Emparelhamento Conexo Ponderado é NP-completo*

Guilherme de C. M. Gomes[1], Bruno P. Masquio[2], Paulo E. D. Pinto[2], Vinicius F. Santos[1], Jayme L. Szwarcfiter[2,3]

[1] Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) – Belo Horizonte, MG – Brazil

[2]Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) – Rio de Janeiro, RJ – Brazil

[3]Instituto de Matemática e PESC/COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro, RJ – Brazil

{gcm.gomes,viniciussantos}@dcc.ufmg.br,
{brunomasquio,pauloedp}@ime.uerj.br, jayme@nce.ufrj.br

Abstract. *A matching M is a $\mathscr{P}$-matching if the subgraph induced by the endpoints of the edges of M satisfies property $\mathscr{P}$. Finding maximum cardinality $\mathscr{P}$-matchings is NP-hard for many properties $\mathscr{P}$, as 1-regular, disconnected and acyclic. On the other hand, determining a maximum cardinality connected matching, where $\mathscr{P}$ is connected, can be obtained in polynomial time. In this article, we consider the problem Weighted Connected Matching, where, given an edge-weighted graph and an integer k, we want to find a connected matching whose sum of edge weights is at least k. We prove that this problem is NP-complete even for diameter 4 bipartite graphs.*

Resumo. *Um emparelhamento M também é chamado de $\mathscr{P}$-emparelhamento se o subgrafo induzido pelos vértices incidentes por arestas de M satisfaz à propriedade $\mathscr{P}$. Encontrar emparelhamentos de cardinalidade máxima para muitas propriedades $\mathscr{P}$, tais como o subgrafo induzido ser 1-regular, desconexo ou acíclico, é NP-difícil. Por outro lado, um emparelhamento conexo de cardinalidade máxima, em que a propriedade é que o grafo seja conexo, pode ser obtido em tempo polinomial. Nesse artigo, consideramos o problema Emparelhamento Conexo Ponderado, onde, dado um grafo ponderado em arestas e um inteiro k, deseja-se obter um emparelhamento conexo cuja soma dos pesos das arestas seja pelo menos k. Provamos que esse problema é NP-completo mesmo para grafos bipartidos de diâmetro 4.*

1. Introdução

Um emparelhamento é um subconjunto $M \subseteq E$ das arestas de um grafo $G = (V, E)$ que não possuem vértices em comum. Um $\mathscr{P}$-emparelhamento é um emparelhamento tal que $G[M]$, o subgrafo induzido de G pelas extremidades das arestas de M, satisfaz propriedade $\mathscr{P}$. O problema de decidir se um grafo admite ou não um $\mathscr{P}$-emparelhamento de um tamanho dado tem sido investigado para algumas propriedades $\mathscr{P}$ ao longo dos últimos anos. Um dos casos mais conhecidos é da propriedade

*Trabalho parcialmente financiado por FAPEMIG, FAPERJ, Capes e CNPq

1-regular, o qual gera o problema EMPARELHAMENTO INDUZIDO. Em [Cameron 1989] ele foi mostrado ser NP-completo mesmo para grafos bipartidos. Outros problemas NP-difíceis incluem EMPARELHAMENTO ACÍCLICO [Goddard et al. 2005], EMPARELHAMENTO UNICAMENTE RESTRITO [Golumbic et al. 2001], e EMPARELHAMENTO DESCONEXO [Gomes et al. 2021]. Uma das poucas exceções de problemas de $\mathscr{P}$-emparelhamentos que podem ser resolvidos em tempo polinomial é o EMPARELHAMENTO CONEXO [Goddard et al. 2005], em que $G[M]$ é conexo. Em [Gomes et al. 2021], foi mostrado que é possível obter um emparelhamento conexo máximo em tempo linear, dado um emparelhamento máximo.

Recentemente, alguns conceitos de $\mathscr{P}$-emparelhamentos foram estendidos para problemas em grafos ponderados em arestas em que, além do fato do emparelhamento possuir a propriedade $\mathscr{P}$, a soma dos pesos das arestas do emparelhamento deve ser suficientemente grande. Foi mostrado que o EMPARELHAMENTO INDUZIDO PONDERADO MÁXIMO pode ser resolvido em tempo linear para grafos bipartidos convexos [Klemz and Rote 2022] e em tempo polinomial para grafos circular convexos e grafos tríade convexos bipartidos [Panda et al. 2020]. Em [Fürst and Rautenbach 2019], foi mostrado que o EMPARELHAMENTO ACÍCLICO PONDERADO MÁXIMO é tratável em tempo polinomial para grafos livres de P_4 ou de $2P_3$ grafos. Motivado por esses estudos, além da pertinência em P da versão não ponderada dos emparelhamentos conexos, estudamos tal problema em grafos ponderados por arestas, definido a seguir. Note que tal problema pertence a NP.

EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO
Entrada: Um grafo ponderado em arestas G e um inteiro k.
Pergunta: Existe emparelhamento M cuja soma dos pesos das arestas é pelo menos k tal que $G[M]$ é conexo?

Neste artigo, mostramos que o EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO é NP-completo mesmo para grafos bipartidos de diâmetro quatro. Em [Gomes et al. 2022], o problema é estudado em outras classes, assim como em duas versões: uma em que os pesos devem ser não negativos, e outra para pesos arbitrários. Em tal artigo, mostra-se que o problema é NP-completo para grafos bipartidos planares, grafos planares de grau limitado, starlike, enquanto pertence a P para grafos com grau máximo 2 ou com treewidth limitada. Quando os pesos são todos não negativos, o problema é polinomial para grafos cordais. Resumimos tais resultados na Tabela 1.

Preliminares. Seja G um grafo, $M \subseteq E(G)$, e $V(M)$ o conjunto de vértices adjacentes às arestas de M. Para $W \subseteq V(G)$, denotamos $G[W]$ pelo subgrafo de G induzido por W, e $G[M] = G[V(M)]$. M é definido como conexo se $G[M]$ é conexo. Seja uv uma aresta de G. Denotamos por $w(uv)$ o peso da aresta uv, e definimos $w(M) = \sum_{uv \in M} w(uv)$.

2. Grafos bipartitos de diâmetro quatro

Nesta Seção, provamos que EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO é NP-completo mesmo para grafos bipartidos de diâmetro 4 e cujos pesos das arestas são 0 ou 1. Para a redução, usamos o problema 3SAT, que é NP-completo [Garey and Johnson 1979]. Em tal problema, é dada a entrada (X, C), onde X é o conjunto de varáveis do conjunto C, que contém cláusulas com exatamente três literais cada. Como entrada do problema EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO, usamos $k = |X| + |C| + 1$ e o grafo $G_{X,C}$ obtido

Classe de grafos		Complexidade	
		Pesos ≥ 0	Pesos arbitrários
Geral		NP-completo (Teorema 1)	
Bipartido	diâmetro no máximo 4		
Cordal		P	NP-completo
Starlike			
Planar	bipartido	NP-completo	
	$\Delta \geq 3$	?	NP-completo
$\Delta < 3$		P	
Árvore		P	

Tabela 1. Complexidade do EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO.

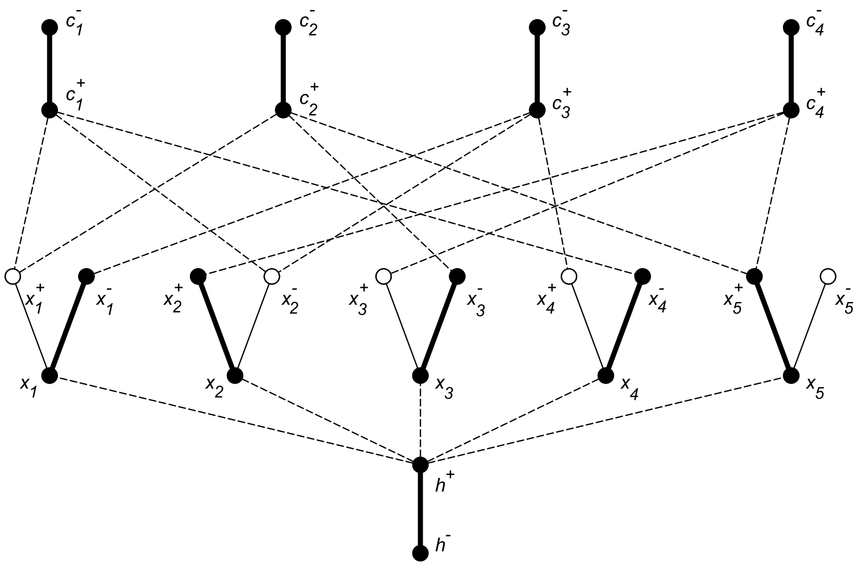

Figura 1. Exemplo de um grafo bipartido gerado a partir de uma entrada de 3SAT**.**

através da entrada (X, C) do 3SAT da forma descrita a seguir.

(I) Adicione dois vértices, h^+ e h^-, conectados por uma aresta de peso 1.

(II) Para cada variável $x_i \in X$, adicione uma cópia de P_3 cujas arestas têm peso 1, e rotule seus vértices terminais por x_i^+ e x_i^-. Além disso, conecte o outro vértice, rotulado x_i, a h^+ por uma aresta de peso 0.

(III) Para cada cláusula $c_i \in C$, adicione uma cópia de K_2 cujas arestas têm peso 1 e rotule seus vértices por c_i^+ e c_i^-. Ademais, para cada literal x_j de c_i, adicione uma aresta $c_i^+ x_j^-$ se x_j estiver negada, ou $c_i^+ x_j^+$ caso contrário.

Como exemplo, considere a entrada para o 3SAT definida por $B = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_5) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_5)$. O emparelhamento na Figura 1 corresponde à atribuição (F, T, F, F, T), nessa ordem, das variáveis $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de B.

Ademais, é possível adicionar a seguinte regra ao grafo $G_{X,C}$ de entrada de

EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO a fim de aprimorar nossa prova de NP-completude em termos do diâmetro do grafo.

(IV) Adicione um vértice u e arestas de peso 0 definidas por $\{c_i^+ u \mid c_i \in C\} \cup \{x_i^+ h^-, x_i^- h^- \mid x_i \in X\} \cup \{x_i x_j^+, x_i x_j^-, x_j x_i^+, x_j x_i^- \mid x_i, x_j \in X\}$.

Note que $G_{X,C}$ é de fato bipartido pois uma de suas bipartições pode ser definida como $\{x_i \mid i \in X\} \cup \{c_i^+ \mid i \in C\} \cup \{h^-\}$. Nessa redução, dada uma entrada (X, C) para o problema 3SAT, é possível obter em tempo linear um emparelhamento conexo M em $G_{X,C}$, $w(M) = k$, dada uma solução para C, e vice-versa. Portanto, concluímos nossa prova com o próximo teorema.

Teorema 1. EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO é NP-completo mesmo para grafos bipartidos de diâmetro quatro e pesos em $\{0, 1\}$.

3. Conclusão e trabalhos futuros

Possíveis trabalhos futuros incluem determinar a complexidade do EMPARELHAMENTO CONEXO PONDERADO para outras combinações de classes de grafos e pesos admitidos para as arestas. Em particular, gostaríamos de saber a complexidade do problema para pesos não negativos em grafos bipartidos de diâmetro 3 e grafos planares com grau máximo 2. Também é possível investigar outros problemas de $\mathscr{P}$-emparelhamentos em sua forma ponderada, como emparelhamentos desconexos ou unicamente restritos. A maioria das versões não ponderadas de $\mathscr{P}$-emparelhamentos são NP-difíceis, mas versões ponderadas podem ser tratáveis para classes relevantes.

Referências

Cameron, K. (1989). Induced matchings. *Discrete Applied Mathematics*, 24(1):97–102.

Fürst, M. and Rautenbach, D. (2019). On some hard and some tractable cases of the maximum acyclic matching problem. *Annals of Operations Research*, 279(1):291–300.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.

Goddard, W., Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., and Laskar, R. (2005). Generalized subgraph-restricted matchings in graphs. *Discrete Mathematics*, 293(1):129–138.

Golumbic, M. C., Hirst, T., and Lewenstein, M. (2001). Uniquely restricted matchings. *Algorithmica*, 31(2):139–154.

Gomes, G. C. M., Masquio, B. P., Pinto, P. E. D., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. L. (2021). Disconnected matchings. In Chen, C.-Y., Hon, W.-K., Hung, L.-J., and Lee, C.-W., editors, *Computing and Combinatorics*, pages 579–590, Cham. Springer International Publishing.

Gomes, G. C. M., Masquio, B. P., Pinto, P. E. D., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. L. (2022). Weighted connected matchings. https://doi.org/10.48550/arxiv.2202.04746.

Klemz, B. and Rote, G. (2022). Linear-time algorithms for maximum-weight induced matchings and minimum chain covers in convex bipartite graphs. *Algorithmica*.

Panda, B. S., Pandey, A., Chaudhary, J., Dane, P., and Kashyap, M. (2020). Maximum weight induced matching in some subclasses of bipartite graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 40(3):713–732.