

Número $(p,1)$ -total de *near-ladders* e Petersen generalizados

M. M. Omai¹, C. N. Campos¹, A. G. Luiz²

¹Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, Brasil

²Universidade Federal do Ceará (UFC), Quixadá, Brasil

mayara.omai@ic.unicamp.br, cnc@unicamp.br, gomes.atilio@ufc.br

Resumo. Uma k -rotulação $(p,1)$ -total de um grafo simples G é uma função $\pi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$ em que: $|\pi(uv) - \pi(u)| \geq p$ e $|\pi(uv) - \pi(v)| \geq p$ para $uv \in E(G)$; $\pi(uv) \neq \pi(vw)$ para $uv, vw \in E(G)$; e $\pi(u) \neq \pi(v)$ para $uv \in E(G)$. O menor inteiro k para o qual G admite uma k -rotulação $(p,1)$ -total é denotado por $\lambda_p^t(G)$. Neste trabalho, provamos que: $\lambda_p^t(G) = p + 4$, $p \geq 3$, para os grafos *near-ladder* não bipartidos e para os grafos de Petersen generalizados $P(\ell, 2)$, $\ell \geq 6$; e $\lambda_2^t(G) = 5$ para $P(\ell, 2)$, $\ell \geq 6$.

Abstract. A k - $(p,1)$ -total labelling of a simple graph G is a function $\pi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$ such that: $|\pi(uv) - \pi(u)| \geq p$ and $|\pi(uv) - \pi(v)| \geq p$ for $uv \in E(G)$; $\pi(uv) \neq \pi(vw)$ for $uv, vw \in E(G)$; and $\pi(u) \neq \pi(v)$ for $uv \in E(G)$. The least integer k for which G admits a k - $(p,1)$ -total labelling is denoted $\lambda_p^t(G)$. In this work, we show that: $\lambda_p^t(G) = p + 4$, $p \geq 3$, for non-bipartite *near-ladder* graphs and generalized Petersen graphs $P(\ell, 2)$, $\ell \geq 6$; and $\lambda_2^t(G) = 5$ for graphs $P(\ell, 2)$, $\ell \geq 6$.

1. Introdução

Sejam $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples, $d(v)$ o grau de um vértice $v \in V(G)$ e Δ o grau máximo de G . Uma k -rotulação $(p,1)$ -total de G é uma função $\pi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$ com as seguintes propriedades: $|\pi(uv) - \pi(u)| \geq p$ e $|\pi(uv) - \pi(v)| \geq p$ para $uv \in E(G)$; $\pi(uv) \neq \pi(vw)$ para $uv, vw \in E(G)$; e $\pi(u) \neq \pi(v)$ para $uv \in E(G)$. O menor inteiro k para o qual G admite uma k -rotulação $(p,1)$ -total é denominado número $(p,1)$ -total e denotado por $\lambda_p^t(G)$. Essa rotulação foi introduzida por Havet e Yu (2008) e, em seu trabalho original, eles se aprofundaram no caso $p = 2$, estabelecendo limitantes e determinando $\lambda_2^t(G)$ para os grafos completos, ciclos e caminhos. Além disso, provaram que $\lambda_2^t(G) \leq 6$ para grafos com $\Delta \leq 3$ e que $\lambda_2^t(K_4) = 6$. Desses resultados, conjecturaram que se $G \not\cong K_4$ é um grafo conexo com $\Delta \leq 3$, então $\lambda_2^t(G) \leq 5$.

Essa conjectura foi verificada para $\Delta \in \{1, 2\}$ (Havet e Yu, 2008) e para algumas classes de grafos com $\Delta = 3$ tais como: bipartidos regulares (Havet e Thomassé, 2009), grafos cujo conjunto de vértices é coberto por um conjunto independente de triângulos (Sethuraman e Velankanni, 2015) e grafos *near-ladder* (Omai et al., 2021). Para p arbitrário, $\lambda_p^t(G)$ está determinado para algumas classes de grafos, dentre elas: ciclos (Havet e Yu, 2008), *Flower Snarks* (Chunling et al., 2010) e grafos *Sierpiński-Like* (Deng et al., 2019). Boa parte dos resultados conhecidos abordam limitantes para $\lambda_p^t(G)$ restritos a classes de grafos (Montassier e Raspaud, 2006; Sun e Wu, 2017). No caso dos regulares, sabe-se que $\lambda_p^t(G) \geq \Delta + p$, $p \geq 2$ (Havet e Yu, 2008). Se, adicionalmente, G for bipartido, $\lambda_p^t(G) = \Delta + p$ quando $p \geq \Delta \geq 3$ (caso dos *near-ladder*

bipartidos); e $\lambda_p^t(G) \geq \Delta + p + 1$ se G não for bipartido (Chunling et al., 2010). Neste trabalho, determinamos o número $(p, 1)$ -total dos grafos *near-ladder* não bipartidos para $p \geq 3$ e dos grafos de Petersen generalizados $P(\ell, 2)$, $\ell \geq 6$ e $p \geq 2$.

2. Resultados

Seja $n = 2\ell$, $\ell \geq 1$ e inteiro. Um grafo *ladder* L_n possui $V(L_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{\ell-1}, v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}\}$ e $E(L_n) = E_h \cup E_v$, em que $E_h = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : 0 \leq i < \ell - 1\}$ e $E_v = \{u_i v_i : 0 \leq i \leq \ell - 1\}$. Um *near-ladder* é construído a partir do L_n , $n > 4$, adicionando-se ou duas *arestas laminares*, $v_0 v_{\ell-1}$ e $u_0 u_{\ell-1}$ (denotado PL_n e também denominado *Prisma*), ou duas *arestas cruzadas*, $u_0 v_{\ell-1}$ e $v_0 u_{\ell-1}$ (denotado ML_n e também denominado *Möbius Ladder*).

Teorema 1. *Se G é um grafo near-ladder não bipartido, então $\lambda_p^t(G) = p + 4$, $p \geq 3$.*

Esboço de demonstração. Neste caso, $G \cong PL_n$ com $n \equiv 2 \pmod{4}$ ou $G \cong ML_n$ com $n \equiv 0 \pmod{4}$ (Omai et al., 2021). Como $\lambda_p^t(G) \geq p + 4$, para provar que $\lambda_p^t(G) = p + 4$ é suficiente construir uma $(p + 4)$ -rotulação $(p, 1)$ -total π para G .

Considere dois subgrafos aresta-disjuntos de G : $B_{n-4} \cong L_{n-4}$, com $V(L_{n-4}) = \{v_1, \dots, v_{\ell-2}, u_1, \dots, u_{\ell-2}\}$ e $B_4 \cong L_4$ com $V(L_4) = \{v_0, v_{\ell-1}, u_0, u_{\ell-1}\}$. Note que $E(L_4)$ depende de $G \cong PL_n$ ou $G \cong ML_n$. Por construção, G é obtido a partir da união de B_{n-4} e B_4 ao adicionar-se as *arestas de ligação* $E_L = \{v_0 v_1, u_0 u_1, v_{\ell-2} v_{\ell-1}, u_{\ell-2} u_{\ell-1}\}$.

Suponha $G \cong PL_n$. A rotulação π , restrita ao B_{n-4} , é definida como segue. Para cada v_i , faça: $\pi(v_i) = 1$ se i é par; e $\pi(v_i) = 0$ caso contrário. Para cada u_i faça: $\pi(u_i) = 0$ se i é par; e $\pi(u_i) = 1$ caso contrário. Para cada $v_i v_{i+1}$ faça: $\pi(v_i v_{i+1}) = p + 2$ se i é ímpar; e $\pi(v_i v_{i+1}) = p + 1$ caso contrário. Para cada $u_i u_{i+1}$ faça: $\pi(u_i u_{i+1}) = p + 1$ se i é ímpar; e $\pi(u_i u_{i+1}) = p + 2$ caso contrário. Para as arestas de $E_v \cap E(B_{n-4})$ atribua o rótulo $p + 3$. Rotule as arestas de E_L como segue: $\pi(v_0 v_1) = p + 1$; $\pi(u_0 u_1) = p + 2$; $\pi(v_{\ell-2} v_{\ell-1}) = p + 2$; e $\pi(u_{\ell-2} u_{\ell-1}) = p + 1$. A Figura 1(a) ilustra o esquema da rotulação π incluindo a rotulação fixa do bloco B_4 em tracejado. O subgrafo em negrito corresponde ao B_{n-4} e as arestas pontilhadas correspondem às arestas de ligação. Agora, considere $G \cong ML_n$. Neste caso, os vértices de B_{n-4} e as arestas de $E_v \cap E(B_{n-4})$ são rotulados como no caso anterior e as demais arestas são rotuladas como segue. Para cada aresta $v_i v_{i+1}$, faça: $\pi(v_i v_{i+1}) = p + 1$ se i é ímpar; e $\pi(v_i v_{i+1}) = p + 2$ caso contrário. Para cada aresta $u_i u_{i+1}$, faça: $\pi(u_i u_{i+1}) = p + 2$ se i é ímpar; e $\pi(u_i u_{i+1}) = p + 1$ caso contrário. Rotule as arestas de E_L como segue: $\pi(v_0 v_1) = p + 2$; $\pi(u_0 u_1) = p + 1$; $\pi(v_{\ell-2} v_{\ell-1}) = p + 2$; e $\pi(u_{\ell-2} u_{\ell-1}) = p + 1$. A Figura 1(b) apresenta o esquema da rotulação π incluindo a rotulação fixa do B_4 . Em ambos os casos, verificamos π por inspeção das rotulações fixas de blocos adjacentes. \square

Um grafo de *Petersen generalizado* $P(\ell, k)$, $k \leq \lfloor (\ell - 1)/2 \rfloor$ e $\ell \geq 3$, é um grafo 3-regular com $V(P(\ell, k)) = \{x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}, y_0, y_1, \dots, y_{\ell-1}\}$ e $E(P(\ell, k)) = E_x \cup E_y \cup E_{xy}$ tal que $E_x = \{x_i x_{i+1} : 0 \leq i < \ell\}$, $E_y = \{y_i y_{i+k} : 0 \leq i < \ell\}$, $E_{xy} = \{x_i y_i : 0 \leq i < \ell\}$ e índices tomados módulo ℓ . Um $P(\ell, k)$ é bipartido se e somente se ℓ é par e k é ímpar (Krcnc e Pisanski, 2019). Como $PL_n \cong P(\ell, 1)$, pelo Teorema 1 e pelo trabalho de Omai et al. (2021), $\lambda_p^t(P(\ell, 1))$ está determinado quando $p \geq 2$. Neste trabalho, determinamos $\lambda_p^t(P(\ell, 2))$, $\ell \geq 6$ e $p \geq 2$. Para isso, utilizamos a seguinte construção por blocos. Para ℓ par com $\ell' = \ell/2$, $q = \lfloor \ell'/3 \rfloor$ e $r = \ell' \bmod 3$, o grafo

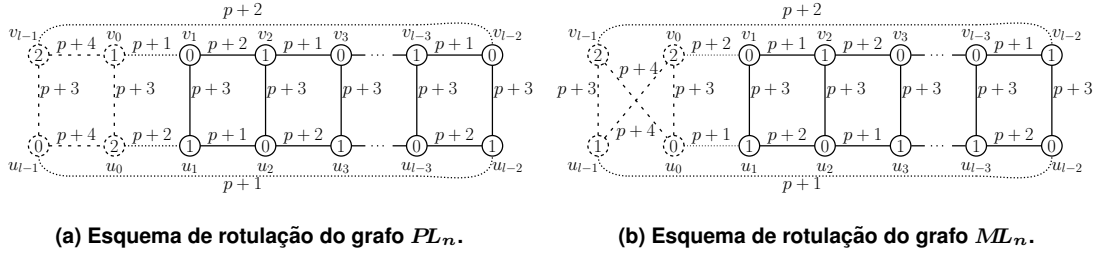


Figura 1. $(p + 4)$ -rotulação $(p, 1)$ -total para PL_n e ML_n .

$P(\ell, 2)$ é construído a partir da união de $q - 1$ cópias, B_1, B_2, \dots, B_{q-1} , do bloco B_i (veja Figura 2(a)) e um bloco residual B_R definido conforme o valor de r (veja Figura 2). Esses blocos são conectados por *arestas de ligação*: $\{u_{1,1}u_{2r+6,q}, v_{1,1}v_{2r+5,q}, v_{2,1}v_{2r+6,q}\} \cup \{u_{6,i}u_{1,i+1}, v_{5,i}v_{1,i+1}, v_{6,i}v_{2,i+1} : 1 \leq i < q\}$. Para ℓ ímpar, a construção é análoga com: $q = \lfloor \ell/5 \rfloor$, $r = \ell \bmod 5$ (veja Figura 3) e o conjunto de arestas de ligação definido por $\{u_{1,1}u_{5+r,q}, v_{2,1}v_{5+r,q}, v_{1,1}v_{5+r-1,q}\} \cup \{u_{5,i}u_{1,i+1}, v_{4,i}v_{1,i+1}, v_{5,i}v_{2,i+1} : 1 \leq i < q\}$.

Teorema 2. *Seja G um grafo de Petersen generalizado $P(\ell, 2)$, $\ell \geq 6$. Então, $\lambda_p^t(G) = p + 3$ se $p = 2$; e $\lambda_p^t(G) = p + 4$ se $p \geq 3$.*

Esboço de demonstração. Seja $G \cong P(\ell, 2)$, $\ell \geq 6$. Para $p = 2$, construímos uma 5-rotulação $(2, 1)$ -total π para G . Se ℓ par, rotule os blocos usando as rotulações fixas dadas na Figura 2 e para as arestas de ligação, faça: $\pi(v_{1,1}v_{2r+5,q}) = 2$; $\pi(v_{2,1}v_{2r+6,q}) = 3$; e $\pi(u_{1,1}u_{2r+6,q}) = 5$, exceto quando $\ell = 8$, para o qual $\pi(u_{1,1}u_{2r+6,q}) = 3$. Além disso, se $q > 1$ faça: $\pi(v_{5,i}v_{1,i+1}) = 2$, $1 \leq i < q$; $\pi(v_{6,i}v_{2,i+1}) = 3$, $1 \leq i < q$; $\pi(u_{6,i}u_{1,i+1}) = 5$, $1 \leq i < q$, exceto quando $i = q - 1$ e $r = 1$, para o qual $\pi(u_{6,i}u_{1,i+1}) = 3$. Se ℓ ímpar, rotule os blocos usando as rotulações fixas dadas na Figura 3 e rotule as arestas de ligação como segue: $\pi(u_{1,1}u_{5+r,q}) = 4$; $\pi(v_{2,1}v_{5+r,q}) = 1$; e $\pi(v_{1,1}v_{4+r,q}) = 0$. Além disso, se $q > 1$ faça: $\pi(u_{5,i}u_{1,i+1}) = 4$; $\pi(v_{4,i}v_{1,i+1}) = 0$; e $\pi(v_{5,i}v_{2,i+1}) = 1$, $1 \leq i < q$. Para $p \geq 3$, apresentamos uma $(p + 4)$ -rotulação $(p, 1)$ -total π para G . Rotule os blocos considerando as rotulações fixas dadas: na Figura 4 se ℓ par; e na Figura 5 se ℓ ímpar. Atribua rótulo $p + 4$ às arestas de ligação. Em todos os casos, verificamos π pela análise da rotulação fixa de blocos adjacentes. \square

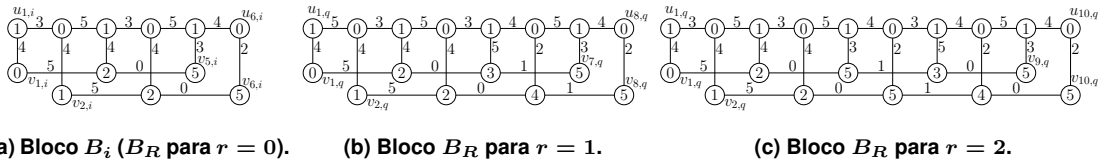


Figura 2. 5-rotulação $(2, 1)$ -total para os blocos do $P(\ell, 2)$ com ℓ par.

Referências

- Chunling, T., Xiaohui, L., Yuansheng, Y., e Zhengwei, H. (2010). $(d, 1)$ -total labellings of regular nonbipartite graphs and an application to flower snarks. *Ars Comb.*, 96:33–40.
- Deng, X., Shao, Z., Zhang, H., e Yang, W. (2019). The $(d, 1)$ -total labelling of sierpiński-like graphs. *Appl. Math. Comput.*, 361:484–492.
- Havet, F., Reed, B., e Sereni, J.-S. (2008). $L(2, 1)$ -labelling of graphs. In *Proc. Annu. ACM-SIAM Symp.*, pages 621–630. Society for Industrial and Applied Mathematics.

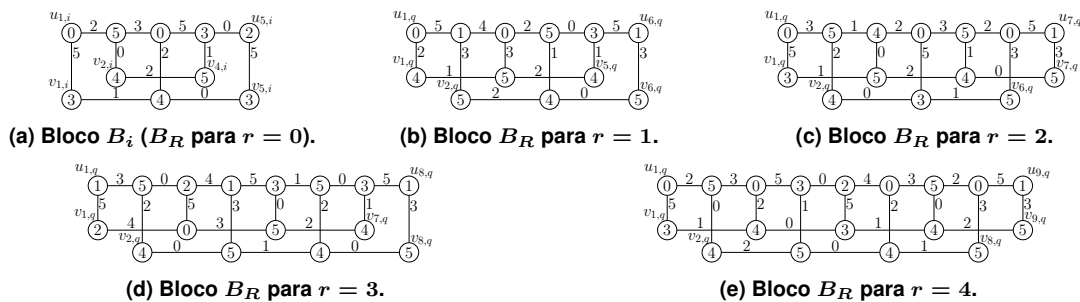


Figura 3. 5-rotulação (2, 1)-total para os blocos do $P(\ell, 2)$ com ℓ ímpar.

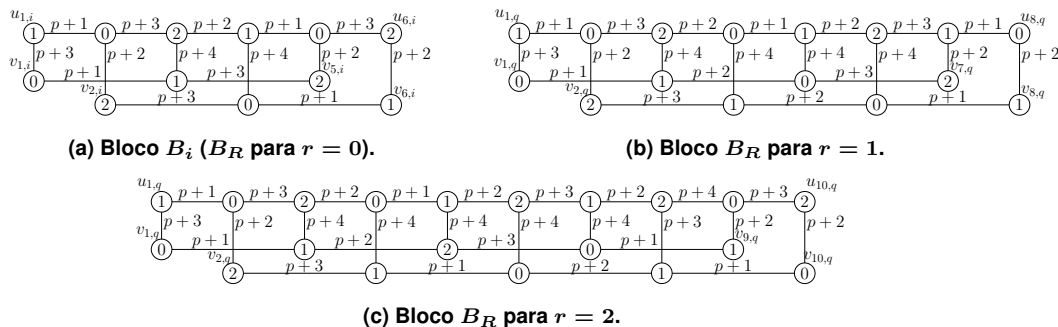


Figura 4. $(p + 4)$ -rotulação $(p, 1)$ -total dos blocos do $P(\ell, 2)$ com ℓ par.

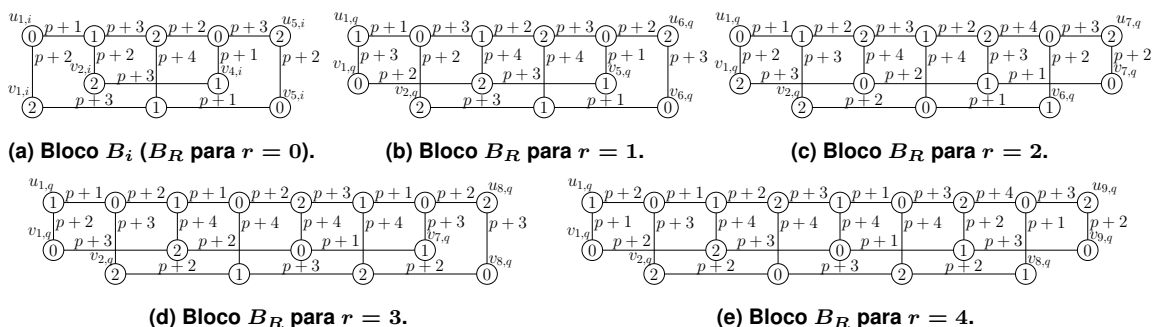


Figura 5. $(p + 4)$ -rotulação $(p, 1)$ -total dos blocos do $P(\ell, 2)$ com ℓ ímpar.

Havet, F. e Thomassé, S. (2009). Complexity of $(p, 1)$ -total labelling. *Discrete Appl. Math.*, 157(13):2859–2870.

Havet, F. e Yu, M.-L. (2008). $(p, 1)$ -total labelling of graphs. *Discrete Math.*, 308(4):496 – 513.

Krnc, M. e Pisanski, T. (2019). Characterization of generalised Petersen graphs that are kronecker covers. *Acta Math. Univ. Comen.*, 88(3):891–895.

Montassier, M. e Raspaud, A. (2006). $(d, 1)$ -total labeling of graphs with a given maximum average degree. *J. Graph Theory*, 51(2):93–109.

Omai, M. M., Campos, C. N., e Luiz, A. G. (2021). The $(2, 1)$ -total number of near-ladder graphs. In *Anais do VI ETC*.

Sethuraman, G. e Velankanni, A. (2015). $(2, 1)$ -total labeling of a class of subcubic graphs. *Electron. Notes Discrete Math.*, 48:259–266.

Sun, L. e Wu, J.-L. (2017). On $(p, 1)$ -total labelling of planar graphs. *J. Comb. Optim.*, 33(1):317–325.