

# Número $(p,1)$ -total de *near-ladders* e Petersen generalizados

M. M. Omai<sup>1</sup>, C. N. Campos<sup>1</sup>, A. G. Luiz<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, Brasil

<sup>2</sup>Universidade Federal do Ceará (UFC), Quixadá, Brasil

mayara.omai@ic.unicamp.br, cnc@unicamp.br, gomes.atilio@ufc.br

**Resumo.** Uma  $k$ -rotulação  $(p, 1)$ -total de um grafo simples  $G$  é uma função  $\pi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$  em que:  $|\pi(uv) - \pi(u)| \geq p$  e  $|\pi(uv) - \pi(v)| \geq p$  para  $uv \in E(G)$ ;  $\pi(uv) \neq \pi(vw)$  para  $uv, vw \in E(G)$ ; e  $\pi(u) \neq \pi(v)$  para  $uv \in E(G)$ . O menor inteiro  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -rotulação  $(p, 1)$ -total é denotado por  $\lambda_p^t(G)$ . Neste trabalho, provamos que:  $\lambda_p^t(G) = p + 4$ ,  $p \geq 3$ , para os grafos *near-ladder* não bipartidos e para os grafos de Petersen generalizados  $P(\ell, 2)$ ,  $\ell \geq 6$ ; e  $\lambda_2^t(G) = 5$  para  $P(\ell, 2)$ ,  $\ell \geq 6$ .

**Abstract.** A  $k$ - $(p, 1)$ -total labelling of a simple graph  $G$  is a function  $\pi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$  such that:  $|\pi(uv) - \pi(u)| \geq p$  and  $|\pi(uv) - \pi(v)| \geq p$  for  $uv \in E(G)$ ;  $\pi(uv) \neq \pi(vw)$  for  $uv, vw \in E(G)$ ; and  $\pi(u) \neq \pi(v)$  for  $uv \in E(G)$ . The least integer  $k$  for which  $G$  admits a  $k$ - $(p, 1)$ -total labelling is denoted  $\lambda_p^t(G)$ . In this work, we show that:  $\lambda_p^t(G) = p + 4$ ,  $p \geq 3$ , for non-bipartite *near-ladder* graphs and generalized Petersen graphs  $P(\ell, 2)$ ,  $\ell \geq 6$ ; and  $\lambda_2^t(G) = 5$  for graphs  $P(\ell, 2)$ ,  $\ell \geq 6$ .

## 1. Introdução

Sejam  $G = (V(G), E(G))$  um grafo simples,  $d(v)$  o grau de um vértice  $v \in V(G)$  e  $\Delta$  o grau máximo de  $G$ . Uma  $k$ -rotulação  $(p, 1)$ -total de  $G$  é uma função  $\pi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{0, \dots, k\}$  com as seguintes propriedades:  $|\pi(uv) - \pi(u)| \geq p$  e  $|\pi(uv) - \pi(v)| \geq p$  para  $uv \in E(G)$ ;  $\pi(uv) \neq \pi(vw)$  para  $uv, vw \in E(G)$ ; e  $\pi(u) \neq \pi(v)$  para  $uv \in E(G)$ . O menor inteiro  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -rotulação  $(p, 1)$ -total é denominado número  $(p, 1)$ -total e denotado por  $\lambda_p^t(G)$ . Essa rotulação foi introduzida por Havet e Yu (2008) e, em seu trabalho original, eles se aprofundaram no caso  $p = 2$ , estabelecendo limitantes e determinando  $\lambda_2^t(G)$  para os grafos completos, ciclos e caminhos. Além disso, provaram que  $\lambda_2^t(G) \leq 6$  para grafos com  $\Delta \leq 3$  e que  $\lambda_2^t(K_4) = 6$ . Desses resultados, conjecturaram que se  $G \not\cong K_4$  é um grafo conexo com  $\Delta \leq 3$ , então  $\lambda_2^t(G) \leq 5$ .

Essa conjectura foi verificada para  $\Delta \in \{1, 2\}$  (Havet e Yu, 2008) e para algumas classes de grafos com  $\Delta = 3$  tais como: bipartidos regulares (Havet e Thomassé, 2009), grafos cujo conjunto de vértices é coberto por um conjunto independente de triângulos (Sethuraman e Velankanni, 2015) e grafos *near-ladder* (Omai et al., 2021). Para  $p$  arbitrário,  $\lambda_p^t(G)$  está determinado para algumas classes de grafos, dentre elas: ciclos (Havet e Yu, 2008), *Flower Snarks* (Chunling et al., 2010) e grafos *Sierpiński-Like* (Deng et al., 2019). Boa parte dos resultados conhecidos abordam limitantes para  $\lambda_p^t(G)$  restritos a classes de grafos (Montassier e Raspaud, 2006; Sun e Wu, 2017). No caso dos regulares, sabe-se que  $\lambda_p^t(G) \geq \Delta + p$ ,  $p \geq 2$  (Havet e Yu, 2008). Se, adicionalmente,  $G$  for bipartido,  $\lambda_p^t(G) = \Delta + p$  quando  $p \geq \Delta \geq 3$  (caso dos *near-ladder*

bipartidos); e  $\lambda_p^t(G) \geq \Delta + p + 1$  se  $G$  não for bipartido (Chunling et al., 2010). Neste trabalho, determinamos o número  $(p, 1)$ -total dos grafos *near-ladder* não bipartidos para  $p \geq 3$  e dos grafos de Petersen generalizados  $P(\ell, 2)$ ,  $\ell \geq 6$  e  $p \geq 2$ .

## 2. Resultados

Seja  $n = 2\ell$ ,  $\ell \geq 1$  e inteiro. Um grafo *ladder*  $L_n$  possui  $V(L_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{\ell-1}, v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}\}$  e  $E(L_n) = E_h \cup E_v$ , em que  $E_h = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : 0 \leq i < \ell - 1\}$  e  $E_v = \{u_i v_i : 0 \leq i \leq \ell - 1\}$ . Um *near-ladder* é construído a partir do  $L_n$ ,  $n > 4$ , adicionando-se ou duas *arestas laminares*,  $v_0 v_{\ell-1}$  e  $u_0 u_{\ell-1}$  (denotado  $PL_n$  e também denominado *Prisma*), ou duas *arestas cruzadas*,  $u_0 v_{\ell-1}$  e  $v_0 u_{\ell-1}$  (denotado  $ML_n$  e também denominado *Möbius Ladder*).

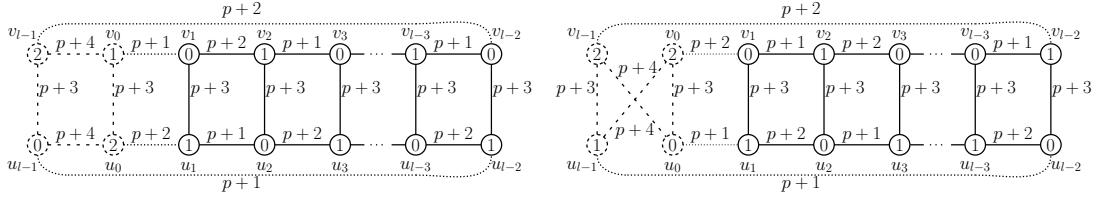
**Teorema 1.** *Se  $G$  é um grafo near-ladder não bipartido, então  $\lambda_p^t(G) = p + 4$ ,  $p \geq 3$ .*

*Esboço de demonstração.* Neste caso,  $G \cong PL_n$  com  $n \equiv 2 \pmod{4}$  ou  $G \cong ML_n$  com  $n \equiv 0 \pmod{4}$  (Omai et al., 2021). Como  $\lambda_p^t(G) \geq p+4$ , para provar que  $\lambda_p^t(G) = p+4$  é suficiente construir uma  $(p+4)$ -rotulação  $(p, 1)$ -total  $\pi$  para  $G$ .

Considere dois subgrafos aresta-disjuntos de  $G$ :  $B_{n-4} \cong L_{n-4}$ , com  $V(L_{n-4}) = \{v_1, \dots, v_{\ell-2}, u_1, \dots, u_{\ell-2}\}$  e  $B_4 \cong L_4$  com  $V(L_4) = \{v_0, v_{\ell-1}, u_0, u_{\ell-1}\}$ . Note que  $E(L_4)$  depende de  $G \cong PL_n$  ou  $G \cong ML_n$ . Por construção,  $G$  é obtido a partir da união de  $B_{n-4}$  e  $B_4$  ao adicionar-se as *arestas de ligação*  $E_L = \{v_0 v_1, u_0 u_1, v_{\ell-2} v_{\ell-1}, u_{\ell-2} u_{\ell-1}\}$ .

Suponha  $G \cong PL_n$ . A rotulação  $\pi$ , restrita ao  $B_{n-4}$ , é definida como segue. Para cada  $v_i$ , faça:  $\pi(v_i) = 1$  se  $i$  é par; e  $\pi(v_i) = 0$  caso contrário. Para cada  $u_i$  faça:  $\pi(u_i) = 0$  se  $i$  é par; e  $\pi(u_i) = 1$  caso contrário. Para cada  $v_i v_{i+1}$  faça:  $\pi(v_i v_{i+1}) = p+2$  se  $i$  é ímpar; e  $\pi(v_i v_{i+1}) = p+1$  caso contrário. Para cada  $u_i u_{i+1}$  faça:  $\pi(u_i u_{i+1}) = p+1$  se  $i$  é ímpar; e  $\pi(u_i u_{i+1}) = p+2$  caso contrário. Para as arestas de  $E_v \cap E(B_{n-4})$  atribua o rótulo  $p+3$ . Rotule as arestas de  $E_L$  como segue:  $\pi(v_0 v_1) = p+1$ ;  $\pi(u_0 u_1) = p+2$ ;  $\pi(v_{\ell-2} v_{\ell-1}) = p+2$ ; e  $\pi(u_{\ell-2} u_{\ell-1}) = p+1$ . A Figura 1(a) ilustra o esquema da rotulação  $\pi$  incluindo a rotulação fixa do bloco  $B_4$  em tracejado. O subgrafo em negrito corresponde ao  $B_{n-4}$  e as arestas pontilhadas correspondem às arestas de ligação. Agora, considere  $G \cong ML_n$ . Neste caso, os vértices de  $B_{n-4}$  e as arestas de  $E_v \cap E(B_{n-4})$  são rotulados como no caso anterior e as demais arestas são rotuladas como segue. Para cada aresta  $v_i v_{i+1}$ , faça:  $\pi(v_i v_{i+1}) = p+1$  se  $i$  é ímpar; e  $\pi(v_i v_{i+1}) = p+2$  caso contrário. Para cada aresta  $u_i u_{i+1}$ , faça:  $\pi(u_i u_{i+1}) = p+2$  se  $i$  é ímpar; e  $\pi(u_i u_{i+1}) = p+1$  caso contrário. Rotule as arestas de  $E_L$  como segue:  $\pi(v_0 v_1) = p+2$ ;  $\pi(u_0 u_1) = p+1$ ;  $\pi(v_{\ell-2} v_{\ell-1}) = p+2$ ; e  $\pi(u_{\ell-2} u_{\ell-1}) = p+1$ . A Figura 1(b) apresenta o esquema da rotulação  $\pi$  incluindo a rotulação fixa do  $B_4$ . Em ambos os casos, verificamos  $\pi$  por inspeção das rotulações fixas de blocos adjacentes.  $\square$

Um grafo de Petersen generalizado  $P(\ell, k)$ ,  $k \leq \lfloor (\ell-1)/2 \rfloor$  e  $\ell \geq 3$ , é um grafo 3-regular com  $V(P(\ell, k)) = \{x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}, y_0, y_1, \dots, y_{\ell-1}\}$  e  $E(P(\ell, k)) = E_x \cup E_y \cup E_{xy}$  tal que  $E_x = \{x_i x_{i+1} : 0 \leq i < \ell\}$ ,  $E_y = \{y_i y_{i+k} : 0 \leq i < \ell\}$ ,  $E_{xy} = \{x_i y_i : 0 \leq i < \ell\}$  e índices tomados módulo  $\ell$ . Um  $P(\ell, k)$  é bipartido se e somente se  $\ell$  é par e  $k$  é ímpar (Krnc e Pisanski, 2019). Como  $PL_n \cong P(\ell, 1)$ , pelo Teorema 1 e pelo trabalho de Omai et al. (2021),  $\lambda_p^t(P(\ell, 1))$  está determinado quando  $p \geq 2$ . Neste trabalho, determinamos  $\lambda_p^t(P(\ell, 2))$ ,  $\ell \geq 6$  e  $p \geq 2$ . Para isso, utilizamos a seguinte construção por blocos. Para  $\ell$  par com  $\ell' = \ell/2$ ,  $q = \lfloor \ell'/3 \rfloor$  e  $r = \ell' \bmod 3$ , o grafo



(a) Esquema de rotulação do grafo  $PL_n$ .

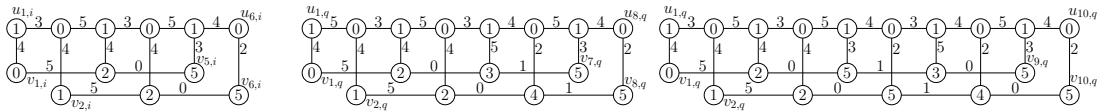
(b) Esquema de rotulação do grafo  $ML_n$ .

**Figura 1.**  $(p+4)$ -rotulação  $(p, 1)$ -total para  $PL_n$  e  $ML_n$ .

$P(\ell, 2)$  é construído a partir da união de  $q - 1$  cópias,  $B_1, B_2, \dots, B_{q-1}$ , do bloco  $B_i$  (veja Figura 2(a)) e um bloco residual  $B_R$  definido conforme o valor de  $r$  (veja Figura 2). Esses blocos são conectados por *arestas de ligação*:  $\{u_{1,1}u_{2r+6,q}, v_{1,1}v_{2r+5,q}, v_{2,1}v_{2r+6,q}\} \cup \{u_{6,i}u_{1,i+1}, v_{5,i}v_{1,i+1}, v_{6,i}v_{2,i+1} : 1 \leq i < q\}$ . Para  $\ell$  ímpar, a construção é análoga com:  $q = \lfloor \ell/5 \rfloor$ ,  $r = \ell \bmod 5$  (veja Figura 3) e o conjunto de arestas de ligação definido por  $\{u_{1,1}u_{5+r,q}, v_{2,1}v_{5+r,q}, v_{1,1}v_{5+r-1,q}\} \cup \{u_{5,i}u_{1,i+1}, v_{4,i}v_{1,i+1}, v_{5,i}v_{2,i+1} : 1 \leq i < q\}$ .

**Teorema 2.** Seja  $G$  um grafo de Petersen generalizado  $P(\ell, 2)$ ,  $\ell \geq 6$ . Então,  $\lambda_p^t(G) = p + 3$  se  $p = 2$ ; e  $\lambda_p^t(G) = p + 4$  se  $p \geq 3$ .

*Esboço de demonstração.* Seja  $G \cong P(\ell, 2)$ ,  $\ell \geq 6$ . Para  $p = 2$ , construímos uma 5-rotulação  $(2, 1)$ -total  $\pi$  para  $G$ . Se  $\ell$  par, rotule os blocos usando as rotulações fixas dadas na Figura 2 e para as arestas de ligação, faça:  $\pi(v_{1,1}v_{2r+5,q}) = 2$ ;  $\pi(v_{2,1}v_{2r+6,q}) = 3$ ; e  $\pi(u_{1,1}u_{2r+6,q}) = 5$ , exceto quando  $\ell = 8$ , para o qual  $\pi(u_{1,1}u_{2r+6,q}) = 3$ . Além disso, se  $q > 1$  faça:  $\pi(v_{5,i}v_{1,i+1}) = 2$ ,  $1 \leq i < q$ ;  $\pi(v_{6,i}v_{2,i+1}) = 3$ ,  $1 \leq i < q$ ;  $\pi(u_{6,i}u_{1,i+1}) = 5$ ,  $1 \leq i < q$ , exceto quando  $i = q - 1$  e  $r = 1$ , para o qual  $\pi(u_{6,i}u_{1,i+1}) = 3$ . Se  $\ell$  ímpar, rotule os blocos usando as rotulações fixas dadas na Figura 3 e rotule as arestas de ligação como segue:  $\pi(u_{1,1}u_{5+r,q}) = 4$ ;  $\pi(v_{2,1}v_{5+r,q}) = 1$ ; e  $\pi(v_{1,1}v_{4+r,q}) = 0$ . Além disso, se  $q > 1$  faça:  $\pi(u_{5,i}u_{1,i+1}) = 4$ ;  $\pi(v_{4,i}v_{1,i+1}) = 0$ ; e  $\pi(v_{5,i}v_{2,i+1}) = 1$ ,  $1 \leq i < q$ . Para  $p \geq 3$ , apresentamos uma  $(p+4)$ -rotulação  $(p, 1)$ -total  $\pi$  para  $G$ . Rotule os blocos considerando as rotulações fixas dadas: na Figura 4 se  $\ell$  par; e na Figura 5 se  $\ell$  ímpar. Atribua rótulo  $p+4$  às arestas de ligação. Em todos os casos, verificamos  $\pi$  pela análise da rotulação fixa de blocos adjacentes.  $\square$



(a) Bloco  $B_i$  ( $B_R$  para  $r = 0$ ).

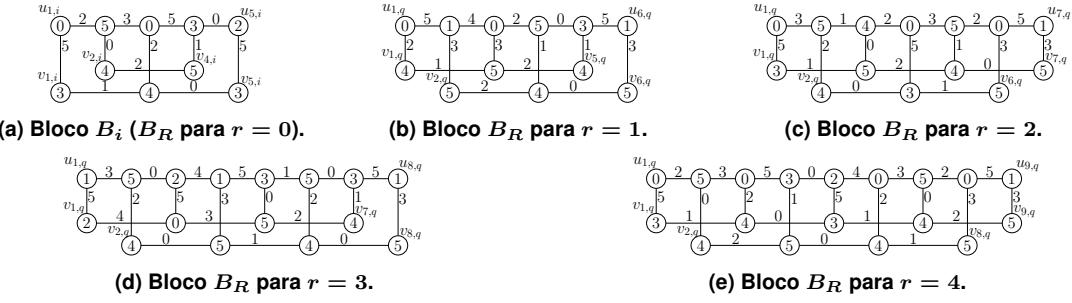
(b) Bloco  $B_R$  para  $r = 1$ .

(c) Bloco  $B_R$  para  $r = 2$ .

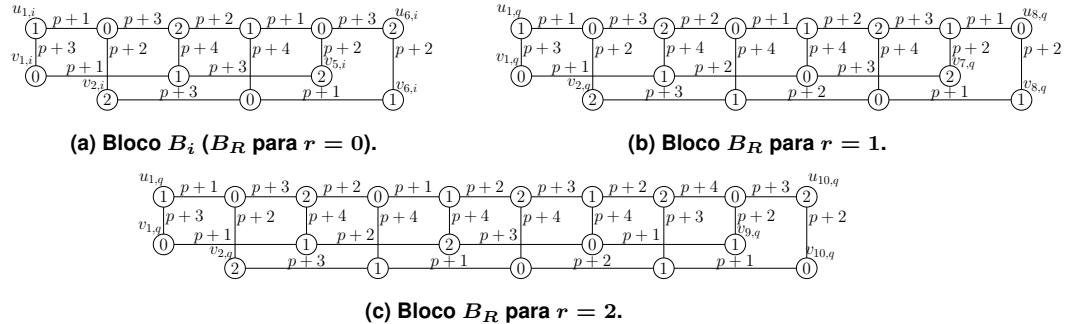
**Figura 2.** 5-rotulação  $(2, 1)$ -total para os blocos do  $P(\ell, 2)$  com  $\ell$  par.

## Referências

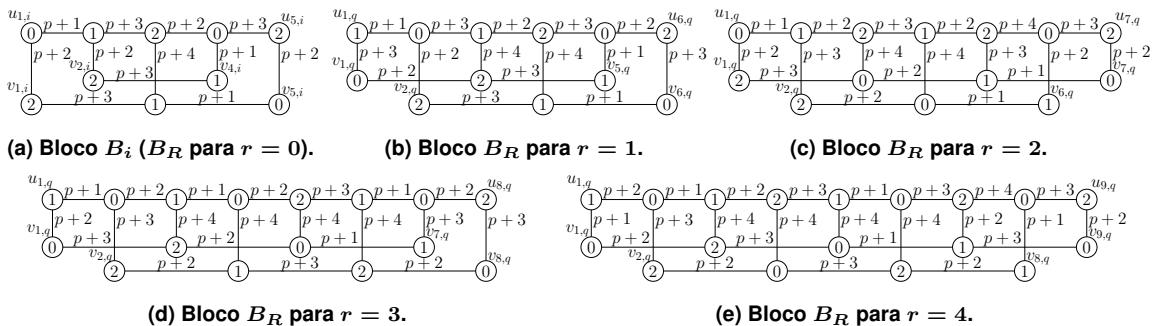
- Chunling, T., Xiaohui, L., Yuansheng, Y., e Zhengwei, H. (2010). (d, 1)-total labellings of regular nonbipartite graphs and an application to flower snarks. *Ars Comb.*, 96:33–40.  
 Deng, X., Shao, Z., Zhang, H., e Yang, W. (2019). The (d, 1)-total labelling of sierpiński-like graphs. *Appl. Math. Comput.*, 361:484–492.  
 Havet, F., Reed, B., e Sereni, J.-S. (2008). L(2, 1)-labelling of graphs. In *Proc. Annu. ACM-SIAM Symp.*, pages 621–630. Society for Industrial and Applied Mathematics.



**Figura 3.** 5-rotulação (2, 1)-total para os blocos do  $P(\ell, 2)$  com  $\ell$  ímpar.



**Figura 4.**  $(p+4)$ -rotulação  $(p, 1)$ -total dos blocos do  $P(\ell, 2)$  com  $\ell$  par.



**Figura 5.**  $(p+4)$ -rotulação  $(p, 1)$ -total dos blocos do  $P(\ell, 2)$  com  $\ell$  ímpar.

- Havet, F. e Thomassé, S. (2009). Complexity of  $(p, 1)$ -total labelling. *Discrete Appl. Math.*, 157(13):2859–2870.
- Havet, F. e Yu, M.-L. (2008).  $(p, 1)$ -total labelling of graphs. *Discrete Math.*, 308(4):496 – 513.
- Krnc, M. e Pisanski, T. (2019). Characterization of generalised Petersen graphs that are Kronecker covers. *Acta Math. Univ. Comen.*, 88(3):891–895.
- Montassier, M. e Raspaud, A. (2006).  $(d, 1)$ -total labeling of graphs with a given maximum average degree. *J. Graph Theory*, 51(2):93–109.
- Omai, M. M., Campos, C. N., e Luiz, A. G. (2021). The  $(2, 1)$ -total number of near-ladder graphs. In *Anais do VI ETC*.
- Sethuraman, G. e Velankanni, A. (2015).  $(2, 1)$ -total labeling of a class of subcubic graphs. *Electron. Notes Discrete Math.*, 48:259–266.
- Sun, L. e Wu, J.-L. (2017). On  $(p, 1)$ -total labelling of planar graphs. *J. Comb. Optim.*, 33(1):317–325.