Um estudo sobre emparelhamentos e a coloração total*

Sérgio Fusquino[1], Mauro Nigro[1], Diana Sasaki[1], Ingrid Borchert[1]

[1] Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Rio de Janeiro, RJ – Brazil

(sergio.fusquino,mauro.nigro)@pos.ime.uerj.br, diana.sasaki@ime.uerj.br,

borchert.ingrid@graduacao.uerj.br

Abstract. *In this paper, we investigate the relationship between matchings and total coloring of graphs and prove that all members of an infinite family of generalized Petersen graphs are Type 1.*

Resumo. *Neste trabalho, investigamos a relação entre emparelhamentos e coloração total de grafos e provamos que todos os membros de uma família infinita de grafos de Petersen generalizados são Tipo 1.*

1. Introdução

Os problemas de coloração em grafos modelam diversas situações de conflitos reais. Uma coloração total de um grafo G é uma função φ entre os conjuntos de vértices V e o de arestas E com um conjunto C de cores, tal que a associação de cores às arestas e aos vértices de G é feita de maneira que cada par de vértices adjacentes e cada par de arestas adjacentes tenham sempre cores distintas e, além disso, cada vértice deve ter cor distinta das cores das arestas que nele incidem. Se $\varphi : V \cup E \to C$ é uma coloração total de G e $|C| = k$, então dizemos que G é k-total-colorível e φ é uma k-coloração total. A menor cardinalidade de C para o qual existe uma coloração total em G é o número cromático total de G, denotado χ''.

Conjecturada por [Vizing 1964] e [Behzad 1965], a bem conhecida Conjectura da Coloração Total afirma que para todo grafo simples G, $\Delta + 1 \leq \chi'' \leq \Delta + 2$, onde Δ é o grau máximo de G. Se $\chi'' = \Delta + 1$, G é dito Tipo 1. Se $\chi'' = \Delta + 2$, G é dito Tipo 2. Esta conjectura está em aberto há mais de 50 anos e é o foco deste trabalho. Encontrar primeiramente uma $(\Delta + 2)$-coloração total não significa que o grafo é Tipo 2, pois pode haver uma $(\Delta + 1)$-coloração total ainda não encontrada. É necessário também provar que não existe nenhuma $(\Delta + 1)$-coloração total para se provar que um grafo é Tipo 2.

Arestas que possuem um mesmo vértice extremo são ditas adjacentes e arestas que não são adjacentes são ditas independentes. Um conjunto M de arestas independentes de um grafo G é chamado de emparelhamento; essas arestas são ditas emparelhadas e um vértice incidente a alguma aresta emparelhada é dito saturado. Um emparelhamento é dito maximal se nenhuma aresta do grafo puder ser adicionada ao emparelhamento. Um emparelhamento é perfeito quando todos os vértices do grafo são saturados.

Neste trabalho, aplicamos um resultado de coloração total envolvendo análise de emparelhamentos para provar que o grafo potência de ciclo C_7^2 é Tipo 2; e usando emparelhamentos perfeitos, provamos que todos os membros da família infinita de grafos de Petersen generalizados $G(3j,7)$, $j \geq 5$, são Tipo 1.

*Trabalho realizado com apoio da CAPES, do CNPq e da FAPERJ.

Um grafo ciclo C_n consiste em um conjunto de vértices $V(C_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0\}$ e arestas $E(C_n) = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0\}$. Uma potência de ciclo é denotada C_n^k e definida como um grafo obtido de um ciclo adicionando arestas entre todos os vértices à distância de no máximo k com $V(C_n^k) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ e $E(C_n^k) = E^1 \cup \ldots \cup E^k$, onde $E^i = \left\{ v_j v_{(j+i) \mod n} \mid 0 \leq j \leq n-1 \right\}$. Um grafo de Petersen generalizado $G(n,k)$ é aquele que, dados k,n inteiros satisfazendo $1 \leq k \leq n-1$ e $2k \leq n$, possui $V(G(n,k)) = \{u_0, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ e $E(G(n,k)) = \{u_iu_{i+1}, u_iv_i, v_iv_{i+k} | 0 \leq i \leq n-1\}$, índices em módulo n. O polígono gerado pelos vértices $u_0, \ldots, u_{n-1}$ é chamado borda externa. O subgrafo induzido de $G(n,k)$ composto por $v_0, \ldots, v_{n-1}$ é chamado de borda interna. As arestas que ligam as duas bordas são chamadas de radiais.

2. Emparelhamentos e grafos Tipo 2

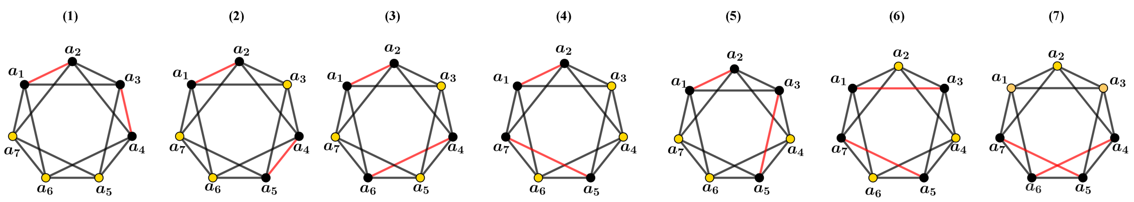
Nesta seção, verificamos que o grafo C_7^2 é Tipo 2, provado primeiramente por [Campos 2006], a qual conclui que não existe uma coloração de vértices harmônica para o C_7^2 e portanto, não admite uma $(\Delta+1)$-coloração total. Nós verificamos este resultado aplicando uma técnica desenvolvida por [Sasaki 2013] que utiliza emparelhamentos, e que poderá ser utilizada para determinar outros grafos regulares Tipo 2.

Teorema 1. *[Sasaki 2013] Se um grafo G é k-regular e não possui emparelhamento maximal de tamanho máximo $\lfloor \frac{|E|}{k+1} \rfloor$, então G não possui $(k+1)$-coloração total.*

A seguir, vamos provar o Teorema 2 aplicando o Teorema 1.

Teorema 2. *[Campos 2006] O grafo potêncio de ciclo C_7^2 é Tipo 2.*

Demonstração. Suponha que o grafo C_7^2 possua emparelhamento maximal de tamanho máximo $\lfloor \frac{|E|}{k+1} \rfloor = \lfloor \frac{|14|}{5} \rfloor = 2$. Na Figura 1 apresentamos os casos que juntos englobam todas as possíveis configurações de emparelhamentos de tamanho 2 a serem analisadas. Por exemplo, suponha no caso (1) que as arestas a_1a_2 e a_3a_4 formam um emparelhamento maximal, porém os vértices não saturados a_5, a_6 e a_7 não formam um conjunto independente. De fato, ao menos uma aresta que os conectam poderia ser acrescentada ao emparelhamento. Para os demais casos, a análise é análoga. Logo, o grafo C_7^2 não possui emparelhamento maximal de tamanho máximo 2 e assim ele não possui uma 5-coloração total. $\square$



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
a_1a_2 a_3a_4	a_1a_2 a_4a_5	a_1a_2 a_4a_6	a_1a_2 a_5a_7	a_1a_2 a_3a_5	a_1a_3 a_5a_7	a_4a_6 a_5a_7
a_1a_7 a_2a_3	a_1a_7 a_3a_4	a_1a_7 a_3a_5	a_1a_7 a_4a_6	a_2a_3 a_4a_6	a_2a_7 a_4a_6	a_3a_5 a_4a_6
a_1a_2 a_6a_7	a_6a_7 a_2a_3	a_2a_4 a_6a_7	a_3a_5 a_6a_7	a_3a_4 a_5a_7	a_1a_6 a_3a_5	a_2a_4 a_3a_5
a_1a_7 a_5a_6	a_1a_2 a_5a_6	a_1a_3 a_5a_6	a_2a_4 a_5a_6	a_4a_5 a_6a_1	a_2a_4 a_5a_7	a_1a_3 a_2a_4
a_4a_5 a_6a_7	a_1a_7 a_4a_5	a_2a_7 a_4a_5	a_1a_3 a_4a_5	a_5a_6 a_7a_2	a_1a_3 a_4a_6	a_1a_3 a_2a_7
a_3a_4 a_5a_6	a_3a_4 a_6a_7	a_1a_6 a_3a_4	a_3a_4 a_2a_7	a_6a_7 a_1a_3	a_3a_5 a_2a_7	a_1a_6 a_2a_7
a_2a_3 a_4a_5	a_2a_3 a_5a_6	a_2a_3 a_5a_7	a_1a_6 a_2a_3	a_7a_1 a_2a_4	a_1a_6 a_2a_4	a_1a_6 a_5a_7

Figura 1. Casos considerados na prova do Teorema 2.

Na Figura 2 vemos a 6-coloração total do C_7^2 feita por [Campos 2006].

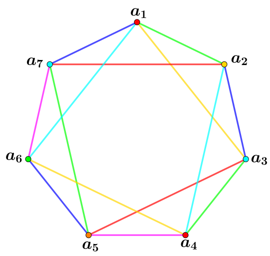


Figura 2. Uma 6-coloração total do C_7^2.

3. Emparelhamentos e grafos Tipo 1

Nesta seção, provamos que todos os membros da família infinita $G(3j,7)$, $j \geq 5$, são Tipo 1. Apesar da Conjectura da Coloração Total ser válida para os grafos cúbicos [Rosenfeld 1971, Vijayaditya 1971], classificá-los em Tipo 1 e Tipo 2 é um problema NP-completo mesmo para grafos cúbicos bipartidos [Sánchez-Arroyo 1989]. Em sua tese, [Sasaki 2013] prova que todos os grafos de Petersen generalizados $G(n,k), k \leq 6$, são Tipo 1, exceto $G(5,1)$ e $G(9,3)$, que são Tipo 2. O Teorema 3 também motiva a investigação do caso $k = 7$, pois não é possível classificar em Tipo 1 todos os grafos da família infinita $G(3j,7)$, $j \geq 5$. Por exemplo, os grafos $G(15,7)$, $G(18,7)$ e $G(21,7)$ não são coloridos pelo Teorema 3. A Figura 4 apresenta as 4-colorações totais desses grafos obtidas pelo Teorema 5.

Teorema 3. *[Sasaki 2013] O grafo de Petersen generalizado $G(n,k)$ é Tipo 1 para $k \geq 2$ e n tal que $n = 2k\lambda + (2k-1)\mu$, com λ e μ inteiros não-negativos.*

O Teorema 5 utiliza o seguinte resultado bem conhecido de [Petersen 1891], para que seja possível colorir um emparelhamento perfeito do grafo com uma única cor. A técnica apresentada possivelmente poderá ser estendida para outros grafos cúbicos.

Teorema 4. *[Petersen 1891] Todo grafo cúbico sem ponte possui um emparelhamento perfeito.*

Teorema 5. *Todo grafo $G(3j,7)$ com $j \geq 5$ é Tipo 1.*

Demonstração. Pelo Teorema 4, sabemos que todo $G(3j,7)$ possui emparelhamento perfeito. As radiais consistem em um emparelhamento perfeito e portanto podem ser coloridas com uma única cor 3 (vermelha). A coloração dos vértices e arestas da borda externa é dada por apenas 3 cores: 0 (verde), 1(laranja) e 2 (azul), uma vez que a borda externa consiste em um ciclo com número de vértices múltiplo de 3, o qual já possui 3-coloração total definida por [Yap 1996]. Sendo $f(v_{i+1}) = f(u_i) = i \mod 3$ a atribuição das cores 0 (verde), 1 (laranja) e 2 (azul) nos vértices do grafo, temos que os vértices extremos das radiais nunca terão conflito. A Figura 3 apresenta um esquema geral das cores das arestas da borda interna, completando a 4-colorações total do grafo $G(3j,7)$, $j \geq 5$. □

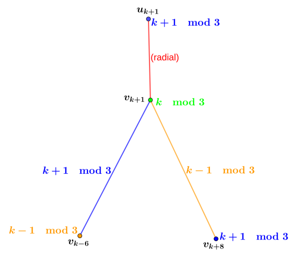


Figura 3. Esquema da coloração da borda interna com $f(v_{k+1}) = k \mod 3$.

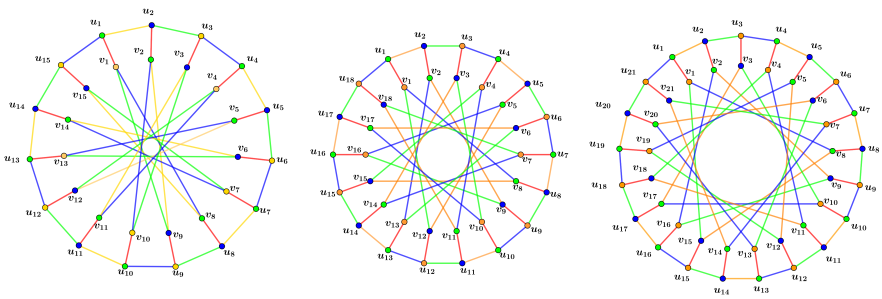


Figura 4. As 4-colorações totais dos G(15,7), G(18,7) e G(21,7), resp. (Teorema 5).

4. Conclusão

Assim como analisar as colorações dos vértices de um grafo pode ser útil para determinação do Tipo dos grafos, acreditamos que analisar os emparelhamentos também pode nos ajudar nisso. Iremos investigar a coloração total dos demais grafos de Petersen generalizados $G(n,7)$, contribuindo com a classificação do Tipo dos grafos cúbicos.

Referências

Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University.

Campos, C. N. (2006). *O Problema da Coloração Total em Classes de Grafos*. Tese de Doutorado, Univesidade Estadual de Campinas, São Paulo.

Petersen, J. (1891). *Die theorie der regulären graphen (em alemão)*. Acta Math., v. 15, pages 193-220.

Rosenfeld, M. (1971). On the total coloring of certain graphs. *Israel J. Math.*, pages 396–402.

Sasaki, D. (2013). *Sobre Coloração Total de Grafos Cúbicos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Sánchez-Arroyo, A. (1989). Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Math*, pages 315–319.

Vijayaditya, N. (1971). On total chromatic number of a graph. *J. London Math.*, pages 405–408.

Vizing, V. G. (1964). *On an estimate of the chromatic class of a p-graph*. Metody Diskret. Analiz., v. 3, pages 25–30.

Yap, H. (1996). *Total Colourings of Graphs*. Springer Publishing Company Incorporated.