

# Relação entre classes de grafos com contagem de intervalo $k$

Lívia S. Medeiros<sup>1</sup>, Fabiano S. Oliveira<sup>1</sup>, Jayme L. Szwarcfiter<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IME – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) – Brasil

<sup>2</sup>COPPE, NCE, IM – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Brasil

liviasmedeiros@gmail.com, fabiano.oliveira@ime.uerj.br, jayme@nce.ufrj.br

**Abstract.** The subclass  $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k)$  of interval graphs consists of those that admit an interval model having precisely the interval lengths  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . For all  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ , and  $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$ , we prove that  $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k) \subseteq \text{LEN}(b_1, b_2, \dots, b_k)$  if and only if there exists a constant  $r$  such that  $b_j = ra_j$  for all  $1 \leq j \leq k$ .

**Resumo.** A subclasse  $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k)$  dos grafos de intervalo consiste daqueles que admitem um modelo de intervalo tendo precisamente os tamanhos de intervalo  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Para todo  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ , e  $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$ , provamos que  $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k) \subseteq \text{LEN}(b_1, b_2, \dots, b_k)$  se e somente se existe uma constante  $r$  tal que  $b_j = ra_j$  para todo  $1 \leq j \leq k$ .

## 1. Introdução

O grafo de intervalo de uma família  $\mathcal{M}$  de intervalos fechados da reta real é o grafo  $G$  tal que cada vértice  $v \in V(G)$  está associado a um intervalo  $I_v \in \mathcal{M}$  e, para todo  $u, v \in V(G)$ ,  $(u, v) \in E(G)$  se e somente se  $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ . Chamamos  $\mathcal{M}$  de um modelo de  $G$ . Denotamos as extremidades esquerda e direita de um intervalo  $I_v$  respectivamente por  $\ell(I_v)$  e  $r(I_v)$ . O tamanho de um intervalo  $I_v$ , denotado por  $|I_v|$ , é dado por  $r(I_v) - \ell(I_v)$ . O menor número  $IC(G)$  de tamanhos distintos de intervalos suficiente para se representar um modelo de  $G$  é chamado contagem de intervalo de  $G$ . Formalmente,

$$IC(G) = \min\{IC(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \text{ é um modelo de intervalo do grafo } G\}$$

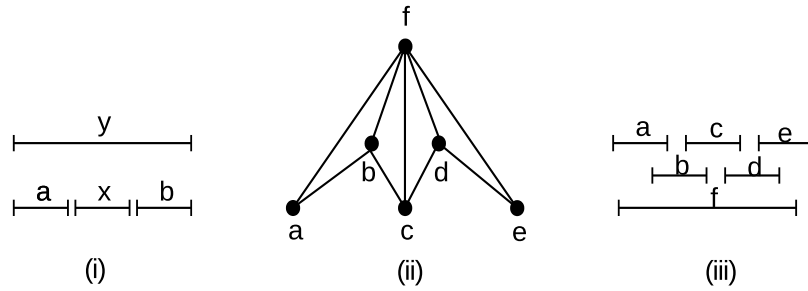
onde  $IC(\mathcal{M})$  denota o número de tamanhos distintos dos intervalos de  $\mathcal{M}$ . O problema da contagem de intervalo foi inicialmente proposto por Ronald Graham na década de 80 e, até o momento, a complexidade de reconhecer se  $IC(G) \leq k$  para todo  $k \geq 2$  é um problema em aberto [Fishburn 1985, Klavík et al. 2019].

Dizemos que um intervalo  $x$  está *aninhado* a outro  $y$  se há intervalos distintos  $a, b$  tais que as interseções entre esses intervalos são como as mostradas na Figura 1(i). A Figura 1(ii) ilustra um grafo de intervalo  $G$  e a Figura 1(iii) um exemplo de um modelo de  $G$  com dois tamanhos distintos que realiza a contagem de intervalo de  $G$ .

Um modelo- $\{a_1, \dots, a_k\}$  é um modelo de intervalo  $\mathcal{M}$  no qual  $|I_v| \in \{a_1, \dots, a_k\}$  para todo  $I_v \in \mathcal{M}$ . A classe dos grafos  $G$  que admitem um modelo- $\{a_1, \dots, a_k\}$  é denotada por  $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$ ,  $a_1 < \dots < a_k$ . A classe  $\text{LEN}(0, 1)$  foi caracterizada em [Skrien 1984]. Quase duas décadas mais tarde, [Rautenbach and Szwarcfiter 2012] descreveram um algoritmo

---

O segundo e terceiro autores são parcialmente financiados por FAPERJ, CNPq e CAPES.



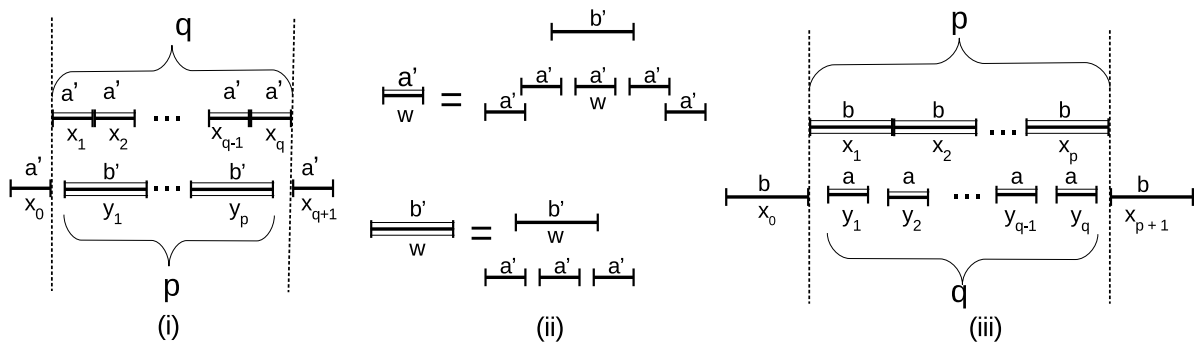
**Figura 1.** Em (i) tem-se a representação visual da relação de aninhamento entre  $x$  e  $y$ , em (ii) um grafo de intervalo  $G$  e em (iii) um modelo de  $G$  que realiza a contagem de intervalo de  $G$ .

de tempo linear para reconhecimento dessa mesma classe. Em [Joos et al. 2014], foi desenvolvido um algoritmo de tempo polinomial usando programação linear para determinar se, dados um grafo conexo  $G$  e uma bipartição de  $V(G)$  nos conjuntos  $A$  e  $B$ , existe um modelo  $\{I_v : v \in V(G)\}$  de  $G$  tal que  $|I_v| = a$  para todo  $v \in A$  e  $|I_v| = b$  para todo  $v \in B$ , para algum par de constantes  $a < b$ . Em [Francis et al. 2022], foi investigada a relação de inclusão entre as diferentes classes  $\text{LEN}(a, b)$  quando se varia os parâmetros  $a$  e  $b$ , e mostrado que  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$  se e somente se  $\frac{a'}{b'} \neq \frac{a}{b}$  para todo  $0 \leq a' < b'$  e  $0 \leq a < b$ .

A motivação desse trabalho foi investigar a relação de inclusão mais geral entre as classes  $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$  que se obtém variando-se os parâmetros  $a_1, \dots, a_k$ .

**Teorema 1** ([Francis et al. 2022]).  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$  para todo  $0 < a' < b'$  e  $0 < a < b$  para os quais  $\frac{b'}{a'} \neq \frac{b}{a}$ .

A demonstração desse teorema consiste em, assumindo que  $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$ , construir um modelo- $\{a', b'\}$  especial e mostrar que o grafo de intervalo correspondente não admite um modelo- $\{a, b\}$ . Em seguida, constrói-se um modelo- $\{a, b\}$  cujo grafo de intervalo correspondente não admite um modelo- $\{a', b'\}$ , o que implica no resultado do teorema. A seguir, delineamos a construção de tais modelos de [Francis et al. 2022] pois eles serão empregados na demonstração de nosso resultado.



**Figura 2.** Esquema do modelo  $\mathcal{M}$  usado no Teorema 1. O rótulo acima de cada intervalo representa seu tamanho, e o abaixo sua identificação.

Assuma sem perda de generalidade que  $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$ . Uma vez que existe um número racional entre quaisquer dois números reais, existem inteiros positivos  $p, q$  tais que  $\frac{b'}{a'} < \frac{q}{p} < \frac{b}{a}$ . Claramente,  $p < q$ . Construímos um modelo- $\{a', b'\}$   $\mathcal{M}$  usando os inteiros  $p$  e  $q$ . Seja  $\mathcal{M}$  o modelo

da Figura 2(i). Neste modelo, há um caminho  $x_0, x_1, \dots, x_q, x_{q+1}$  com  $q + 2$  intervalos de tamanho  $a'$ . Além disso, há no modelo um conjunto independente  $y_1, \dots, y_p$  com  $p$  intervalos de tamanho  $b'$ . Em  $\mathcal{M}$ , há também mais intervalos do que aqueles explicitamente representados. Cada intervalo desenhado como barras duplas e triplas denotará que há mais intervalos associados a ele. Se  $w$  é um intervalo de barra dupla, então adicionaremos mais cinco intervalos ao modelo de tal forma que  $w$  e tais intervalos adicionais consistem do submodelo representado na parte superior da Figura 2(ii). As extremidades reais da esquerda e direita desses intervalos adicionais são omitidos porque podem ser escolhidos arbitrariamente, desde que os intervalos formem um submodelo isomorfo ao da Figura 2(ii) e seus tamanhos sejam os prescritos. Se  $w$  é um intervalo de barra tripla, então adicionaremos mais três intervalos associados a  $w$  para formar o submodelo dado pela parte inferior da Figura 2(ii). Isso completa a descrição de  $\mathcal{M}$ . Mostra-se que o grafo de intervalo  $G$  correspondente a  $\mathcal{M}$ , embora em  $\text{LEN}(a', b')$ , não pertence a  $\text{LEN}(a, b)$ .

Prova-se que  $\text{LEN}(a, b) \not\subseteq \text{LEN}(a', b')$  de forma semelhante. A construção do modelo desta etapa segue da seguinte forma. Seja  $\mathcal{M}$  o modelo- $\{a, b\}$  esquematizado na Figura 2(iii). Neste modelo, há um caminho  $x_0, x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$  com  $p + 2$  intervalos de tamanho  $b$ . Além disso, há no modelo um conjunto independente  $y_1, \dots, y_q$  com  $q$  intervalos de tamanho  $a$ . Em  $\mathcal{M}$ , há também mais intervalos do que aqueles explicitamente representados. Note que aqui também, os intervalos de barra dupla e barra tripla devem ser substituídos por um esquema semelhante ao mostrado na Figura 2(ii), com a mudança que todos os  $a'$ -s nessa figura devem ser substituídos por  $a$ -s e todos os  $b'$ -s por  $b$ -s. Mostra-se que o grafo de intervalo  $G$  correspondente a  $\mathcal{M}$ , embora em  $\text{LEN}(a, b)$ , não pertence a  $\text{LEN}(a', b')$ .

Em resumo, tal prova fornece uma construção de um modelo- $\{a', b'\}$  que não pode ser transformado em um modelo- $\{a, b\}$  que corresponda ao mesmo grafo de intervalo. A construção exata a ser empregada, dentre as duas possíveis, depende se  $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$  ou o contrário. Chamaremos tal construção por  $\mathcal{M}(a', b', a, b)$ , para qualquer par  $p, q$  escolhido na construção, que empregaremos na próxima seção.

Adicionalmente a esse resultado, observe que se  $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$ , então  $\text{LEN}(a', b') = \text{LEN}(a, b)$ .

## 2. Relação de inclusão entre as classes $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$

Investigamos a inclusão entre as classes  $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$ , para todo  $0 < a_1 < \dots < a_k$ .

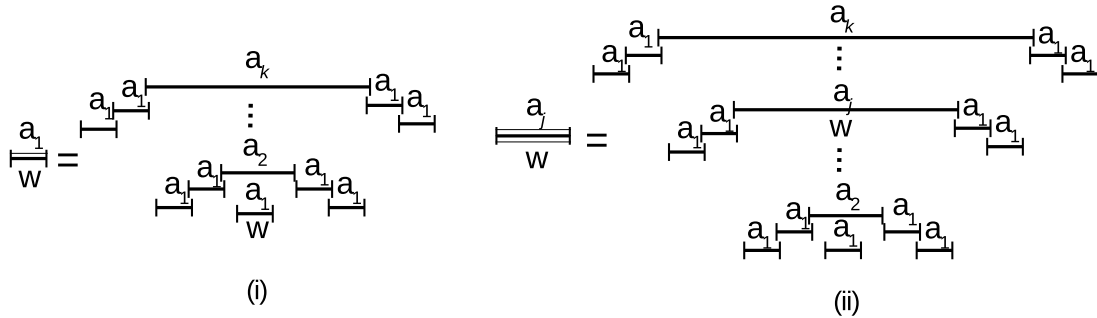
**Teorema 2.** *Sejam  $S_1 = a_1, \dots, a_k$  e  $S_2 = b_1, \dots, b_k$  duas sequências tais que  $a_1, b_1 > 0$  e, para todo  $1 \leq i < k$ ,  $a_i < a_{i+1}$  e  $b_i < b_{i+1}$ . Então,  $\text{LEN}(S_1) \not\subseteq \text{LEN}(S_2)$  se e somente se não existe uma constante  $r$  tal que  $b_j = ra_j$  para todo  $1 \leq j \leq k$ .*

*Demonstração.* Sejam  $a_1, a_j \in S_1$  e  $b_1, b_j \in S_2$  com  $2 \leq j \leq k$ , tal que  $\frac{a_j}{a_1} \neq \frac{b_j}{b_1}$ . Note que tal valor de  $j$  certamente existe, pois se  $\frac{a_j}{a_1} = \frac{b_j}{b_1}$  para todo  $1 \leq j \leq k$ , então existiria  $r = \frac{b_1}{a_1}$  tal que  $b_j = (\frac{b_1}{a_1})a_j = ra_j$  para todo  $2 \leq j \leq k$ , contrariando a hipótese do teorema. Seja  $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$  o modelo obtido a partir de  $\mathcal{M}(a_1, a_j, b_1, b_j)$  redefinindo-se os intervalos de barra dupla e tripla no modelo  $\mathcal{M}$  da Figura 2 como descrito a seguir (veja a Figura 3):

1. Para cada intervalo de barra dupla, rotulado como  $a' = a_1$  em  $\mathcal{M}$ , criar uma cadeia de  $k$  intervalos aninhados, com tamanhos  $a_1, \dots, a_k$ , conforme especificado na Figura 3(i).
2. Para cada intervalo de barra tripla, rotulado como  $b' = a_j$  em  $\mathcal{M}$ , criar uma cadeia de  $k$  intervalos aninhados, de tamanho  $a_1, \dots, a_k$ , conforme especificado na Figura 3. Note

que os submodelos apresentados nas Figuras 3(i) e 3(ii) são iguais, a menos da posição do intervalo de referência na cadeia de aninhamento (o tamanho indicado nos intervalos de barra dupla representam o menor tamanho da cadeia, enquanto nos intervalos de barra tripla, o  $j$ -ésimo menor tamanho da cadeia).

Seja  $G$  o grafo de intervalo correspondente a  $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$ . Considere as transformações de intervalos de barra dupla ou tripla da Figura 3. Nesses modelos, observe os intervalos que formam a cadeia de aninhamento com  $k$  intervalos (o menor de tamanho  $a_1$ , aninhado em outro de tamanho  $a_2$ , e assim por diante até o aninhamento àquele de tamanho  $a_k$ ). Seja  $C \subset \mathcal{M}_j(S_1, S_2)$  a união de tais intervalos nessas cadeias. Pela construção, em qualquer modelo  $\mathcal{M}$  de  $G$ , temos que os intervalos de tamanho  $a_i$  de  $C$  possuem o  $i$ -ésimo menor tamanho de  $\mathcal{M}$ . Se existir um modelo- $S_2$   $\mathcal{M}'$  de  $G$ , então todos os intervalos de  $C$  de tamanho  $a_1$  e  $a_j$  no modelo- $S_1$   $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$  de  $G$  possuem respectivamente tamanho  $b_1$  e  $b_j$  em  $\mathcal{M}'$ . Isso equivale a dizer que existe um submodelo de  $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$ , isomorfo a  $\mathcal{M}(a_1, a_j, b_1, b_j)$ , que pode ser transformado de um modelo- $\{a_1, a_j\}$  em um modelo- $\{b_1, b_j\}$ , o que contradiz a construção do Teorema 1.  $\square$



**Figura 3.** O modelo  $\mathcal{M}_j(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k)$ , obtido a partir do modelo  $\mathcal{M}(a_1, a_j, b_1, b_j)$  substituindo-se as trocas da Figura 2(ii) por aquelas da Figura 3.

### 3. Conclusão

Motivados pela relação de inclusão entre as classes  $\text{LEN}(a, b)$  estudado em [Francis et al. 2022], investigamos a inclusão de classes  $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$  com  $0 < a_1 < \dots < a_k$ . Mostramos que  $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k) \subseteq \text{LEN}(b_1, \dots, b_k)$  se e somente se existe uma constante  $r$  tal que  $b_j = ra_j$  para todo  $1 \leq j \leq k$ . É importante notar que o reconhecimento se dado grafo pertence a  $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$ , para todo  $k \geq 2$  e todo  $0 < a_1 < \dots < a_k$  continua um problema em aberto.

### Referências

- Fishburn, P. (1985). *Interval Orders and Interval Graphs*. John Wiley and Sons.
- Francis, M. C., Medeiros, L. S., Oliveira, F. S., and Szwarcfiter, J. L. (2022). On subclasses of interval count two and on Fishburn's conjecture. *Discrete Appl. Math.*, (to appear).
- Joos, F., Lowenstein, C., Oliveira, F. S., Rautenbach, D., and Szwarcfiter, J. L. (2014). Graphs of interval count two with a given partition. *Inf. Process. Lett.*, 114:542–546.
- Klavík, P., Otachi, Y., and Sejnoha, J. (2019). On the classes of interval graphs of limited nesting and count of lengths. *Algorithmica*, 81:1490–1511.
- Rautenbach, D. and Szwarcfiter, J. L. (2012). Unit and single point interval graphs. *Discrete Appl. Math.*, 160(10):1601–1609.
- Skrien, D. (1984). Chronological orderings of interval graphs. *Discrete Appl. Math.*, 8:69–83.