O Problema do Número Clique Orientado Absoluto é NP-completo

E. M. M. Coelho[1], H. Coelho[1], L. Faria[2], M. P. Ferreira[1], S. Klein[3]

[1]UFG - Goiânia, [2]UERJ - Rio de Janeiro, [3]UFRJ - Rio de Janeiro
Brasil

{erikamorais,hebert}@inf.ufg.br, luerbio@cos.ufrj.br,

mateusferreira@inf.ufg.br, sula@cos.ufrj.br

Abstract. *Let $\overrightarrow{G} = (V, A)$ be an oriented graph. The oriented chromatic number of $\overrightarrow{G}$ denoted by $\chi_o(\overrightarrow{G})$ is a well-know parameter in the literature. The absolute oriented clique number, $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$, is the order of the largest subgraph $\overrightarrow{H}$ of $\overrightarrow{G}$ such that $\chi_o(\overrightarrow{H}) = |V(\overrightarrow{H})|$. In this work we show that deciding if $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq k$ is an NP-complete problem and there is no polynomial-time approximation within a factor of $n^{1-\varepsilon}$ for all $\varepsilon > 0$, unless $P = NP$.*

Resumo. *Seja $\overrightarrow{G} = (V, A)$ um grafo orientado. O número cromático orientado de $\overrightarrow{G}$ denotado por $\chi_o(\overrightarrow{G})$ é um parâmetro bem conhecido na literatura. O número clique orientado absoluto, $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$, é a ordem do maior subgrafo $\overrightarrow{H}$ de $\overrightarrow{G}$ tal que $\chi_o(\overrightarrow{H}) = |V(\overrightarrow{H})|$. Neste trabalho mostramos que decidir se $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq k$ é um problema NP-completo e que não existe um algoritmo aproximativo de tempo polinomial com um fator $n^{1-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$, a não ser que $P = NP$.*

1. Introdução

O problema da coloração orientada foi introduzido independentemente na literatura por meio dos trabalhos [Raspaud e Sopena 1994] e [Courcelle 1994]. O trabalho de Sopena [Sopena 2016] faz uma revisão dos principais resultados do problema. Nos últimos anos os parâmetros número clique orientado relativo e absoluto de um grafo orientado $\overrightarrow{G}$, denotados respectivamente por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ e $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$, têm ganhado atenção por serem limites inferiores para o número cromático orientado $\chi_o(\overrightarrow{G})$, ou seja, $\omega_{ao}(\overrightarrow{G}) \leq \omega_{ro}(\overrightarrow{G}) \leq \chi_o(\overrightarrow{G})$.

Uma *k-coloração orientada* é definida pela função $\phi_{\overrightarrow{G}}$: $V(\overrightarrow{G}) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que: Se $xy \in A(\overrightarrow{G})$, então $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(y)$ e se xy, $zt \in A(\overrightarrow{G})$ e $\phi_{\overrightarrow{G}}(y) = \phi_{\overrightarrow{G}}(z)$ então $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(t)$. O *número cromático orientado*, denotado por $\chi_o(\overrightarrow{G})$, é o menor *k* tal que $\overrightarrow{G}$ admite uma *k*-coloração orientada.

No escalonamento paralelo um conjunto com n *tarefas* $V = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ é dado como uma entrada mais uma *relação de precedência* $\overrightarrow{E} \subset \{J_iJ_k \mid i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, significando que a tarefa J_k é executada somente após a tarefa J_i ter sido executada. O *makespan* é o número mínimo de vezes necessário para concluir o escalonamento com a execução de todas as tarefas. O número cromático orientado $\chi_o(\overrightarrow{G})$, do grafo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ é exatamente o valor do makespan.

Dados $x, y \in V(\overrightarrow{G})$ a *distância orientada* $\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) = \min\{k, \infty\}$, onde k é o número de arcos no menor caminho de x para y. A *distância orientada fraca* $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) = \min\{\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y), \overrightarrow{d}_{\overrightarrow{G}}(y, x)\}$.

Uma *clique orientada relativa* $R \subseteq V(\overrightarrow{G})$ de um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ é um conjunto de vértices tal que se $x, y \in R$, então $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) \leq 2$. O *número clique orientado relativo*, denotado por $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$, é a ordem da maior clique orientada relativa que é um subgrafo de $\overrightarrow{G}$. Uma *clique orientada absoluta* ou uma *o-clique* é um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ para o qual $\chi_o(\overrightarrow{G}) = |V(\overrightarrow{G})|$. Observe que se $\overrightarrow{G}$ é uma clique orientada absoluta, então se $x, y \in V(\overrightarrow{G})$, então $\overline{d}_{\overrightarrow{G}}(x, y) \leq 2$. O *número clique orientado absoluto*, denotado por $\omega_{ao}(\overrightarrow{G})$, é a ordem da maior clique orientada absoluta $\overrightarrow{H}$ que é um subgrafo de $\overrightarrow{G}$.

O trabalho de Das et al. [Das et al. 2018] trás o primeiro resultado relativo a complexidade de ω_{ro} através do Teorema 1 para à classe dos grafos bipartidos.

Teorema 1 ([Das et al. 2018]). *Se $\overrightarrow{G}$ é um grafo orientado bipartido, então determinar $\omega_{ro}(\overrightarrow{G})$ é NP-difícil.*

Neste artigo nós provamos que o problema da clique orientada absoluta é *NP*-completo restrito a classe dos grafos bipartidos e demonstramos que esse problema não pode ser aproximado em um fator de aproximação absoluto menor ou igual a $n^{1-\varepsilon}$, onde $n = |V(\overrightarrow{G})|$.

2. Clique Orientada Absoluta é *NP*-Completo

O problema do número clique orientado absoluto foi introduzido por Klostermeyer e MacGillivray [Klostermeyer e MacGillivray 2004]. Apresentamos sua definição a seguir:

Problema 2. Clique Orientada Absoluta
Entrada: *Um grafo orientado $\overrightarrow{G} = (V, E)$, com $n = |V|$, e um inteiro positivo k.*
Pergunta: *Existe uma clique orientada absoluta $\overrightarrow{K}$ de tamanho $|\overrightarrow{K}| \geq k$ em $\overrightarrow{G}$?*

Utilizamos o problema da clique definido a seguir para a demonstração da complexidade de Clique Orientada Absoluta restrito à classe dos grafos bipartidos. A seguir apresentamos a redução utilizada para essa demonstração. Apresentamos um exemplo da Redução 4 na Figura 1. Primeiramente apresentamos alguns lemas necessários para a demonstração.

Problema 3. Clique
Entrada: *Um grafo $G = (V, E)$, com $n = |V|$, e um inteiro k.*
Pergunta: *Existe uma clique $K \subseteq V$ de tamanho $|K| \geq k$ em G?*

Redução 4. *Dado um grafo não orientado G, construímos um grafo orientado $\overrightarrow{H}$ fazendo $V(\overrightarrow{H}) = \{v^+, v^- : v \in V(G)\}$ e $A(\overrightarrow{H}) = \{v^+u^-, u^+v^-, v^-v^+, u^-u^+ : vu \in E(G)\}$.*

Lema 5. *Seja G um grafo e $\overrightarrow{H}$ o grafo formado a partir de G com a Redução 4. Se R é uma clique orientada absoluta maximal de $\overrightarrow{H}$ então $v^+ \in R$ se e somente se $v^- \in R$.*

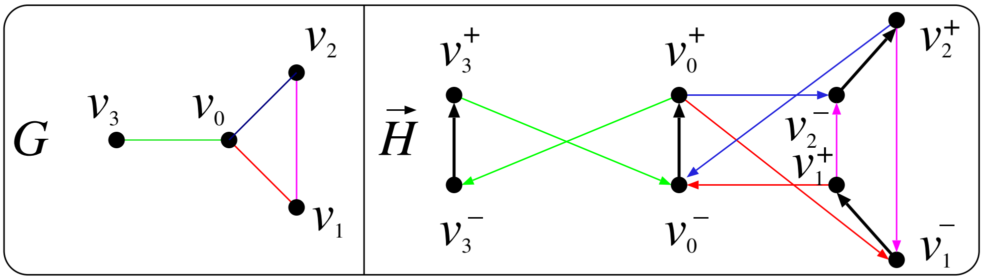

Figura 1. Exemplo da redução do Teorema 9

Corolário 6. *Seja G um grafo e $\overrightarrow{H}$ o grafo formado a partir de G com a Redução 4. Se S é uma clique orientada absoluta de $\overrightarrow{H}$ então existe uma clique orientada absoluta R de $\overrightarrow{H}$ tal que $S \subseteq R$ e $|R| = 2q$, para algum $q \in \mathbb{N}$.*

Lema 7. *Seja G um grafo e $\overrightarrow{H}$ o grafo formado a partir de G com a Redução 4. O grafo G tem uma clique de tamanho k se e somente se $\overrightarrow{H}$ tem uma clique orientada absoluta maximal de tamanho $2k$.*

Corolário 8. *Dada uma clique orientada absoluta S de $\overrightarrow{H}$. Existe um algoritmo de tempo polinomial que obtém R e C, onde R é uma clique orientada absoluta tal que $S \subseteq R, |R| = 2q$ e C é uma clique de G com $|C| = q$.*

Demonstração. Nosso algoritmo, em tempo linear, completa os pares v^+, v^- em S obtendo R de tamanho $2q$. Em seguida, para cada par v^+, v^- em R, adiciona v em C. □

Teorema 9. *O problema* CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA *é NP-completo mesmo restrito a grafos bipartidos.*

Demonstração. Sabemos que o problema CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA pertence a NP, pois podemos checar em tempo polinomial se $R \subseteq V(\overrightarrow{G})$ é uma clique orientada absoluta de tamanho k.

Para mostrar a NP-completude utilizaremos a seguinte redução de tempo polinomial do problema CLIQUE para o problema CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA. Seja G um grafo e k um inteiro, formando uma instância do problema CLIQUE. Construiremos uma instância do problema CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA considerando $\overrightarrow{H}$ como o grafo formado a partir de G com a Redução 4 e o inteiro $2k$. Nos lembramos que como os vértices de mesmo sinal em $\overrightarrow{H}$ não são adjacentes, temos que $\overrightarrow{H}$ é um grafo bipartido.

Pelo Lema 7, G tem uma clique de tamanho k se e somente se $\overrightarrow{H}$ tem uma clique orientada absoluta maximal de tamanho pelo menos $2k$. □

A seguir relembramos algumas definições de Garey e Johnson [Garey e Johnson 1979] que serão úteis para o próximo resultado. Seja A um algoritmo para um problema de otimização Π. Seja D_Π o conjunto de todas as instâncias de Π. Seja $x \in D_\Pi$ uma instância de Π. Seja $Opt_\Pi(x)$ o valor de uma solução ótima para a instância x. Seja y uma solução viável obtida pelo algoritmo A para a instância x. Seja $c(y)$ o valor da solução viável y obtida pelo algoritmo A. O *fator* *de aproximação* do algoritmo A é $R_A(x,y) = \max_{x \in D_\Pi} \left\{ \frac{Opt_\Pi(x)}{c(y)}, \frac{c(y)}{Opt_\Pi(x)} \right\}$. Note que $R_A(x,y) \geq 1$; e que $R_A(x,y) = 1$ se e somente se o algoritmo A obtém uma solução y tal que $Opt_\Pi(x) = c(y)$. Adicionalmente, temos que, se Π é um problema de maximização, então $R_A(x,y) = Opt_\Pi(x)/c(y)$. Note que CLIQUE e CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA entram nesse caso. O *fator de aproximação absoluto* de A é $R_A = \inf\{r \geq 1 : R_A(x,y) \leq r,$ para todas as instâncias $x \in D_\Pi\}$.

Teorema 10 ([Zuckerman 2006])**.** *Se $P \neq NP$ e A é um algoritmo aproximativo polinomial para* CLIQUE*, então $R_A > n^{1-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Teorema 11. *Se $P \neq NP$ e A é um algoritmo aproximativo polinomial para* CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA*, então $R_A > n^{1-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Suponha que $P \neq NP$. Seja G uma instância para CLIQUE e $\varepsilon > 0$. Assuma que existe um algoritmo de aproximação polinomial A para CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA com $R_A \leq n^{1-\varepsilon}$. Considere $\overrightarrow{H}$ o grafo formado a partir de G com a Redução 4. Assim, $\frac{Opt_{o-clique}(\overrightarrow{H})}{A(\overrightarrow{H})} = R_A(\overrightarrow{H}, A(\overrightarrow{H})) \leq R_A \leq n^{1-\varepsilon}$. Pelo Lema 7, temos que $Opt_{o-clique}(\overrightarrow{H}) = 2Opt_{clique}(G)$. Pelo Corolário 6 sabemos que existe uma clique orientada absoluta R em $\overrightarrow{H}$ tal que $A(\overrightarrow{H}) \subseteq R$ e $|R| = 2q$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Lema 7, existe uma clique de tamanho pelo menos q em G que pode ser obtida em tempo polinomial pelo Corolário 8. Dessa forma, $\frac{Opt_{clique}(G)}{q} = \frac{2Opt_{clique}(G)}{2q} \leq \frac{Opt_{o-clique}(\overrightarrow{H})}{A(\overrightarrow{H})} = R_A(\overrightarrow{H}, A(\overrightarrow{H})) \leq n^{1-\varepsilon}$, o que define uma aproximação polinomial para CLIQUE com fator de aproximação absoluto menor ou igual a $n^{1-\varepsilon}$. Pelo Teorema 10 temos que $P = NP$, uma contradição. Logo, não existe algoritmo de aproximação polinomial para CLIQUE ORIENTADA ABSOLUTA com fator de aproximação absoluto menor ou igual a $n^{1-\varepsilon}$. $\square$

Referências

[Courcelle 1994] Courcelle, B. (1994). The monadic second order logic of graphs VI: On several representations of graphs by relational structures. *Discrete Applied Mathematics*, 54(2-3):117–149.

[Das et al. 2018] Das, S., Prabhu, S., e Sen, S. (2018). A study on oriented relative clique number. *Discrete Mathematics*, 341(7):2049–2057.

[Garey e Johnson 1979] Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability*, volume 174. Freeman San Francisco.

[Klostermeyer e MacGillivray 2004] Klostermeyer, W. e MacGillivray, G. (2004). Analogues of cliques for oriented coloring. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24(3):373–387.

[Raspaud e Sopena 1994] Raspaud, A. e Sopena, E. (1994). Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Information Processing Letters*, 51(4):171–174.

[Sopena 2016] Sopena, É. (2016). Homomorphisms and colourings of oriented graphs: An updated survey. *Discret. Math.*, 339(7):1993–2005.

[Zuckerman 2006] Zuckerman, D. (2006). Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. In *Proceedings of the thirty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 681–690.