Galáxias como backbone em colorações backbone*

Julio Araujo[1], **Alexandre Cezar**[1], **Rayane Castro**[1]

[1]ParGO, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Brasil

julio@mat.ufc.br e {alexcezar,rayanegomes}@alu.ufc.br

Abstract. *Given an integer $q \geq 2$, a simple graph G and a spanning subgraph H, the (circular) q-backbone chromatic number, $\mathrm{BBC}_q(G,H)$ (resp. $\mathrm{CBC}_q(G,H)$) is the smallest integer k such that G has a proper k-coloring f satisfying that if $uv \in E(H)$, then $|f(u)-f(v)| \geq q$ (resp. $k-q \geq |f(u)-f(v)| \geq q$). In this work, we show that for a given planar graph G and a matching M, it holds that $\mathrm{CBC}_q(G,M) \leq q+5$, for $q \in \{2,3\}$, without using the Four Color Theorem. Furthermore, we fix a lemma presented by Havet et al.* [8].

Resumo. *Dados um inteiro $q \geq 2$, um grafo simples G e um subgrafo gerador H, o número cromático (circular) q-backbone, denotado por $\mathrm{BBC}_q(G,H)$ (resp. $\mathrm{CBC}_q(G,H)$), é o menor inteiro k tal que G tem uma k-coloração própria f satisfazendo que se $uv \in E(H)$, então $|f(u)-f(v)| \geq q$ (resp. $k-q \geq |f(u)-f(v)| \geq q$). Neste trabalho, mostramos que para grafo G planar e M um emparelhamento, então $\mathrm{CBC}_q(G,M) \leq q+5$, para $q \in \{2,3\}$, sem usar o Teorema das Quatro Cores. Além disso, nós corrigimos um lema apresentado em Havet et al.* [8].

1. Introdução

Noções básicas da Teoria de Grafos e Complexidade podem ser encontradas em [6, 9]. Dados um grafo $G = (V, E(G))$ e um subgrafo gerador $H = (V, E(H))$ de G, que será chamado de *backbone* de G, denotamos por (G,H) um *par de grafos*. Uma *k-coloração (circular) q-backbone* de (G,H) é uma função $f : V \to \{1,\dots,k\}$ com f sendo uma coloração própria, ou seja, $f(u) \neq f(v)$ sempre que $uv \in E(G)$, e, além disso, $|f(u)-f(v)| \geq q$ (resp. $q \leq |f(u)-f(v)| \leq k-q$) para todo $uv \in E(H)$. O *número cromático (circular) q-backbone*, denotado por $\mathrm{BBC}_q(G,H)$ (resp. $\mathrm{CBC}_q(G,H)$), é o menor inteiro k tal que existe uma k-coloração (circular) q-backbone de (G,H). Caso $E(H) = \emptyset$, note que $\mathrm{BBC}_q(G,H) = CBC_q(G,H) = \chi(G)$. Logo, assumimos que $E(H) \neq \emptyset$. Em particular, note que, portanto, $\mathrm{BBC}_q(G,H) \geq q+1$ e $\mathrm{CBC}_q(G,H) \geq 2q$.

Colorações Backbone foram introduzidas por Broersma et al. [2] como uma das modelagens de problemas de Atribuição de Frequências [7]. Em [5], os autores apresentam problemas que até então ainda não possuem resposta na literatura, mas há resultados parciais. Em particular, para G planar, eles conjecturam que $\mathrm{BBC}_2(G,T) \leq 6$, para árvore geradora T e que $\mathrm{BBC}_2(G,M) \leq 5$, para emparelhamento perfeito M. Veja que $\mathrm{CBC}_2(G,H) \leq \mathrm{BBC}_2(G,H)+1$. Logo, se as conjecturas anteriores forem verdadeiras, elas implicarão que $\mathrm{CBC}_2(G,T) \leq 7$ e $\mathrm{CBC}_2(G,M) \leq 6$. Curiosamente, o limitante $\mathrm{CBC}_2(G,M) \leq 6$ foi demonstrado de modo independente, usando o Teorema das Quatro Cores, no trabalho que define a versão circular [4]. Havet et al. [8] observam que a

*Financiado por CNPq 437841/2018-9 e Funcap PNE-0112-00061.01.00/16 e 186-155.01.00/21.

demonstração deste limitante pode ser generalizada, ainda usando o Teorema das Quatro Cores, para deduzir-se que $\mathrm{CBC}_q(G, M) \leq 2q + 2$, $q \geq 2$. Em particular, note que $\mathrm{CBC}_3(G, M) \leq 8$. Nossa primeira contribuição é demonstrar, sem usar o Teorema das Quatro Cores, que $\mathrm{CBC}_2(G, M) \leq 7$ e que $\mathrm{CBC}_3(G, M) \leq 8$.

Nesse contexto, destaca-se ainda que Araújo et al. [1] melhoram o limitante $\mathrm{CBC}_q(G, M) \leq 2q + 2$, mostrando que $\mathrm{CBC}_3(G, M) \leq 7$ quando G não possui triângulos compartilhando uma aresta; e que $\mathrm{CBC}_q(G, M) \leq 2q$, para $q \geq 4$.

Uma *estrela* é uma árvore em que um vértice é adjacente a todos os demais vértices. Uma *galáxia* é uma floresta tal que cada componente conexa é uma estrela.

Teorema 1 ([8]). *Para $q \geq 3$, o seguinte problema é* NP*-completo.*
Entrada: Um grafo planar G e uma galáxia F em G com grau de no máximo 3.
Pergunta: $BBC_q(G, F) \leq q + 3$?

Nossa segunda contribuição é a correção na demonstração de um dos lemas utilizados para provar o Teorema 1.

2. Limitantes para coloração circular backbone

Nesta seção, apresentamos, como principal resultado, que para $q \in \{2, 3\}$, grafo G planar e M emparelhamento de G, então $\mathrm{CBC}_q(G, M) \leq q + 5$. Este limitante é corolário do Teorema 3, apresentado ao final desta seção.

Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ classes de grafos hereditárias e cujos graus médios, denotados $\mathrm{Ad}(G)$ com $\mathrm{Ad}(G) = \dfrac{2|E(G)|}{|V(G)|}$, são limitados e q um inteiro tal que $q \geq 2$. Definimos também $\chi_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}$ como o menor valor inteiro de k estritamente maior que:

$$\begin{cases} \mathrm{Ad}(G) + 2(q-1)\,\mathrm{Ad}(H)\left(1 - \dfrac{1}{\Delta(H)(\Delta(H)+1)}\right), & \text{se } |E(H)| > 0; \\ \mathrm{Ad}(G), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

para quaisquer que sejam $G \in \mathcal{G}$ e $H \in \mathcal{H}$.

Se (G, H) é um par de grafos, considere (G', H') um *subpar* de (G, H) se $G' \subseteq G$ e $H' \subseteq H$. Denotamos o *grau total* de um vértice $v \in V(G)$ com respeito a (G', H'), $d^t_{(G',H')}(v)$, em que $d^t_{(G',H')}(v) = d_{G'}(v) + 2(q-1)d_{H'}(v)$. O índice é omitindo se o subpar for o próprio par (G, H), isto é, $d^t(v) = d^t_{(G',H')}(v)$. Se $v \notin V(G')$, tome f' uma k-coloração circular q-backbone de (G', H'). Denotamos o conjunto de *cores disponíveis* para v, $\mathrm{Av}_{f'}(v)$, como o conjunto de cores $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ tais que, para todo $u \in N_{G'}(v)$, $\ell \neq f'(u)$ e para todo $w \in N_{H'}(v)$, $q \leq |\ell - f'(w)| \leq k - q$. Podemos interpretar $\mathrm{Av}_{f'}(v)$ como o conjunto das cores que podem ser atribuídas a v e a extensão da coloração f' a v ainda ser própria. Denotamos também $\mathrm{av}_{f'}(v) = |\mathrm{Av}_{f'}(v)|$. Definimos também (G, H) um *par* (k, q)-minimal se não existe uma k-coloração circular q-backbone de (G, H), mas existe tal coloração de todo subpar (G', H') com $G' \subset G$ ou $H' \subset H$, neste caso (G', H') é chamado subpar próprio de (G, H).

Lema 2. *Sejam $q \geq 2$, $k \geq 2q$ inteiros, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ classes de grafos hereditárias e cujos graus médios são limitados e (G, H) um par (k, q)-minimal onde $G \in \mathcal{G}$ e $H \in \mathcal{H}$. São válidas:*

1. *$d^t(v) \geq k$, para todo $v \in V(G)$.*

2. $d^t(u) + d^t(v) \geq 2(k + q - 1)$, *para toda aresta* $uv \in E(H)$.

Demonstramos o Lema 2 por contradição. No primeiro caso, por exemplo, tomamos o subpar (G', H') de (G, H) obtido da remoção de um vértice v tal que $d^t(v) < k$. Pela minimalidade, temos uma k-coloração q-backbone f' de (G', H'). Mostramos que então podemos estender tal coloração parcial f' de (G', H') para (G, H), contradizendo a hipótese que (G, H) não admite uma k-coloração q-backbone. A segunda desigualdade do Lema 2 requer uma análise mais elaborada, mas segue de modo análogo. Com auxílio do Lema 2, calculamos a soma de graus totais nas arestas de um contraexemplo minimal do Teorema 3 para obter o limitante para $\mathrm{CBC}_q(G, H)$ desejado.

Teorema 3. *Sejam q um inteiro tal que $q \geq 2$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ classes de grafos hereditárias e cujos graus médios são limitados e (G, H) um par tal que $G \in \mathcal{G}$ e $H \in \mathcal{H}$. Então,* $\mathrm{CBC}_q(G, H) \leq \max\{\chi_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}, 2q\}$.

O Corolário 4 é obtido do Teorema 3 quando consideramos G pertencente à classe dos grafos planares e $H = M$ pertencente à classe cujas arestas formam um emparelhamento. Ambas são classes hereditárias e seus graus médios são limitados, uma vez que $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ para planares e $\Delta(M) = 1$ para emparelhamentos não vazios.

Corolário 4. *Se G é um grafo planar e M é um emparelhamento, então* $\mathrm{CBC}_q(G, M) \leq q + 5$ *quando* $q \in \{2, 3\}$.

3. Correção da demonstração do lema

Para provar o Teorema 1, são usados dois lemas, que também são apresentados e provados em Havet et al. [8]. Antes de enunciar os lemas, precisamos da definição de dois tipos de grafos que são usados na demonstração: paraquedas e pipa. Um *paraquedas* em v é um grafo completo com 4 vértices, onde as arestas que são incidentes ao vértice v estão no backbone. Chamamos de *pipa* um grafo de estrutura demonstrada na Figura 1, em que os vértices t e u são chamados, respectivamente, de *ponta* e *borda* da pipa.

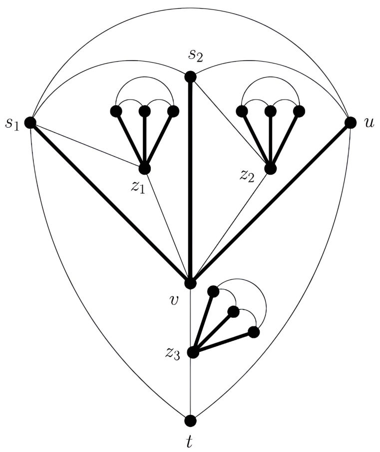

Figura 1. A pipa.

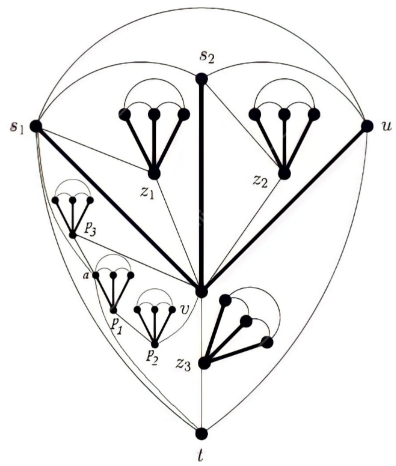

Figura 2. A pipa corrigida.

Lema 5. *Para $q \geq 2$, em uma $(q+3)$-coloração q-backbone do paraquedas em v, o vértice v é colorido com as cores em $\{1, q+3\}$.*

Lema 6. *Se f é uma $(q+3)$-coloração q-backbone de uma pipa tal que $f(t) \in \{1, 2, 3, q+1, q+2, q+3\}$, então uma das situações acontece: $f(t) \in \{1, 2, 3\}$ e $f(u) = q+3$, ou $f(t) \in \{q+1, q+2, q+3\}$ e $f(u) = 1$.*

A demonstração feita para o Lema 5 é uma rápida análise de casos, supondo, por contradição, que a cor de v difere destas duas. Já no Lema 6, a prova seguiu-se a partir da análise de dois casos. Voltando para a Figura 1, observe que temos paraquedas nos vértices v, z_1, z_2 e z_3, logo, pelo Lema 5, esses vértices têm cor em $\{1, q+3\}$. Ao analisar o primeiro caso, em que $f(v) = 1$, temos $f(z_1) = f(z_2) = f(z_3) = q+3$, pois v é adjacente a todos esses vértices em G. Analisando as adjacências dos vértices, tanto em G como no backbone, é deduzido que $\{f(s_1), f(s_2)\} = \{q+1, q+2\}$ e $f(u) = q+3$. Em [8], na finalização do argumento, temos que com essa atribuição de cores, poderíamos concluir que $f(t) = \{1, 2, 3\}$. O segundo caso é análogo, supondo que $f(v) = q+3$, de forma simétrica, seria deduzido que $f(u) = 1$ e $f(t) = \{q+1, q+2, q+3\}$.

Porém, ao estudar detalhadamente a demonstração, como o vértice t, pela hipótese do lema, só pode ser colorido com as cores do conjunto $\{1, 2, 3, q+1, q+2, q+3\}$, logo, no primeiro caso (onde $f(v) = 1$), temos a restrição da cor $q+3$ para t, pois u é adjacente a t em G. A outra cor que é proibida para t é a cor atribuída ao vértice s_1, que nesse caso é $q+1$ ou $q+2$. Portanto, o vértice t pode ser colorido em $\{1, 2, 3, q+1, q+2\} \setminus \{f(s_1)\}$. Analogamente para o segundo caso. Para corrigir o problema e prosseguir na demonstração do Teorema 1, podemos adicionar três paraquedas que serão chamados de p_1, p_2 e p_3. A nova estrutura da pipa é apresentada na Figura 2.

4. Trabalhos futuros

Com a apresentação do limitante para o problema de coloração circular com emparelhamento como backbone a partir do Teorema 3, uma abordagem futura é tentar utilizar o resultado para outras classes de grafos do backbone. Além de, se possível, melhorar o limitante do Teorema 3 para alcançar novos resultados. Na classe de grafos cordais, o seguinte problema em aberto é de interesse para estudos futuros.

Problema 7 ([3])**.** *Sejam G um grafo cordal e T uma árvore geradora de G. Existe constante $c > 0$ tal que $BBC_2(G, T) \leq \chi(G) + c$?*

Referências

[1] C. Araujo, J. Araujo, A. Silva, and A. Cezar, *Backbone coloring of graphs with galaxy backbones*, Electronic Notes in Theoretical Computer **346** (2019), 43–64.

[2] H. Broersma, F. V. Fomin, P. A. Golovach, and G. J. Woeginger, *Backbone colorings for networks*, International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 2003, pp. 131–142.

[3] H. Broersma, F. V. Fomin, G. J. Woeginger, and P. A. Golovach, *Backbone colorings for graphs: tree and path backbones*, Journal of Graph Theory **55** (2007), no. 2, 137–152.

[4] H. Broersma, J. Fujisawa, L. Marchal, D. Paulusma, A. N. M. Salman, and K. Yoshimoto, *λ-backbone colorings along pairwise disjoint stars and matchings*, Discrete Mathematics **309** (2009), no. 18, 5596–5609. Combinatorics 2006, A Meeting in Celebration of Pavol Hell's 60th Birthday (May 1–5, 2006).

[5] H. Broersma, J. Fujisawa, and K. Yoshimoto, *Backbone colorings along perfect matchings*, Memorandum, University of Twente, Department of Applied Mathematics, 2003 (English).

[6] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness (series of books in the mathematical sciences)*, First Edition, W. H. Freeman, 1979.

[7] W. K. Hale, *Frequency assignment: Theory and applications*, Proceedings of the IEEE **68** (1980), no. 12, 1497–1514.

[8] F. Havet, A. D. King, M. Liedloff, and I. Todinca, *(circular) backbone colouring: Forest backbones in planar graphs*, Discrete Applied Mathematics **169** (2014), 119–134.

[9] D. B. West, *Introduction to graph theory*, 2nd ed., Prentice Hall, 2001.