Complexidade do Positional Knapsack Problem*

Lehilton L. C. Pedrosa[1], Mauro R. C. Silva[1], Rafael C. S. Schouery[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 1251 - Cidade Universitária, Campinas - SP, 13083-852

{lehilton,mauro.silva,rafael}@ic.unicamp.br

Abstract. *In this work, we present the* Positional Knapsack Problem *(PKP) and demonstrate that it is NP-hard. PKP is a variant of the* Knapsack Problem *(KP) in which the value of an item varies linearly according to the position in which it is added. This change in valuation adds several non-intuitive properties to the problem that do not hold for KP because PKP is not a generalization of KP. To demonstrate the NP-hardness, we reduce a variant of the* Partition Problem *to a carefully constructed instance of PKP in order to retrieve some properties normally expected for variants of KP.*

1. Introdução

O *Binary Knapsack Problem* (KP) é um dos principais problemas de empacotamento, cuja tarefa geral é empacotar itens em um recipiente de uma dada capacidade. Como nem sempre é possível adicionar todos os itens ao recipiente, é necessário escolher aqueles que maximizam o valor da solução dada pelos itens empacotados. Formalmente, a entrada do KP consiste de um recipiente de capacidade L e um conjunto $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ de itens, em que cada item i possui valor v_i e tamanho s_i. O objetivo é encontrar um subconjunto $I' \subseteq I$ que maximiza $\sum_{i \in I'} v_i$ e que não excede a capacidade da mochila, i.e., $\sum_{i \in I'} s_i \leq L$ [Kellerer et al. 2004]. Esse é um dos problemas mais conhecidos da Computação, possuindo muitas variantes e generalizações.

Problemas de empacotamento são recorrentes na disposição de propaganda de *sites*, como Google e Mercado Livre, em que anúncios são exibidos em um *banner* onde a probabilidade de cliques ou o valor recebido esperado para a exibição de uma propaganda varia com a sua proximidade do topo. O problema de organizar esses anúncios parece-se com o KP, com a diferença de que os valores dos itens aumentam se eles forem colocados mais acima. Para modelar esse problema, introduzimos o *Positional Knapsack Problem* (PKP) como uma variante do KP em que o ganho dos itens varia linearmente com a altura em que o item é colocado.

Formalmente, uma instância do PKP é composta de um recipiente de capacidade L e um conjunto de itens $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, em que cada item i possui valor v_i e tamanho s_i. O objetivo é encontrar um subconjunto $I' \subseteq I$ e uma sequência de empacotamento que maximiza o ganho e que não exceda a capacidade da mochila. O ganho de um item i ao ser colocado na mochila é dado por $P_i = (L - h_i)v_i$, em que h_i é a posição em que o item i foi adicionado e é dado pela soma dos tamanhos dos itens empacotados anteriormente. Veja um exemplo na Figura 1.

*Desenvolvido com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com os projetos #2015/11937-9, #2016/23552-7 e #2020/13162-2 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) com os projetos #425340/2016-3, #312186/2020-7 e #311039/2020-0.

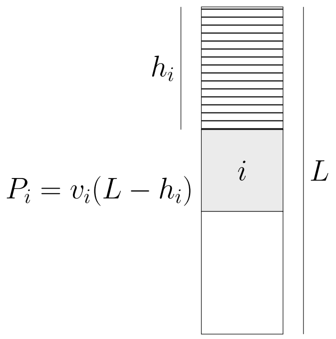

Figura 1. Ganho P_i de um item i de valor v_i adicionado na posição h_i em uma mochila de capacidade L.

Tanto o KP quanto o PKP apresentam os mesmos conjuntos de entradas e de soluções viáveis. Apesar dessa semelhança, note que os itens de uma solução ótima do KP não necessariamente formam uma solução ótima do PKP para a mesma entrada. Para ver um exemplo, considere uma instância com os itens descritos na Tabela 1 e uma mochila de capacidade $L = 40$.

	1	2	3	4	5
s_i	10	10	10	10	5
v_i	10	10	10	10	9

Tabela 1. Exemplo de itens.

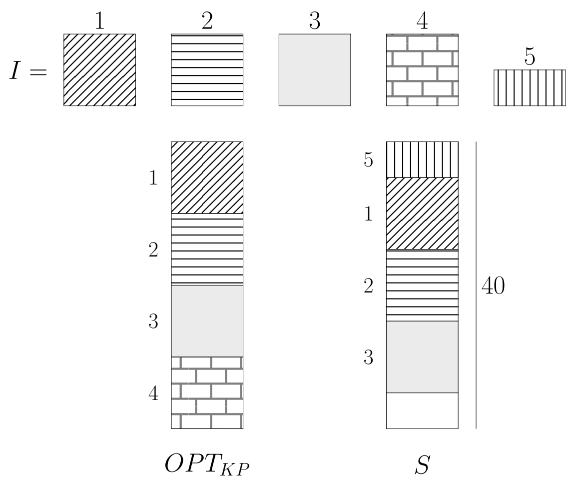

Figura 2. Exemplos de soluções para o KP e PKP considerando os itens da Tabela 1.

Uma solução ótima para uma instância do KP com esses itens pode ser dada por $OPT_{KP} = \{1, 2, 3, 4\}$. O valor da solução OPT_{KP} quando consideramos a função-objetivo do PKP é $40 \cdot 10 + 30 \cdot 10 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 1000$. É possível obter uma outra solução para o PKP de maior valor com os itens $S = \{5, 1, 2, 3\}$, nessa ordem. O valor dessa solução é $40 \cdot 9 + 35 \cdot 10 + 25 \cdot 10 + 15 \cdot 10 = 1110$. Note que S não é uma solução ótima para o KP, pois $\sum_{i \in S} v_i = 39$, enquanto $\sum_{i \in OPT_{KP}} v_i = 40$. Essas soluções são apresentadas na Figura 2.

Quando todos os itens possuem o mesmo valor, o PKP pode ser resolvido em tempo polinomial, escolhendo de forma gulosa os itens de menor tamanho enquanto couberem na mochila. De forma análoga, quando todos os itens possuem o mesmo tamanho, o problema também pode ser resolvido em tempo polinomial, escolhendo de forma gulosa os itens de maior valor enquanto couberem na mochila. Neste trabalho, estamos interessados na complexidade do caso geral do PKP.

O *Partition Problem* é um problema NP-completo clássico que consiste em decidir se é possível particionar um conjunto com valores inteiros positivos em duas partes com a mesma soma. O *Equal-Cardinality Partition* (ECP) é uma variante em que cada parte deve ter o mesmo número de elementos. Mais formalmente, dado um conjunto de índices $I = \{1, 2, \ldots, 2m\}$ e um valor inteiro positivo a_i associado a cada $i \in I$, desejamos decidir se existe um subconjunto $S \subseteq I$ tal que $|S| = m$ e $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \in I \setminus S} a_i = \sum_{i \in I} a_i/2$. O ECP é NP-difícil [Garey and Johnson 1979].

Diversas variantes de KP e problemas de particionamento são trivialmente NP-completos porque generalizam ou codificam instâncias do *Partition Problem* ou do *3-Partition Problem*. Mesmo problemas mais sofisticados podem ser demonstrados NP-difíceis diretamente desde que a função-objetivo seja uma função da soma dos valores dos itens empacotados [Kovalyov and Pesch 2010]. Para o PKP, no entanto, a função-objetivo depende da ordem dos itens empacotados e reduções conhecidas não são aplicáveis. Neste trabalho, demonstramos que o PKP é NP-difícil a partir de uma redução de ECP.

2. Redução

Dada uma entrada para o ECP, criamos uma entrada do PKP como descrito a seguir. Seja $A = \sum_{i \in I} a_i/2$ e $M = \max(A^2, 5A)$. Definimos a capacidade da mochila como $L = mM + A$ e, para cada inteiro $a_i \in I$, criamos um item associado com tamanho e valor iguais a $s_i = v_i = M + a_i$. A ideia da redução é aumentar o tamanho dos itens de forma que os tamanhos originais sejam pequenos comparados com os novos. Isso faz com que todos os itens tenham tamanhos muito parecidos e nos permite obter as propriedades demonstradas nos lemas a seguir.

Seja $S \subseteq I$ uma solução para o PKP considerando uma instância reduzida e suponha, s.p.g, que $S = \{1, 2, \ldots, r\}$. Também, defina $a(S) = \sum_{i \in S} a_i$ como a área dos itens de S e $a^2(S) = \sum_{i \in S} a_i^2$ como a área ao quadrado dos itens de S. O valor da solução S é dado por

$$
\begin{aligned}
f(S) &= \sum_{i=1}^{r} P_i = \sum_{i=1}^{r} s_i \left(L - \sum_{j=1}^{i-1} s_j \right) = L \sum_{i=1}^{r} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} s_i s_j + 2 \sum_{i=1}^{r} s_i^2 = L \sum_{i=1}^{r} s_i - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{r} s_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{r} s_i^2 \\
&= (mM + A) \left(rM + \sum_{i=1}^{r} a_i \right) - \frac{1}{2} \left(rM + \sum_{i=1}^{r} a_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{r} (M^2 + 2Ma_i + a_i^2) \\
&= \frac{1}{2} \left(rM(M - rM + 2mM + 2A) + 2((1 - r + m)M + A) \sum_{i=1}^{r} a_i - \left(\sum_{i=1}^{r} a_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{r} a_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(rM(M - rM + 2mM + 2A) + 2((1 - r + m)M + A) a(S) - a(S)^2 + a^2(S) \right).
\end{aligned}
$$

No Lema 1, mostramos que uma solução S possui no máximo m itens. Isso porque, pela definição dos tamanhos dos itens, não é possível adicionar mais do que m itens sem estourar a capacidade da mochila. E, no Lema 2, mostramos que uma solução ótima S^* para a redução possui pelo menos $m - 1$ itens. Com esses lemas podemos concluir que uma solução ótima possui m ou $m - 1$ itens. Esse fato será utilizado para demonstrar o Teorema 5.

Lema 1. *Se $S \subseteq I$ é uma solução para o PKP nessa redução, então $|S| \leq m$.*

Lema 2. *Se $S^* \subseteq I$ é uma solução ótima para o PKP nessa redução, então $|S^*| \geq m-1$.*

No Lema 3, demonstramos que uma solução com m itens possui valor maior que uma com $m - 1$ itens e, no Lema 4, demonstramos que, dadas duas soluções que possuem m itens, a de maior área possui maior valor. Esses resultados nos permitem concluir que uma solução ótima é a com maior preenchimento dentre as soluções com maior número de itens.

Lema 3. *Sejam $I' \subseteq I$ e $I'' \subseteq I$ soluções para o PKP nessa redução. Se $|I'| = m$ e $|I''| = m - 1$, então $f(I') > f(I'')$.*

Lema 4. *Sejam $I' \subseteq I$ e $I'' \subseteq I$ soluções para o PKP nessa redução. Se $|I'| = |I''| = m$ e $\sum_{i \in I'} s_i > \sum_{i \in I''} s_i$, então $f(I') > f(I'')$.*

Com esses lemas, é possível verificar que a instância ECP é "sim" se, e somente se, existe uma solução ótima da instância reduzida que tem m itens e preenche todo o recipiente. Isso implica o Teorema 5.

Teorema 5. *Se existe algoritmo polinomial para PKP, então ECP pode ser decidido em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja S^* um solução ótima para o PKP na redução. Se a resposta para o ECP é "sim", então existe uma solução S com $|S| = m$ e $\sum_{i \in S} s_i = L$. Como S é viável para a solução, os Lemas 3 e 4 implicam que $|S^*| = m$ e $\sum_{i \in S^*} s_i = L$. Na direção oposta, se $|S^*| = m$ e $\sum_{i \in S^*} s_i = L$, então temos que $a(S^*) = a(I \setminus S^*) = a(I)/2$. Daí, a resposta para ECP é "sim".

Portanto, se existe algoritmo polinomial para PKP, podemos decidir ECP verificando se $|S^*| = m$ e $\sum_{i \in S^*} s_i = L$. $\square$

Referências

[Garey and Johnson 1979] Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability*, volume 174. freeman San Francisco.

[Kellerer et al. 2004] Kellerer, H., Pferschy, U., and Pisinger, D. (2004). Introduction to np-completeness of knapsack problems. In *Knapsack Problems*, pages 483–493. Springer.

[Kovalyov and Pesch 2010] Kovalyov, M. Y. and Pesch, E. (2010). A generic approach to proving np-hardness of partition type problems. *Discrete applied mathematics*, 158(17):1908–1912.