Finura em Grafos Cordais*

Bernardo Amorim[1], **Vinicius F. dos Santos** [1]

[1]Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

bernardotamorim@gmail.com, viniciussantos@dcc.ufmg.br

Abstract. *The thinness of a graph is a measure of "how distant" the graph is from an interval graph, which are exactly the graphs with thinness 1. In this paper we introduce an analogous concept, the chordal thinness, presenting upper bounds and partial results concerning its computational complexity. Moreover, we determine the complexity of some classic problems in graphs of bounded chordal thinness. In particular, we show that* INDEPENDENT SET *remains NP-Hard even in graphs of chordal thinness 3. On the other hand, we show that it is possible to generalize the polinomiality result of* CLIQUE *from chordal graphs to graphs with chordal thinness 2.*

Resumo. *A finura de um grafo é uma medida do "quão distante" um grafo está de um grafo de intervalo, sendo estes exatamente os grafos de finura 1. Neste artigo introduzimos um conceito análogo, a finura cordal, apresentando limites superiores e resultados parciais a respeito de sua complexidade computacional. Além disso, também determinamos a complexidade de problemas clássicos em grafos de finura cordal limitada. Em particular, mostramos que* CONJUNTO INDEPENDENTE *permanece NP-Difícil mesmo em grafos de finura cordal 3. Por outro lado, mostramos que é possível generalizar o resultado de polinomialidade de* CLIQUE *em grafos cordais para grafos de finura cordal 2.*

1. Introdução

Grafos de intervalo constituem uma das classes de grafos mais estudadas na literatura. Por conta de sua aplicabilidade e relevância, diversas generalizações foram propostas, como o conceito de *finura* [Mannino 2007]. Um grafo $G = (V, E)$ é um grafo de intervalo se existe uma ordenação $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V tal que para toda tripla (r, s, t) com $r < s < t$ vale que, se $v_r v_t \in E$ então $v_t v_s \in E$. Esse conceito foi generalizado separando os vértices em partições. Desta forma um grafo é dito ser k-fino se e somente se existe uma ordenação $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V e uma coloração de V em k cores tal que, para toda tripla (r, s, t) com $r < s < t$ onde v_r e v_s pertencem à mesma classe vale que, se $v_r v_t \in E$ então $v_t v_s \in E$. É fácil notar que, os grafos 1-finos são exatamente os grafos de intervalo.

O conceito *finura* é bastante útil do ponto de vista algorítmico. Em [Mannino 2007] desenvolve um algoritmo de programação dinâmica para o problema do conjunto independente máximo parametrizado pela *finura*. Em [de Estrada 2020] diversos problemas foram resolvidos para grafos com *finura* limitada e em [Bonomo-Braberman and Brito 2021] foram caracterizados grafos k-*finos* usando padrões proibidos e modelos de interseção.

Dado o sucesso em generalizar grafos de intervalo, cuja definição pode ser feita em função de um padrão proibido em uma ordenação dos vértices, neste trabalho introduzimos um análogo do conceito *finura*, que generaliza grafos cordais.

*Trabalho parcialmente financiado por FAPEMIG, Capes e CNPq

2. Definições

Um grafo $G = (V, E)$ é dito ser cordal se este não possui ciclo induzido de comprimento maior que 3. Esta definição equivale, como demonstrado em [Rose and Tarjan 1978], a dizer que os grafos cordais são exatamente aqueles que possuem uma ordem de eliminação perfeita (OEP) $\sigma = v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ dos vértices. Uma OEP é tal que, ao se remover os os vértices de G na ordem indicada, a vizinhança do vértice removido no grafo restante é sempre uma clique. Generalizamos esta caracterização, introduzindo o conceito de *finura cordal*.

Definição 1. Um grafo G é dito ser k-cordal fino (k-CT) (também escrito como $G \in k$-CT) se existe ordenação σ e k-coloração dos vértices de G tais que, para todo vértice v e para toda cor c a vizinhança de v colorida com c à sua direita em σ é uma clique. Definimos CT(G), a *finura cordal* de G, como o mínimo k tal que $G \in k$-CT. Note que, de modo similar aos grafos de intervalo, os grafos 1-CT são exatamente os grafos cordais.

Dado um grafo G, chamamos uma ordenação σ que satisfaz a definição acima para uma k-coloração de uma k-ordem de eliminação perfeita (k-OEP). Analogamente, dado um grafo e uma ordenação σ, chamamos uma k-coloração que satisfaz a definição de uma k-coloração cordal.

3. Limites superiores

É fácil ver que todo grafo é k-CT, para algum k. Em particular, qualquer ordenação satisfaz a definição quando $k = |V(G)|$. Estabelecemos, nesta seção, alguns limites superiores para CT(G). Introduzimos, inicialmente, o conceito auxiliar de *conflito*.

Definição 2. É dito que o par de vértices u e v de G geram um conflito em uma ordem σ se existe vértice w que venha antes de u e v em σ e $wu, wv \in E(G)$ e $uv \notin E(G)$. Neste caso, dizemos que w é a testemunha do conflito. Note que um conflito é o único impedidor para vértices terem a mesma cor.

Teorema 3. *Se M é um emparelhamento maximal de G, então CT$(G) \leq |M|$.*

Demonstração. Seja G um grafo com um emparelhamento maximal $M = \{e_1, \ldots, e_{|M|}\}$ onde $e_i = w_{i,1}w_{i,2}$ e seja $V(G) - V(M) = \{v_1, \ldots, v_{|V(G)|-2|M|}\}$. Considere a ordenação $\sigma = v_1, \ldots, v_{|V(G)|-2|M|}, w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots, w_{|M|,1}, w_{|M|,2}$, onde os vértices que não saturados pelo emparelhamento M ficam no começo da ordem e os restantes ficam no fim da ordem. Colorimos a ordem da seguinte maneira: para cada aresta e_i de M, atribuímos a cor i a $w_{i,1}$ e a $w_{i,2}$ e atribuímos aos vértices restantes uma cor arbitrária $\{1, \ldots, |M|\}$. Note que:

- Não existe conflito entre os $2|M|$ últimos vértices de σ pois, por construção, os vértices de mesma cor formam cliques de tamanho 2.
- Não existe conflito contendo um dos $|V(G)| - 2|M|$ primeiros vértices, uma vez que eles formam um conjunto independente e, portanto, não haveria testemunha para tal conflito.

Dessa forma, como usamos $|M|$ cores, $CT(G) \leq |M|$. □

O Teorema 3 implica o seguinte corolário.

Corolário 4. *CT$(G) \leq \frac{|V(G)|}{2}$.*

4. Complexidade de reconhecimento

O problema de reconhecimento para uma classe de grafo $\mathcal{G}$ consiste em, dado um grafo G, decidir ser $G \in \mathcal{G}$. A complexidade do reconhecimento de grafos k-finos é um problema em aberto. Entretanto, alguns resultados parciais são conhecidos. Dada uma ordenação σ, decidir a existência de uma coloração consistente com σ pode ser feito em tempo polinomial. Por outro lado, dada uma coloração, decidir ser existe um ordenação consistente é um problema NP-difícil [de Estrada 2020].

Apesar das similaridades, os resultados abaixo nos revelam que a finura cordal tem um comportamento oposto: encontrar uma ordenação consistente com uma coloração pode ser feito em tempo polinomial, enquanto que o problema oposto é NP-difícil.

Teorema 5. *Dada uma ordem de vértices σ de um grafo e um inteiro k, saber se existe uma k-coloração cordal é NP-Difícil.*

Teorema 6. *Dada uma k-coloração cordal c dos vértices de G, existe algoritmo polinomial para encontrar uma ordenação cordal válida ou mostrar que esta não existe.*

5. Finura cordal em algumas classes de grafos

Nesta seção abordamos a finura cordal de grafos de duas classes diferentes. O primeiro resultado nos diz que se G é um grafo de grau máximo $\Delta(G) \leq 3$ e não é cúbico, então G tem finura cordal no máximo 3.

Teorema 7. *Para todo grafo G tal que $\delta(G) < 3$ e $\Delta(G) \leq 3$ vale que $G \in 3$-CT.*

A segunda classe considerada é a classe dos cografos. Antes de fornecermos a definição da classe, é necessária a definição do conceito de junção de grafos. A junção de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo obtido a partir da união de G_1 e G_2 e da adição de todas as arestas possíveis entre $V(G_1)$ e $V(G_2)$. Cografos podem ser definidos recursivamente da seguinte maneira: um grafo com um único vértice é um cografo, a união disjunta de dois cografos é um cografo, a junção de um cografo é um cografo e nada mais é um cografo. A propriedade a seguir, que relaciona a finura cordal de um grafo com colorações próprias de seu complemento, será utilizada na determinação da finura cordal de cografos.

Lema 8. *Se G é um grafo e c é uma k-coloração própria de $\overline{G}$, então qualquer ordenação de $V(G)$ é uma k-OEP em relação a c.*

Demonstração. Note que cada cor uma coloração própria em $\overline{G}$ induz uma clique em G, desta forma, como cada cor em G é uma clique, não existem conflitos independentemente da ordem. $\square$

Lema 9. *Seja G um cografo tal que G é a junção de cografos G_1 e G_2, e seja k um inteiro. Então G é k-CT se e somente se G_i é k-CT e $\overline{G_j}$ é k-colorível, para $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja G um cografo k-CT com n vértices e seja $C : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ uma coloração cordal de $V(G)$ e $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ uma k-OEP compatível com c. Suponha também que G é a junção de cografos G_1 e G_2. Sem perda de generalidade, $\sigma_1 \in G_1$.

Seja σ_{G_1} a subsequência de σ restrita a $V(G_1)$. Note que σ_{G_1} é uma k-OEP de G para a coloração c. Note também que c é uma coloração própria de $\overline{G_2}$.

($\Leftarrow$) Suponha, *s.p.g.* que G_1 é k-CT e $\overline{G_2}$ é k-colorível. Sejam σ_1 uma ordenação compatível com a k-coloração de G_1 e σ_2 uma k-OEP com a k-coloração cordal de G_2. É fácil ver, usando o Lema 8 que a concatenação $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ é uma k-OEP de G. □

Lema 10. *Seja G um cografo tal que G é a união de cografos G_1 e G_2, e seja k um inteiro. Então G é k-CT se e somente se G_1 e G_2 são k-CT.*

Teorema 11. *É possível determinar se um cografo é k-CT em tempo polinomial.*

Demonstração. Note que o complemento de um cografo é também um cografo, e pode-se determinar se um cografo é k-colorível em tempo polinomial. Além disso, todo cografo com mais de um vértice é a união ou a junção de dois cografos. Então, dado um cografo G, basta utilizar os lemas anteriores verificando se G_1 e G_2 satisfazem as propriedades necessárias para que G seja k-CT. □

6. Complexidade de problemas clássicos em grafos de finura cordal limitada

Quando consideramos a complexidade computacional problemas clássicos de grafos, em algumas situações é possível generalizar alguns resultados positivos de grafos cordais, como no teorema a seguir.

Teorema 12. *Existe algoritmo polinomial para* CLIQUE MÁXIMA *quando o $G \in 2$-CT.*

Por outro lado, diversos problemas rapidamente se tornam difíceis em grafos k-CT, mesmo para valores de k constantes, que seguem do Teorema 7.

Teorema 13. CONJUNTO INDEPENDENTE, CICLO HAMILTONIANO *e* CAMINHO HAMILTONIANO *são NP-Difíceis para grafos 3-CT.*

7. Conclusão e trabalhos futuros

O conceito de finura cordal traz muitas perguntas naturais. O principal problema em aberto diz respeito ao reconhecimento de grafos k-CT. Além disso, é natural tentar determinar quais problemas tratáveis para grafos cordais continuam tratáveis para grafos k-CT, seja para valores pequenos de k ou mesmo para casos gerais. Respondemos negativamente esta pergunta para alguns problemas clássicos, que permanecem NP-difíceis mesmo para grafos 3-CT. Uma pergunta natural é a complexidade destes problemas em grafos 2-CT.

Referências

Bonomo-Braberman, F. and Brito, G. A. (2021). Intersection models and forbidden pattern characterizations for 2-thin and proper 2-thin graphs.

de Estrada, D. (2020). On the thinness and proper thinness of a graph. *Discrete Applied Mathematics 261*.

Mannino, C. (2007). The stable set problem and the thinness of a graph. *Operations Research Letters*.

Rose, D. J. and Tarjan, R. E. (1978). Algorithmic aspects of vertex elimination on directed graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34(1):176–197.