

Relação entre classes de grafos com contagem de intervalo k

Lívia S. Medeiros¹, Fabiano S. Oliveira¹, Jayme L. Szwarcfiter^{1,2}

¹IME – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) – Brasil

²COPPE, NCE, IM – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Brasil

liviasmedeiros@gmail.com, fabiano.oliveira@ime.uerj.br, jayme@nce.ufrj.br

Abstract. The subclass $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ of interval graphs consists of those that admit an interval model having precisely the interval lengths a_1, a_2, \dots, a_k . For all $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$, and $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$, we prove that $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k) \subseteq \text{LEN}(b_1, b_2, \dots, b_k)$ if and only if there exists a constant r such that $b_j = ra_j$ for all $1 \leq j \leq k$.

Resumo. A subclasse $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ dos grafos de intervalo consiste daqueles que admitem um modelo de intervalo tendo precisamente os tamanhos de intervalo a_1, a_2, \dots, a_k . Para todo $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$, e $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$, provamos que $\text{LEN}(a_1, a_2, \dots, a_k) \subseteq \text{LEN}(b_1, b_2, \dots, b_k)$ se e somente se existe uma constante r tal que $b_j = ra_j$ para todo $1 \leq j \leq k$.

1. Introdução

O grafo de intervalo de uma família \mathcal{M} de intervalos fechados da reta real é o grafo G tal que cada vértice $v \in V(G)$ está associado a um intervalo $I_v \in \mathcal{M}$ e, para todo $u, v \in V(G)$, $(u, v) \in E(G)$ se e somente se $I_u \cap I_v \neq \emptyset$. Chamamos \mathcal{M} de um modelo de G . Denotamos as extremidades esquerda e direita de um intervalo I_v respectivamente por $\ell(I_v)$ e $r(I_v)$. O tamanho de um intervalo I_v , denotado por $|I_v|$, é dado por $r(I_v) - \ell(I_v)$. O menor número $IC(G)$ de tamanhos distintos de intervalos suficiente para se representar um modelo de G é chamado contagem de intervalo de G . Formalmente,

$$IC(G) = \min\{IC(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \text{ é um modelo de intervalo do grafo } G\}$$

onde $IC(\mathcal{M})$ denota o número de tamanhos distintos dos intervalos de \mathcal{M} . O problema da contagem de intervalo foi inicialmente proposto por Ronald Graham na década de 80 e, até o momento, a complexidade de reconhecer se $IC(G) \leq k$ para todo $k \geq 2$ é um problema em aberto [Fishburn 1985, Klavík et al. 2019].

Dizemos que um intervalo x está *aninhado* a outro y se há intervalos distintos a, b tais que as interseções entre esses intervalos são como as mostradas na Figura 1(i). A Figura 1(ii) ilustra um grafo de intervalo G e a Figura 1(iii) um exemplo de um modelo de G com dois tamanhos distintos que realiza a contagem de intervalo de G .

Um modelo- $\{a_1, \dots, a_k\}$ é um modelo de intervalo \mathcal{M} no qual $|I_v| \in \{a_1, \dots, a_k\}$ para todo $I_v \in \mathcal{M}$. A classe dos grafos G que admitem um modelo- $\{a_1, \dots, a_k\}$ é denotada por $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$, $a_1 < \dots < a_k$. A classe $\text{LEN}(0, 1)$ foi caracterizada em [Skrien 1984]. Quase duas décadas mais tarde, [Rautenbach and Szwarcfiter 2012] descreveram um algoritmo

O segundo e terceiro autores são parcialmente financiados por FAPERJ, CNPq e CAPES.

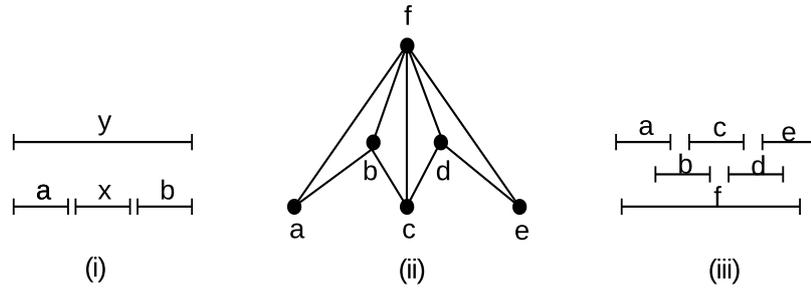


Figura 1. Em (i) tem-se a representação visual da relação de aninhamento entre x e y , em (ii) um grafo de intervalo G e em (iii) um modelo de G que realiza a contagem de intervalo de G .

de tempo linear para reconhecimento dessa mesma classe. Em [Joos et al. 2014], foi desenvolvido um algoritmo de tempo polinomial usando programação linear para determinar se, dados um grafo conexo G e uma bipartição de $V(G)$ nos conjuntos A e B , existe um modelo $\{I_v : v \in V(G)\}$ de G tal que $|I_v| = a$ para todo $v \in A$ e $|I_v| = b$ para todo $v \in B$, para algum par de constantes $a < b$. Em [Francis et al. 2022], foi investigada a relação de inclusão entre as diferentes classes $\text{LEN}(a, b)$ quando se varia os parâmetros a e b , e mostrado que $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$ se e somente se $\frac{a'}{b'} \neq \frac{a}{b}$ para todo $0 \leq a' < b'$ e $0 \leq a < b$.

A motivação desse trabalho foi investigar a relação de inclusão mais geral entre as classes $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$ que se obtém variando-se os parâmetros a_1, \dots, a_k .

Teorema 1 ([Francis et al. 2022]). $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$ para todo $0 < a' < b'$ e $0 < a < b$ para os quais $\frac{b'}{a'} \neq \frac{b}{a}$.

A demonstração desse teorema consiste em, assumindo que $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$, construir um modelo- $\{a', b'\}$ especial e mostrar que o grafo de intervalo correspondente não admite um modelo- $\{a, b\}$. Em seguida, constrói-se um modelo- $\{a, b\}$ cujo grafo de intervalo correspondente não admite um modelo- $\{a', b'\}$, o que implica no resultado do teorema. A seguir, delineamos a construção de tais modelos de [Francis et al. 2022] pois eles serão empregados na demonstração de nosso resultado.

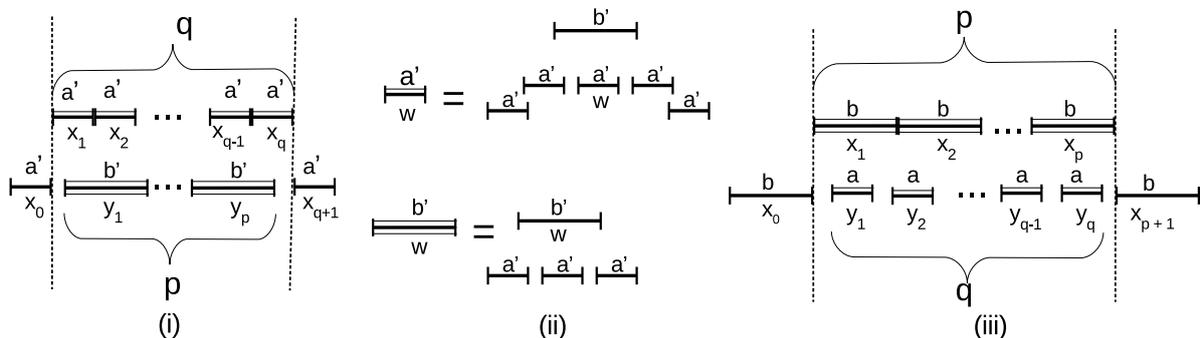


Figura 2. Esquema do modelo \mathcal{M} usado no Teorema 1. O rótulo acima de cada intervalo representa seu tamanho, e o abaixo sua identificação.

Assuma sem perda de generalidade que $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$. Uma vez que existe um número racional entre quaisquer dois números reais, existem inteiros positivos p, q tais que $\frac{b'}{a'} < \frac{q}{p} < \frac{b}{a}$. Claramente, $p < q$. Construímos um modelo- $\{a', b'\}$ \mathcal{M} usando os inteiros p e q . Seja \mathcal{M} o modelo

da Figura 2(i). Neste modelo, há um caminho $x_0, x_1, \dots, x_q, x_{q+1}$ com $q + 2$ intervalos de tamanho a' . Além disso, há no modelo um conjunto independente y_1, \dots, y_p com p intervalos de tamanho b' . Em \mathcal{M} , há também mais intervalos do que aqueles explicitamente representados. Cada intervalo desenhado como barras duplas e triplas denotará que há mais intervalos associados a ele. Se w é um intervalo de barra dupla, então adicionaremos mais cinco intervalos ao modelo de tal forma que w e tais intervalos adicionais consistem do submodelo representado na parte superior da Figura 2(ii). As extremidades reais da esquerda e direita desses intervalos adicionais são omitidos porque podem ser escolhidos arbitrariamente, desde que os intervalos formem um submodelo isomorfo ao da Figura 2(ii) e seus tamanhos sejam os prescritos. Se w é um intervalo de barra tripla, então adicionaremos mais três intervalos associados a w para formar o submodelo dado pela parte inferior da Figura 2(ii). Isso completa a descrição de \mathcal{M} . Mostra-se que o grafo de intervalo G correspondente a \mathcal{M} , embora em $\text{LEN}(a', b')$, não pertence a $\text{LEN}(a, b)$.

Prova-se que $\text{LEN}(a, b) \not\subseteq \text{LEN}(a', b')$ de forma semelhante. A construção do modelo desta etapa segue da seguinte forma. Seja \mathcal{M} o modelo- $\{a, b\}$ esquematizado na Figura 2(iii). Neste modelo, há um caminho $x_0, x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ com $p + 2$ intervalos de tamanho b . Além disso, há no modelo um conjunto independente y_1, \dots, y_q com q intervalos de tamanho a . Em \mathcal{M} , há também mais intervalos do que aqueles explicitamente representados. Note que aqui também, os intervalos de barra dupla e barra tripla devem ser substituídos por um esquema semelhante ao mostrado na Figura 2(ii), com a mudança que todos os a' -s nessa figura devem ser substituídos por a -s e todos os b' -s por b -s. Mostra-se que o grafo de intervalo G correspondente a \mathcal{M} , embora em $\text{LEN}(a, b)$, não pertence a $\text{LEN}(a', b')$.

Em resumo, tal prova fornece uma construção de um modelo- $\{a', b'\}$ que não pode ser transformado em um modelo- $\{a, b\}$ que corresponda ao mesmo grafo de intervalo. A construção exata a ser empregada, dentre as duas possíveis, depende se $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$ ou o contrário. Chamaremos tal construção por $\mathcal{M}(a', b', a, b)$, para qualquer par p, q escolhido na construção, que empregaremos na próxima seção.

Adicionalmente a esse resultado, observe que se $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$, então $\text{LEN}(a', b') = \text{LEN}(a, b)$.

2. Relação de inclusão entre as classes $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$

Investigamos a inclusão entre as classes $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$, para todo $0 < a_1 < \dots < a_k$.

Teorema 2. *Sejam $S_1 = a_1, \dots, a_k$ e $S_2 = b_1, \dots, b_k$ duas sequências tais que $a_1, b_1 > 0$ e, para todo $1 \leq i < k$, $a_i < a_{i+1}$ e $b_i < b_{i+1}$. Então, $\text{LEN}(S_1) \not\subseteq \text{LEN}(S_2)$ se e somente se não existe uma constante r tal que $b_j = ra_j$ para todo $1 \leq j \leq k$.*

Demonstração. Sejam $a_1, a_j \in S_1$ e $b_1, b_j \in S_2$ com $2 \leq j \leq k$, tal que $\frac{a_j}{a_1} \neq \frac{b_j}{b_1}$. Note que tal valor de j certamente existe, pois se $\frac{a_j}{a_1} = \frac{b_j}{b_1}$ para todo $1 \leq j \leq k$, então existiria $r = \frac{b_1}{a_1}$ tal que $b_j = (\frac{b_1}{a_1})a_j = ra_j$ para todo $2 \leq j \leq k$, contrariando a hipótese do teorema. Seja $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$ o modelo obtido a partir de $\mathcal{M}(a_1, a_j, b_1, b_j)$ redefinindo-se os intervalos de barra dupla e tripla no modelo \mathcal{M} da Figura 2 como descrito a seguir (veja a Figura 3):

1. Para cada intervalo de barra dupla, rotulado como $a' = a_1$ em \mathcal{M} , criar uma cadeia de k intervalos aninhados, com tamanhos a_1, \dots, a_k , conforme especificado na Figura 3(i).
2. Para cada intervalo de barra tripla, rotulado como $b' = a_j$ em \mathcal{M} , criar uma cadeia de k intervalos aninhados, de tamanho a_1, \dots, a_k , conforme especificado na Figura 3. Note

que os submodelos apresentados nas Figuras 3(i) e 3(ii) são iguais, a menos da posição do intervalo de referência na cadeia de aninhamento (o tamanho indicado nos intervalos de barra dupla representam o menor tamanho da cadeia, enquanto nos intervalos de barra tripla, o j -ésimo menor tamanho da cadeia).

Seja G o grafo de intervalo correspondente a $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$. Considere as transformações de intervalos de barra dupla ou tripla da Figura 3. Nesses modelos, observe os intervalos que formam a cadeia de aninhamento com k intervalos (o menor de tamanho a_1 , aninhado em outro de tamanho a_2 , e assim por diante até o aninhamento àquele de tamanho a_k). Seja $C \subset \mathcal{M}_j(S_1, S_2)$ a união de tais intervalos nessas cadeias. Pela construção, em qualquer modelo \mathcal{M} de G , temos que os intervalos de tamanho a_i de C possuem o i -ésimo menor tamanho de \mathcal{M} . Se existir um modelo- S_2 \mathcal{M}' de G , então todos os intervalos de C de tamanho a_1 e a_j no modelo- S_1 $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$ de G possuem respectivamente tamanho b_1 e b_j em \mathcal{M}' . Isso equivale a dizer que existe um submodelo de $\mathcal{M}_j(S_1, S_2)$, isomorfo a $\mathcal{M}(a_1, a_j, b_1, b_j)$, que pode ser transformado de um modelo- $\{a_1, a_j\}$ em um modelo- $\{b_1, b_j\}$, o que contradiz a construção do Teorema 1. \square

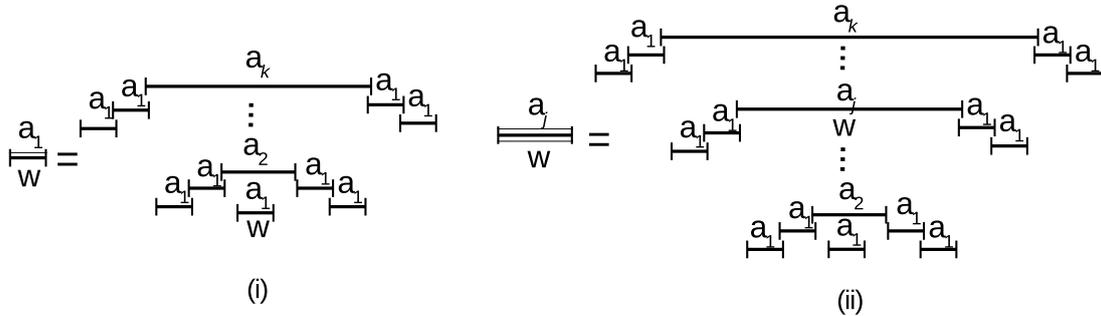


Figura 3. O modelo $\mathcal{M}_j(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k)$, obtido a partir do modelo $\mathcal{M}(a_1, a_j, b_1, b_j)$ substituindo-se as trocas da Figura 2(ii) por aquelas da Figura 3.

3. Conclusão

Motivados pela relação de inclusão entre as classes $\text{LEN}(a, b)$ estudado em [Francis et al. 2022], investigamos a inclusão de classes $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$ com $0 < a_1 < \dots < a_k$. Mostramos que $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k) \subseteq \text{LEN}(b_1, \dots, b_k)$ se e somente se existe uma constante r tal que $b_j = ra_j$ para todo $1 \leq j \leq k$. É importante notar que o reconhecimento se dado grafo pertence a $\text{LEN}(a_1, \dots, a_k)$, para todo $k \geq 2$ e todo $0 < a_1 < \dots < a_k$ continua um problema em aberto.

Referências

- Fishburn, P. (1985). *Interval Orders and Interval Graphs*. John Wiley and Sons.
- Francis, M. C., Medeiros, L. S., Oliveira, F. S., and Szwarcfiter, J. L. (2022). On subclasses of interval count two and on Fishburn's conjecture. *Discrete Appl. Math.*, (to appear).
- Joos, F., Lowenstein, C., Oliveira, F. S., Rautenbach, D., and Szwarcfiter, J. L. (2014). Graphs of interval count two with a given partition. *Inf. Process. Lett.*, 114:542–546.
- Klavík, P., Otachi, Y., and Sejnoha, J. (2019). On the classes of interval graphs of limited nesting and count of lengths. *Algorithmica*, 81:1490–1511.
- Rautenbach, D. and Szwarcfiter, J. L. (2012). Unit and single point interval graphs. *Discrete Appl. Math.*, 160(10):1601–1609.
- Skrien, D. (1984). Chronological orderings of interval graphs. *Discrete Appl. Math.*, 8:69–83.