Limites superiores para a rotulação L(3,2,1) de famílias de grafos subcúbicos*

Davi Gomes Florencio[1], **Atílio Gomes Luiz**[1]

[1]Campus Quixadá – Universidade Federal do Ceará (UFC)

davigomesflorencio@alu.ufc.br, gomes.atilio@ufc.br

Abstract. *An $L(3,2,1)$-labeling of a graph G is a function $f\colon V(G) \to \mathcal{S} = \{0,1,\ldots,k\}$ such that, for any two vertices $u, v \in V(G)$, $|f(u) - f(v)| \geq 4 - d_G(u,v)$, where $d_G(u,v)$ is the distance between u and v in G. The span of an $L(3,2,1)$-labeling f is the largest label $k \in \mathcal{S}$. The smallest span that any $L(3,2,1)$-labeling can assign to a graph G is denoted by $\lambda_{3,2,1}(G)$. In this work, we prove that $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$ for every subcubic graph G without adjacent vertices of maximum degree. In addition, we prove that $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$ for subcubic graphs G with vertices of degree 3 at distance at least 4 apart.*

Resumo. *Uma rotulação $L(3,2,1)$ de um grafo G é uma função $f\colon V(G) \to \mathcal{S} = \{0,1,\ldots,k\}$ tal que $|f(u) - f(v)| \geq 4 - d_G(u,v)$ para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, em que $d_G(u,v)$ é a distância entre u e v em G. O span de uma rotulação $L(3,2,1)$ f é o maior rótulo $k \in \mathcal{S}$. O menor span que uma rotulação $L(3,2,1)$ pode atribuir a um grafo G é denotado por $\lambda_{3,2,1}(G)$. Neste trabalho, provamos que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$ para todo grafo subcúbico G sem vértices adjacentes de grau máximo. Além disso, provamos que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$ para grafos subcúbicos G com vértices de grau 3 à distância pelo menos 4.*

1. Introdução

Neste trabalho, investigamos uma rotulação de grafos que consiste em uma das muitas abstrações [Griggs and Yeh 1992, Chartrand et al. 2001, Král and Skrekovski 2003] do problema da atribuição de canais de frequência a transmissores: a Rotulação $L(3,2,1)$. Uma *rotulação L(3,2,1)* de um grafo simples G com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$ é uma função $f\colon V(G) \to \{0,1,\ldots,k\}$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, se $d_G(u,v) = 1$, então $|f(u) - f(v)| \geq 3$; se $d_G(u,v) = 2$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$; e se $d_G(u,v) = 3$, então $|f(u) - f(v)| \geq 1$; onde $d_G(u,v)$ denota a *distância* entre dois vértices u e v em G, que é o número de arestas no menor caminho conectando u a v em G. O *span* de uma rotulação $L(3,2,1)$ f é o maior rótulo k que é atribuído pela rotulação f a um vértice de G. Uma rotulação $L(3,2,1)$ de G é dita *ótima* quando possui o menor span possível e o span de tal rotulação, denotado por $\lambda_{3,2,1}(G)$, é denominado *número cromático* $L(3,2,1)$ de G.

Liu e Shao [Liu and Shao 2004] introduziram a rotulação $L(3,2,1)$ em 2004. Posteriormente, Chia et al. [Chia et al. 2011] determinaram o parâmetro $\lambda_{3,2,1}(G)$ para famílias clássicas de grafos e obtiveram o seguinte limitante superior para o *número cromático* $L(3,2,1)$ de grafos arbitrários.

*Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Proc. 423833 / 2018-9) e a Pró-Reitoria de Graduação da UFC (PID 202020831)

Teorema 1 ([Chia et al. 2011]). *Se G é um grafo simples, com grau máximo Δ, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + 2\Delta$.*

Para todo grafo simples G com $\Delta(G) = 3$, o Teorema 1 determina que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 33$. Porém, ao investigarmos o *número cromático* $L(3, 2, 1)$ para a subclasse dos grafos com grau máximo 3 sem vértices adjacentes de grau máximo, não conseguimos encontrar um que tivesse $\lambda_{3,2,1}(G) = 33$. Esta observação nos conduziu à investigação de limitantes superiores mais justos para o *número cromático* $L(3, 2, 1)$ desta subclasse de grafos.

Neste trabalho, provamos que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$ para todo grafo G com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo. Mostramos também que, se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$ no qual quaisquer dois vértices de grau 3 estão à distância pelo menos 4, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$. A próxima seção apresenta conceitos e resultados auxiliares usados nas demonstrações da Seção 3.

2. Definições e Resultados Auxiliares

Dado um grafo simples $G = (V(G), E(G))$, dois vértices $u, v \in V(G)$ são ditos *adjacentes* se $uv \in E(G)$. O *grau* de um vértice $u \in V(G)$ é o número de vértices adjacentes a u e é denotado por $d_G(u)$. O *grau máximo* de G é denotado por $\Delta(G)$ e definido como $\Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\}$. Um grafo G é *subcúbico* se $\Delta(G) = 3$. Denotamos por $N_k(v)$ o conjunto dos vértices que estão à distância exatamente k do vértice v. Denotamos por $N_k^{d\leq t}(v)$ o conjunto de vértices de G com grau menor ou igual a t que estão à distância exatamente k de v. A *vizinhança estendida* de um vértice $v \in V(G)$ é o conjunto dos vértices que estão à distância no máximo 3 de v.

Um (v_0, v_k)*-caminho* em um grafo simples G é uma sequência $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ finita e não vazia de vértices de G, tal que os termos não se repetem (com exceção, possivelmente, de v_0 e v_k) e $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k$. Um grafo G é *conexo* se existe um (u, v)-caminho em G para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$. Um ciclo C_n, com $n \geq 3$ vértices, em G é um (v_0, v_k)-caminho em G tal que $v_0 = v_k$ com $k \geq 3$.

Dado um conjunto de cores não vazio S, uma *coloração de vértices* $c\colon V(G) \to S$ é uma função que atribui a cada vértice do grafo G um elemento do conjunto S. Dizemos que c é uma k*-coloração* de G, quando $|S| = k$. A coloração c é dita *própria* quando quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$ possuem $c(u) \neq c(v)$. O *número cromático* do grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual G tem uma k-coloração própria de vértices. A seguir, apresentamos dois limitantes superiores para $\chi(G)$ que são usados nas demonstrações dos resultados da Seção 3.

Teorema 2 ([West 2018]). *Se G é um grafo, então $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Teorema 3 ([Brooks 1941]). *Se G é um grafo conexo e G não é isomorfo a um ciclo ímpar ou a um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

3. Resultados

Nesta seção, são apresentados os resultados principais deste trabalho. Porém, antes é necessário apresentarmos algumas definições adicionais. Dizemos que um rótulo ℓ *causa conflito* se a sua atribuição a um vértice do grafo faz com que alguma das condições requeridas para se ter uma *rotulação* $L(3, 2, 1)$ não seja satisfeita. Um rótulo ℓ está *disponível* para um vértice v de G quando sua atribuição a v não causa conflito com os rótulos já atribuídos aos vértices na vizinhança estendida de v.

Teorema 4. *Se G é um grafo conexo subcúbico sem vértices adjacentes de grau máximo, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 25$.*

Esboço da demonstração. Seja G um grafo como descrito no enunciado. Existem exatamente 11 grafos subcúbicos, não-isomorfos, sem vértices adjacentes de grau máximo, que podem ser obtidos a partir do grafo completo K_4 subdividindo cada uma de suas arestas no máximo duas vezes. Podemos afirmar que, se G é isomorfo a um desses 11 grafos, então $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 11$. Pela limitação de espaço, omitimos esta parte da prova. No restante da demonstração supomos que G não é isomorfo a nenhum desses onze grafos, já que o resultado é verdadeiro para todos eles.

Construímos uma rotulação $L(3,2,1)$ $f\colon V(G) \to \{0,\ldots,25\}$ para G. Inicialmente, rotulamos os vértices de grau 3 de G com rótulos no conjunto $\{0,2,4\}$. A fim de obter esta rotulação parcial, construímos um grafo auxiliar H. Seja $V_3 \subset V(G)$ o conjunto de vértices de grau 3 de G. Definimos H da seguinte forma: $V(H) = V_3$ e $uv \in E(H)$ se e somente se $u,v \in V(H)$, $u \neq v$ e existe um (u,v)-caminho de comprimento 2 ou 3 em G. Se H for um grafo completo, então $|V(H)| \leq 3$ pois $\Delta(H) \leq 3$ e H não é um dos onze grafos excluídos; o que implica $\chi(H) \leq 3$ pelo Teorema 2. Se H for um ciclo, $\chi(H) \leq 3$ pelo Teorema 2; caso contrário, temos $\chi(H) \leq 3$ pelo Teorema 3. Deste modo, seja $c\colon V(H) \to \{0,2,4\}$ uma 3-coloração própria dos vértices de H.

Dada a 3-coloração própria de vértices c de H, defina $f(v) = c(v)$ para todo $v \in V(G)$ com $d_G(v) = 3$. Pela definição de H, todo vértice de grau 3 de G está em H, logo a rotulação parcial f é bem-definida. Deste modo, para quaisquer dois vértices u e v de grau 3 de G com $d_G(u,v) \leq 3$, temos que $|f(u) - f(v)| \geq 2$. Portanto, esta rotulação parcial de G satisfaz as condições da rotulação $L(3,2,1)$.

A fim de concluir a construção da rotulação f, resta definir os rótulos dos vértices de grau 2 e 1 de G. Rotulamos estes vértices por meio de um algoritmo guloso, descrito a seguir. Seja $v_1, v_2, \ldots, v_k$ uma sequência arbitrária dos vértices de grau 2 e 1 de G. Na i-ésima iteração, o algoritmo guloso atribui ao vértice v_i o menor rótulo $f(v_i)$ pertencente ao conjunto $\mathcal{R} = \{7,8,\ldots,25\}$, que estiver disponível para o vértice v_i.

No restante da demonstração, mostramos que sempre há um rótulo disponível em $\mathcal{R}$ para v_i. Para isso, contamos quantos rótulos, no máximo, não estão disponíveis para v_i no momento da sua escolha. Note que cada vértice rotulado $w \in N_1(v_i)$ impossibilita que 5 rótulos sejam atribuídos ao vértice v_i: $f(w)$, $f(w)-1$, $f(w)-2$, $f(w)+1$ e $f(w)+2$. Além disso, cada vértice rotulado $z \in N_2(v_i)$ impossibilita que 3 rótulos sejam atribuídos ao vértice v_i: $f(z)$, $f(z)-1$ e $f(z)+1$. Por fim, cada vértice rotulado $y \in N_3(v_i)$ deve ter um rótulo $f(y)$ diferente do rótulo de v_i. Adicionalmente, como os vértices de grau 3 possuem rótulos do conjunto $\{0,2,4\}$, estes rótulos não conflitam com os rótulos do conjunto $\mathcal{R}$ pois $|\max(\{0,2,4\}) - \min(\mathcal{R})| \geq 3$. Portanto, na contagem dos rótulos não disponíveis para o vértice v_i não consideramos vértices de grau 3; consideramos apenas os vértices de grau 2 e 1 que estão na sua vizinhança estendida. Dividimos o restante da prova em três casos. Logo abaixo, provamos o Caso 1 e, por limitação de espaço, apresentamos apenas os enunciados dos Casos 2 e 3.

Caso 1: $d_G(v_i) = 1$ e v_i pertence a um (v_i, v)-caminho $P = (v_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ tal que $d_G(v) = 3$ e $d_G(x_i) = 2$, para $1 \leq i \leq n$. Consideramos dois subcasos.

Subcaso 1.1: $P = (v_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ com $n \geq 3$. Neste caso, temos que

$|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 1$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| = 1$. Isso implica que no máximo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 9$ rótulos não estão disponíveis para v_i neste caso.

Subcaso 1.2: $P = (v_i, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ com $n \leq 2$. *Subcaso 1.2.1:* $d_G(v, v_i) = 3$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$ e $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 1$. Isso implica que no máximo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$ rótulos não estão disponíveis para v_i. *Subcaso 1.2.2:* $d_G(v, v_i) = 2$. Neste caso, $|N_1^{d\leq 2}(v_i)| = 1$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| = 2$. Isso implica que no máximo $5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7$ rótulos não estão disponíveis para v_i. *Subcaso 1.2.3:* $d_G(v, v_i) = 1$. Neste caso, $|N_2^{d\leq 2}(v_i)| = 2$ e $|N_3^{d\leq 2}(v_i)| \leq 2$. Isso implica que no máximo $3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 8$ rótulos não estão disponíveis para v_i. Portanto, no máximo 9 rótulos não estão disponíveis para v_i no Caso 1.

Caso 2: $d_G(v_i) = 2$ e v_i pertence a um (u, v)-caminho $P = (u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ tal que $d_G(u) = 3$ e $d_G(v) \in \{1, 3\}$ com $u \neq v$ e $d_G(x_i) = 2$, para $1 \leq i \leq n$.

Caso 3: $d_G(v_i) = 2$ e v_i pertence a um ciclo $P = (u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v)$ tal que $u = v$ com $d_G(u) = d_G(v) = 3$ e $d_G(x_i) = 2$, para $1 \leq i \leq n$.

A partir da análise dos três casos acima, concluímos que, na i-ésima iteração do algoritmo, supondo o pior caso em que os vértices da vizinhança estendida do vértice v_i estão todos rotulados, no máximo 18 rótulos não estão disponíveis para v_i (esta configuração ocorre no Caso 2). Como $|\mathcal{R}| = 19$, concluímos que sempre haverá um rótulo disponível em $\mathcal{R}$ para v_i e o resultado segue. $\square$

Teorema 5. *Seja G um grafo subcúbico tal que quaisquer dois vértices de grau máximo estão à distância pelo menos quatro entre si. Então, $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$.*

Esboço da demonstração. Seja G como descrito no enunciado. Construímos uma rotulação $L(3, 2, 1)$ $f \colon V(G) \to \{0, \ldots, 16\}$ para G. Definimos $f(v) = 7$ para todo $v \in V(G)$ com $d_G(v) = 3$. Em seguida, rotulamos os vértices adjacentes a vértices de grau 3 com rótulos em $\{0, 2, 4\}$, sem causar conflitos. Por fim, sabendo que todo caminho P possui $\lambda_{3,2,1}(P) \leq 7$ [Clipperton et al. 2006], atribuímos rótulos $9, 10, \ldots, 16$ aos demais vértices não rotulados, sem causar conflitos, concluindo que $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 16$. $\square$

Referências

Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37:194–197.

Chartrand, G., Erwin, D., Harary, F., and Zhang, P. (2001). Radio labelings of graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 33:77–85.

Chia, M. L., Kuo, D., Yang, H. L. C. H., and Yeh, R. K. (2011). L(3,2,1) labeling of graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15:2439–2457.

Clipperton, J., Gehrtz, J., Szaniszlo, Z., and Torkornoo, D. (2006). L(3,2,1)-labeling of simples graphs. *VERUM*, 68:1497–1514.

Griggs, J. R. and Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4):586–595.

Král, D. and Skrekovski, R. (2003). A theorem about the channel assignment problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16:426–437.

Liu, J. and Shao, Z. (2004). The L(3,2,1)-labeling problem on graphs. *Mathematica Applicata*, 17(4):596–602.

West, D. B. (2018). *Introduction to Graph Theory*. Pearson Modern Classic.