A conformabilidade dos grafos subcúbicos conexos*

Luerbio Faria [1], Mauro Nigro[1], Diana Sasaki [1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

{luerbio, diana.sasaki}@ime.uerj.br, mauro.nigro@pos.ime.uerj.br

Abstract. *In this paper we prove that every connected subcubic graph is conformable, except if G is either complete K_4 or complete bipartite $K_{3,3}$. Our characterization leads to a polynomial-time algorithm.*

Resumo. *Neste artigo, provamos que todo grafo subcúbico conexo G é conformable, exceto se G é o completo K_4 ou o bipartido completo $K_{3,3}$. Nossa caracterização conduz a um algoritmo de tempo polinomial.*

1. Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Um grafo G é dito *subcúbico* se G possui grau no máximo 3. Uma *k-coloração de vértices* é uma atribuição de k cores aos vértices tal que vértices adjacentes tenham cores diferentes. A *deficiência* de G é a soma das diferenças entre o grau máximo $\Delta(G)$ de G e o grau de cada vértice v em G, isto é, $def(G) = \sum_{v \in V(G)}(\Delta(G) - d_G(v))$. Um grafo G é *conformable* se possui uma $(\Delta(G)+1)-$coloração de vértices φ em que o número de classes de cor (incluindo classes de cor vazias) com paridade diferente de $|V(G)|$ é no máximo $def(G)$. Nesse caso, chamamos φ de *coloração conformable*. As cores são denotadas por números e uma classe de cor $i \in \mathbb{N}$ por $\mathcal{C}_i$. Um grafo G é chamado de *não-conformable* se este não possui coloração conformable. Note que, em especial, para grafos regulares tem-se que $def(G) = 0$, e por consequência, para G ser conformable, toda classe de cor deve ter a mesma paridade da ordem do grafo regular G.

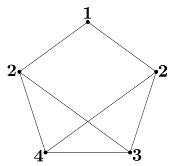


Figura 1. Um grafo subcúbico conformable com deficiência 1.

A Figura 1 apresenta um exemplo de um grafo conformable G, pois neste caso tem-se que a $def(G) = 1$ e a única classe de cor com paridade diferente da sua ordem (ímpar) é $\mathcal{C}_2$. Os completos de ordem par são exemplos de grafos não-conformable. De fato, estes são grafos regulares e possuem cada classe de cor unitária (ímpar). Portanto, toda classe de cor tem paridade diferente da ordem do grafo.

Uma *k-coloração total* de G é uma atribuição de k cores aos vértices e às arestas de G tal que vértices (arestas) adjacentes tenham cores diferentes e cada vértice tenha cor

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do CNPq (406036/2021-7, 313797/2020-0, 308654/2018-8) e da FAPERJ (E26/201.360/2021 JCNE, E-26/010.002674/2019 ARC, E26/202.902/2018 CNE)

diferente das suas arestas incidentes. O *número cromático total* $\chi''(G)$ é o menor k tal que G possui uma k-coloração total. Sabe-se que determiná-lo é um problema NP-difícil mesmo para grafos cúbicos bipartidos [Sánchez-Arroyo 1989]. A conhecida Conjectura da Coloração Total [Behzad 1965, Vizing 1968] afirma que $\Delta(G)+1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G)+2$. Um grafo G é dito *Tipo 1*, se $\chi''(G) = \Delta(G)+1$ e é dito *Tipo 2*, se $\chi''(G) = \Delta(G)+2$. Consequentemente, se esta conjectura é válida, é possível classificar os grafos de acordo com seu número cromático total como Tipo 1 ou Tipo 2.

O problema de conformabilidade foi introduzido em 1988 motivado pelo resultado de que todo grafo Tipo 1 é conformable [Chetwynd and Hilton 1988]. Logo, sabe-se que grafos não-conformable não são Tipo 1. Vale notar que esta propriedade não é uma equivalência, pois existem grafos Tipo 2 e conformable. Por exemplo, foram verificados por [Chetwynd and Hilton 1988] que os grafos ciclo C_n são conformable, exceto C_5. Porém, sabe-se que C_n é Tipo 1 quando n é múltiplo de 3; e Tipo 2 caso contrário [Yap 1996]. [Hamilton et al. 1999] apresentaram famílias infinitas de grafos regulares não-conformable. [Campos and de Mello 2007] estabeleceram uma propriedade necessária para conformabilidade e uma conjectura sobre a coloração total dos grafos potência de ciclo. [Zorzi et al. 2021] mostraram que esta propriedade é suficiente para caracterizar a conformabilidade dos grafos potência de ciclo. Atualmente, a conjectura sobre a coloração total dos grafos potência de ciclo estabelece que todo grafo potência de ciclo conformable que não é o ciclo nem o completo é Tipo 1.

[Hilton and Hind 2002] demonstraram que se G é não-conformable, então sua deficiência possui um limite superior dado pelo Teorema 1.

Teorema 1 ([Hilton and Hind 2002])**.** *Se G é um grafo não-conformable com $\Delta(G) \geq 2$, então*

$$def(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) - 3, & \textit{se } |V(G)| \textit{ é par e } \Delta(G) \textit{ é ímpar,} \\ \Delta(G) - 2, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Para os grafos subcúbicos, temos que considerar 2 casos em aberto: $def(G) = 0$, se $|V(G)|$ é par; e $def(G) = 1$, se $|V(G)|$ é ímpar. Observe que o caso $def(G) = 0$, se $|V(G)|$ é ímpar não é possível, pois implica em G ser cúbico e de ordem ímpar.

2. Resultado principal

A seguir, provamos que todo grafo subcúbico conexo é conformable, exceto K_4 ou $K_{3,3}$. A construção conduz a um algoritmo de tempo polinomial para produzir a coloração.

Lema 1 ([Hilton and Hind 2002])**.** *A deficiência de G é ímpar se, e somente se, $\Delta(G)$ e $|V(G)|$ são ambos ímpares.*

Teorema 2. *Todo grafo subcúbico conexo é conformable, exceto se este é o completo K_4 ou o bipartido completo $K_{3,3}$.*

Demonstração. Suponha que G seja o K_4 ou o $K_{3,3}$. Como $\Delta(G) = 3$ e G é cúbico, então $def(G) = 0$. Se G é o K_4, então G é não-conformable, pois toda 4-coloração de vértices tem todas as classes de cor unitárias e assim ímpares. Se G é o $K_{3,3}$, então G é não-conformable, pois em toda 4-coloração de vértices em G existem no mínimo 2 classes de cor ímpares. De fato, seja X e Y a bipartição do $K_{3,3}$. Note que se desejamos que cada classe de cor seja par em uma 4-coloração de vértices do $K_{3,3}$, então esta só poderá ter no máximo tamanho 2, pois as partes da bipartição têm tamanho 3. Assim, ao atribuir a mesma cor a dois vértices $a, b \in X$, existirá um único vértice em $X \setminus \{a, b\}$ que não poderá pertencer a uma classe de cor par, pois este é adjacente a todos os vértices em Y. Como este argumento é análogo à parte Y, temos que toda 4-coloração de vértices em G tem no mínimo 2 classes de cor ímpares.

Suponha que G não é o K_4 nem o $K_{3,3}$. Pelo Teorema de Brooks [Brooks 1941], existe uma 3-coloração de vértices φ, que pode ser obtida em tempo polinomial para G. Sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ as classes de cor de φ. A partir de agora, construiremos uma 4-coloração de vértices ϕ com as classes de cor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ de φ e uma nova classe de cor $\mathcal{C}_4$. Se $|V(G)|$ é par, então pelo Lema 1, a deficiência de G é par. Além disso, em qualquer 3-coloração de vértices ou cada classe de cor é par, ou existe uma única classe de cor par, pois $|V(G)|$ é par. Para o primeiro caso, a 4-coloração de vértices ϕ com $\mathcal{C}_4 = \emptyset$ é uma coloração conformable, pois todas as classes de cor são pares. Para o segundo caso, considere $\mathcal{C}_2$ a única classe de cor par em φ. Se $def(G) > 0$, então $def(G) \geq 2$ porque $def(G)$ é par. Assim ϕ é uma coloração conformable, pois o número de classes de cor com paridade diferente (classes de cor ímpares) de $|V(G)|$ é 2. Portanto, devemos considerar $def(G) = 0$, ou seja, G é cúbico. Considere a seguinte Afirmação 1.

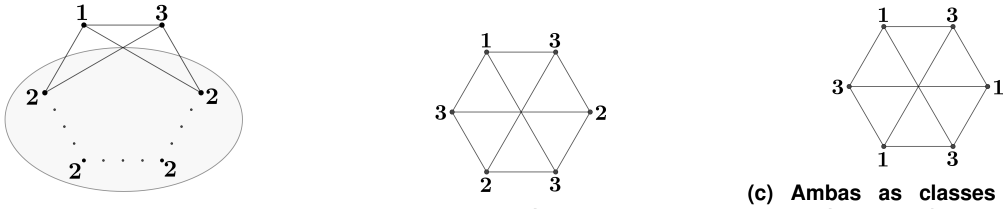
Afirmação 1. *Existe um vértice $v \in \mathcal{C}_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in \mathcal{C}_3$.*

Demonstração da Afirmação 1: Suponha, por absurdo, que não existe um vértice $v \in \mathcal{C}_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in \mathcal{C}_3$. Então, cada vértice $v \in \mathcal{C}_1$ é adjacente a cada vértice $u \in \mathcal{C}_3$. Como por hipótese G é cúbico, as classes de cor $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ têm no máximo tamanho 3. Se considerarmos que $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ são classes de cor unitárias, então existe um vértice $w \in \mathcal{C}_2$ tal que $d(w) < 3$. De fato, todo vértice $w \in \mathcal{C}_2$ terá no máximo duas adjacências, isto é, adjacência com os vértices com cor 1 e 3, pois todos os outros terão cor 2. Consequentemente, G não é cúbico, como ilustrado na Figura 2a. Se apenas uma classe de cor ímpar é unitária, assuma $|\mathcal{C}_1| = 1$, então teremos o vértice desta classe de cor adjacente a todos os três vértices $u \in \mathcal{C}_3$. Assim, existem no máximo dois vértices da classe de cor $\mathcal{C}_2$, resultando no grafo $K_{3,3}$ (Figura 2b). Analogamente, se ambas as classes de cor ímpar têm tamanho três, tem-se que G é o grafo $K_{3,3}$ (Figura 2c). Como em qualquer caso há uma contradição, tem-se que existe um vértice $v \in \mathcal{C}_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in \mathcal{C}_3$. $\square$ **(Afirmação 1)**

A partir da Afirmação 1, podemos atribuir a cor 4 aos vértices v e u, resultando numa 4-coloração de vértices ϕ, onde $\mathcal{C}_1 \setminus \{v\}$ e $\mathcal{C}_3 \setminus \{u\}$ têm tamanho par e $|\mathcal{C}_4| = 2$. Como, por hipótese, $\mathcal{C}_2$ é uma classe de cor par, resulta que toda classe de cor têm mesma paridade que $|V(G)|$, e então G é conformable.

Se $|V(G)|$ é ímpar, então pelo Lema 1 a deficiência de G é ímpar. Além disso, em qualquer 3-coloração de vértices ou cada classe de cor é ímpar, ou existe uma única classe de cor ímpar, pois $|V(G)|$ é ímpar. No primeiro caso, temos que a coloração ϕ com $\mathcal{C}_4 = \emptyset$ é conformable, pois o número de classes de cor com paridade diferente de $|V(G)|$ é 1 e a deficiência de G é ímpar, isto é, $def(G) \geq 1$. Para o segundo caso, note que existe ao menos uma classe de cor par não-vazia, pois se as duas classes de cor pares forem vazias o grafo G é um conjunto de vértices isolados. Seja $\mathcal{C}_2$ uma classe de cor par não-vazia e $\mathcal{C}_1$ a única classe de cor ímpar de φ. Tome $v \in \mathcal{C}_2$ e atribua ao vértice v a cor 4 em ϕ. Como $\mathcal{C}_2 \setminus \{v\}$ é ímpar e $|\mathcal{C}_4| = 1$, temos que apenas $\mathcal{C}_3$ difere da paridade de

$|V(G)|$, isto é, $\mathcal{C}_3$ é par. Como $def(G) \geq 1$, conclui-se que G é conformable. $\square$



(a) Ambas as classes de cor ímpares $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ são unitárias.

(b) Apenas uma única classe de cor unitária $\mathcal{C}_1$, resultando que G é o $K_{3,3}$.

(c) Ambas as classes de cor ímpares têm tamanho 3, resultando que G é o $K_{3,3}$.

Figura 2. Três casos que geram uma contradição para provar que existe um vértice v com cor 1 que não é adjacente a um vértice u com cor 3.

3. Conclusão

É interessante notar o contraste entre a complexidade computacional do problema de conformabilidade e o de coloração total para grafos cúbicos. Isto é, enquanto um é resolvido em tempo polinomial, o outro é um problema NP-difícil. Apesar de nossa caracterização definir um algoritmo polinomial para produzir uma coloração conformable em um grafo subcúbico conexo, não necessariamente esta coloração conformable se estende para uma $(\Delta(G) + 1)$-coloração total. Por fim, como a coloração conformable envolve contagem dos vértices, é relevante considerar ainda o problema para os grafos desconexos.

Referências

Behzad, M. (1965). *Graphs and and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University.

Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, pages 194–197.

Campos, C. N. and de Mello, C. P. (2007). A result on the total colouring of powers of cycles. *Discrete Appl. Math.*, pages 585–597.

Chetwynd, A. G. and Hilton, A. J. W. (1988). Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Congr. Numer.*, pages 195–216.

Hamilton, G. M., Hilton, A. J. W., and Hind, H. R. F. (1999). Totally critical even order graphs. *J. Comb. Theory Ser. B.*, pages 262–279.

Hilton, A. J. W. and Hind, H. R. (2002). Non-conformable subgraphs of non-conformable graphs. *Discrete Math.*, pages 203–224.

Sánchez-Arroyo, A. (1989). Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Math.*, pages 315–319.

Vizing, V. G. (1968). Some unsolved problems in graph theory. *Russ. Math. Surv.*, pages 125–141.

Yap, H. P. (1996). *Total colourings of graphs*. Springer.

Zorzi, A., Figueiredo, C., Machado, R., Zatesko, L., and Souza, U. (2021). Compositions, decompositions, and conformability for total coloring on power of cycle graphs. *Discrete Appl. Math.* https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.06.012.