 1$, então $\overrightarrow{\chi}(G) \leq c$.*

Um *grafo bloco* é aquele cujas componentes 2-conexas são grafos completos. Dizemos que um grafo bloco G é *k-uniforme* se todos os seus blocos são de mesmo tamanho $\omega(G) = k$.

Teorema 8. *Seja G um grafo bloco k-uniforme. Então $\overrightarrow{\chi}(G) \leq 3k - 2$.*

Visando apertar este limitante, analisamos subclasses de grafos blocos k-conexos. A proposição a seguir é referente a quando a árvore *block-cut-point* é um caminho.

Proposição 9. *Se G é grafo bloco k-uniforme, $k \geq 3$, em que cada bloco possui no máximo dois vértices de corte, então $\overrightarrow{\chi}(G) \leq k + 1$.*

Além disto, mostramos que este resultado é apertado.

Proposição 10. *Para todo $k \geq 2$, existe um grafo bloco k-uniforme, cada bloco contendo no máximo dois vértices de corte, satisfazendo $\overrightarrow{\chi}(G) \geq k + 1$.*

Em [Araujo et al. 2016], os autores estudam o número de orientação de grafos cactos, mostrando que $\overrightarrow{\chi}(G) \leq 7$ e, em [Araujo et al. 2015], os autores estudam o número de orientação de árvores T, mostrando que $\overrightarrow{\chi}(T) \leq 4$. Ambas estas classes de grafos são *periplanares*, o que invoca a pergunta sobre outras subclasses de grafos periplanares. Um grafo simples é dito *periplanar maximal* se não é possível adicionar arestas de modo que o grafo permaneça periplanar. Dessa forma, grafos periplanares maximais são cordais, em que todas as faces, excetuando a face externa, são triangulares. Provamos o teorema a seguir:

Teorema 11. *Se G é periplanar maximal cujo dual fraco é um caminho, então $\overrightarrow{\chi}(G) \leq 13$.*

Dados grafos G e H, dizemos que G é *livre de H* se H não é subgrafo induzido de G. Uma *garra* é o grafo estrela com quatro vértices. É válida a proposição:

Proposição 12. *Se G é cordal livre de garra, então $\overrightarrow{\chi}(G) \leq \Delta(G) \leq 3\omega(G)$.*

3.2. Cografos

A classe dos *cografos* é definida recursivamente como: (i) K_1 é cografo; (ii) se G_1 e G_2 são cografos, então seu *join* $G = G_1 \wedge G_2$ é cografo; e (iii) se G_1 e G_2 são cografos, então $G = G_1 \cup G_2$ também é cografo. Graças a Proposição 2, as condições (i) e (iii) nos dão bastante informação quando analisamos o número de orientação de um cografo. Já a condição (ii) não é trivial, de modo que mostramos a seguinte proposição que nos fornece alguns limitantes. Definimos $\mathrm{Ad}(G) = \dfrac{|E(G)|}{|V(G)|}$.

Proposição 13. *Sejam G_1 e G_2 grafos com n_1 e n_2 vértices, respectivamente, e seja $G = G_1 \wedge G_2$. Então,*

$$\min\left\{\mathrm{Ad}(G_1) + \frac{n_2}{2}, \mathrm{Ad}(G_2) + \frac{n_1}{2}\right\} \leq \overrightarrow{\chi}(G) \leq \min\left\{\overrightarrow{\chi}(G_1) + n_2, \overrightarrow{\chi}(G_2) + n_1\right\}.$$

4. Trabalhos futuros

Mostramos limitantes para subclasses de grafos cordais e para cografos. Como mencionado, a complexidade computacional de determinar $\overrightarrow{\chi}(G)$ quando G é split ou cobipartido ainda é um problema em aberto [Araujo et al. 2015]. Propomos o seguinte problema:

Problema 14. *Qual a complexidade de determinar $\overrightarrow{\chi}(G)$, para G cografo?*

Além destes, mostramos limitantes para $\overrightarrow{\chi}(G)$ em algumas subclasses de grafos cordais. Tais limitantes sugerem a existência de uma constante c em que $c \cdot \omega(G)$ limita o número de orientação para G cordal.

Problema 15. *Existe constante c tal que $\overrightarrow{\chi}(G) \leq c \cdot \omega(G)$, para qualquer G cordal?*

Referências

Ahadi, A. and Dehghan, A. (2013). The complexity of the proper orientation number. *Information Processing Letters*, 113(19):799–803.

Araujo, J., Cezar, A., Lima, C., dos Santos, V., and Silva, A. S. (2020a). Proper orientations of chordal graphs. In *Anais do V Encontro de Teoria da Computação*, pages 21–24, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.

Araujo, J., Cezar, A., Lima, C. V. G. C., dos Santos, V. F., and Silva, A. (2020b). On the proper orientation number of chordal graphs.

Araujo, J., Cohen, N., de Rezende, S. F., Havet, F., and Moura, P. F. (2015). On the proper orientation number of bipartite graphs. *Theoretical Computer Science*, 566(0):59–75.

Araujo, J., Havet, F., Sales, C. L., and Silva, A. (2016). Proper orientation of cacti. *Theoretical Computer Science*, 639:14–25.

Araújo, J., Sales, C. L., Sau, I., and Silva, A. (2019). Weighted proper orientations of trees and graphs of bounded treewidth. *Theoretical Computer Science*, 771:39–48.

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London.

Cygan, M., Fomin, F. V., Kowalik, L., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., and Saurabh, S. (2015). *Parameterized Algorithms*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition.

Drucker, A. (2012). New limits to classical and quantum instance compression. In *53rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2012, New Brunswick, NJ, USA, October 20-23, 2012*, pages 609–618. IEEE Computer Society.

Fomin, F. V., Lokshtanov, D., Saurabh, S., and Zehavi, M. (2019). *Kernelization: Theory of Parameterized Preprocessing*. Cambridge University Press.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.

Knox, F., Matsumoto, N., de la Maza, S. G. H., Mohar, B., and Sales, C. L. (2017). Proper orientations of planar bipartite graphs. *Graphs and Combinatorics*, 33:1189–1194.