# Problemas de Particionamento de Grafos em Árvores Monocromáticas*

**Diego Rangel Piranga Costa**[1], **Vinicius Fernandes dos Santos**[1]
**Phablo F. S. Moura**[1]

[1]Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, MG – Brasil

{diegorangel, viniciussantos, phablo}@dcc.ufmg.br

***Abstract.*** *Graph partition problems is an important class of graph problems that are able to model real-world tasks such as Concurrent Processor Allocation and Very Large-Scale Integration (VLSI) systems. Even though such problems are NP-hard, there is a lot of effort in developing methods to deal with such problems. In this work, we present results from the point of view of computational complexity for the problem of Partitioning Graphs into Monochromatic Trees as know as PGMT, proving the NP-hardness even for restricted versions of this problem. In addition, we present a lower bound for the execution time of algorithms based on the Exponential Time Hypothesis (ETH) and we also present two algorithms, the first based on dynamic programming when considering that the input graph is a tree and a second algorithm parameterized by the treewidth and the number of colors.*

***Resumo.*** *Problemas de partição de grafos é uma importante classe de problemas de grafos que são capazes de modelar tarefas do mundo real, como, alocação concorrente de processadores e integração de sistemas de larga escala (VLSI). Mesmo tais problemas sendo NP-difíceis, existe muito esforço em desenvolver métodos para tratar tais problemas. Neste trabalho apresentamos resultados do ponto de vista de complexidade computacional para o Problema de Partição de Grafos em Árvores Monocromáticas conhecido como PGMT, onde demonstramos a NP-dificuldade mesmo para versões restritas do problema. Além disso, apresentamos um limitante inferior para o tempo de execução de algoritmos baseados na Hipótese do Tempo Exponencial (ETH) e também apresentamos dois algoritmos, um baseado em programação dinâmica quando consideramos que o grafo da entrada é uma árvore e um outro algoritmo parametrizado pela largura arbórea e pelo número de cores.*

## 1. Introdução

Uma grande variedade de problemas combinatórios pode ser interpretada como uma busca por uma partição dos vértices ou arestas de um grafo em subgrafos que satisfazem certas propriedades. Alguns desses problemas de partição, bem como a sua complexidade, já foram estudados e, consequentemente, demonstrados que pertencem à classe dos problemas *NP-difícil*. Como exemplo, os problemas de coloração de vértices e arestas podem

*Trabalho parcialmente financiado por FAPEMIG, Capes e CNPq

ser vistos como problemas de particionamento dos vértices de um grafo em conjuntos estáveis.

Em particular, neste trabalho, estudamos a versão de decisão do problema de PARTIÇÃO DE GRAFOS EM ÁRVORES MONOCROMÁTICAS - PGMT. Define-se o problema da seguinte forma.

| PGMT |
| --- |
| **Instância**: Um grafo $G$ colorido nas arestas; um inteiro positivo $k$. |
| **Pergunta**: Existem $k$ ou menos árvores monocromáticas disjuntas nos vértices que cobrem todos os vértices de $G$? |

Neste trabalho, apresentamos os resultados quanto à complexidade computacional do PGMT quando consideramos alguns parâmetros como: frequência com que cada cor aparece nas arestas e grau máximo. Também apresentamos um limitante inferior para o tempo de execução de algoritmos exatos usando a *Hipótese do Tempo Exponencial* – ETH. Além disso, apresentamos um algoritmo polinomial baseado em programação dinâmica quando o grafo da entrada é uma árvore e apresentamos um algoritmo parametrizado pelo número de cores e pela *largura arbórea* do grafo da entrada do problema.

## 2. Complexidade Computacional para o PGMT

Nossos primeiros resultados são resultados negativos do ponto de vista de complexidade computacional. Considerando as versões restritas que foram estudadas por [Jin and Li 2004], [Jin et al. 2006] e [Jin and Li 2008], em nosso trabalho, consideramos um outro conjunto de restrições a fim de verificar a *NP-dificuldade* para as seguintes restrições: frequência de repetição de cores, grau máximo limitado, número de árvores na solução e a classe de grafos *bipartidos completos*. Para esse conjunto de restrições demonstramos que o PGMT continua ainda sendo *NP-completo*.

**Teorema 1.** *O problema de* PGMT *é NP-completo mesmo em grafos coloridos onde cada cor aparece até 3 vezes.*
**Teorema 2.** *O problema* PGMT *com* $k = 2$ *é NP-completo mesmo em grafos coloridos com duas cores.*
**Teorema 3.** *O problema* PGMT *com* $k = 2$ *é NP-completo mesmo em grafos bipartidos completos.*
**Teorema 4.** *O problema* PGMT *com* $k = 2$ *é NP-completo mesmo em grafos onde o grau máximo é no máximo 5.*

Para demonstrar o Teorema 2 utilizamos uma redução do 3-SAT do seguinte modo: dada uma instância $\Phi = (\mathcal{B}, \mathcal{C})$ de 3-SAT onde $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, onde $\mathcal{B}$ é o conjunto de variáveis e $\mathcal{C}$ é o conjunto de cláusulas. O conjunto de vértices de $G$ é $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n, C_1, C_2, ..., C_m, s, t\}$. O conjunto das arestas de $G$ consiste de: $v_iC_j$ se, e somente se, $v_i \in C_j$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\},\ j \in \{1, 2, ..., m\}$; e das arestas $v_is$, e $v_it$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. As arestas de $G$ são coloridas com 2 cores $c_1$ e $c_2$ da seguinte maneira. Atribua a cor $c_1$ para toda aresta $v_is$ e para $v_iC_j$ se o literal positivo $v_i$ aparece em $C_j$, $i \in \{1, 2, ..., n\},\ j \in \{1, 2, ..., m\}$. Agora atribua a cor $c_2$ para toda aresta $v_it$ e $v_iC_j$ se o literal negativo $\bar{v}_i$ pertence a $C_j$,

$i \in \{1, 2, ..., n\}$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Com o grafo oriundo da transformação descrita, demonstramos que que existe uma atribuição de verdade que satisfaz a fórmula $\Phi$ se e somente se, $G$ contém 2 árvores monocromáticas disjuntas nos vértices que cobrem todos os vértices de $G$. A Figura 1 mostra um exemplo da transformação anterior feita na instância $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$, onde $C_1 = (v_1 \vee v_2 \vee \bar{v}_3), C_2 = (\bar{v}_1 \vee v_2 \vee v_3), C_3 = (v_2 \vee v_3 \vee \bar{v}_4)$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

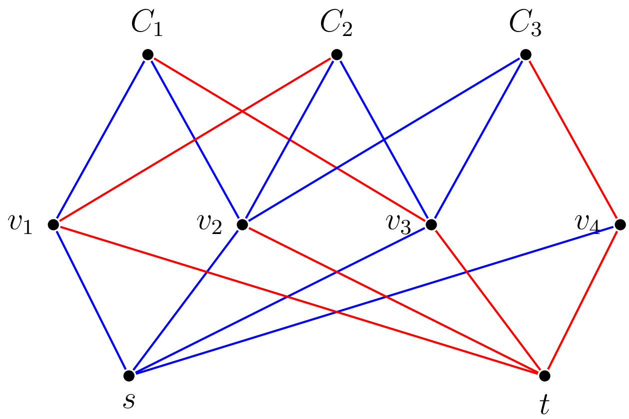


**Figure 1. Exemplo da transformação de uma instância do 3-SAT em uma instância do PGMT**

Uma observação importante é que, pelo Teorema 2, temos que o tamanho do grafo produzido na construção é linear no tamanho da instância do 3-SAT, sendo assim, consideramos a *Hipótese do Tempo Exponencial* – ETH e demonstramos um limitante inferior para execução de algoritmos para o PGMT.

**Teorema 5.** *Existe $\delta > 0$ tal que* PGMT *não pode ser resolvido em tempo $\mathcal{O}(2^{\delta n})$, a menos que a ETH falhe.*

## 3. Algoritmos para o PGMT

Além de resultados de complexidade computacional, também demonstramos e apresentamos alguns algoritmos para o PGMT. Primeiro consideramos uma versão do PGMT restrito à classe das *Árvores*. Neste caso, enraizamos a árvore em um vértice arbitrário, e resolvemos o problema utilizando um algoritmo baseado no paradigma de *programação dinâmica*, no qual os subproblemas consistem em problemas restritos a subárvores. Assim, obtivemos o seguinte resultado.

**Teorema 6.** *Seja $T$ uma árvore com $n$ vértices. Existe um algoritmo para* PGMT*, que pode ser executado em tempo $\mathcal{O}(n^2)$.*

Para grafos gerais, desenvolvemos um algoritmo parametrizado pela largura arbórea $t$ e pelo número de cores $r$ de $G$. Por se tratar de um problema em que a conectividade é importante, utilizamos em nossa solução uma técnica apresentada por [Bodlaender et al. 2013] que utiliza um *reticulado* onde, aplicando os operadores de *união* e *encontro*, a conectividade é preservada durante a execução do algoritmo. Foi possível, então, demonstrar e apresentar o seguinte algoritmo.

**Teorema 7.** *Seja $G$ um grafo com $n$ vértices e com uma $r$-coloração de suas arestas, e $t$ a largura arbórea de uma decomposição arbórea de $G$. Existe um algoritmo para* PGMT *que pode ser executado em tempo $\mathcal{O}(n^{\mathcal{O}(1)}(r \cdot t)^{2t+1})$.*

## 4. Conclusão

O PGMT é um problema relativamente antigo, mas que possui poucos resultados conhecidos, principalmente do ponto de vista computacional. Nesse trabalho foram obtidos resultados que permitem concluir que mesmo em grafos com diversas restrições naturais o problema permanece difícil. Por outro lado, foram obtidos resultados positivos para grafos com largura arbórea limitada, que formam uma importante e não trivial classe de instâncias. Os resultados obtidos estão sendo formatados para submissão para um periódico. Estes resultados são uma contribuição para a literatura do PMGT, uma vez que permitem compreender de maneira mais concreta a dificuldade do problema e fortalecem resultados já existentes na literatura.

Temos como objetivo continuar estudando o problema, ou seja, determinar a complexidade computacional de outras variações que sejam naturais e interessantes para o problema. Além disso, pretendemos aprofundar a busca por algoritmos parametrizados por outros parâmetros e também investigar a existência de um *kernel* polinomial, para os casos em que sejam tratáveis por parâmetro fixo.

Outras abordagens de natureza distinta das apresentadas anteriormente também serão consideradas. Temos particular interesse em abordagens baseadas em Programação Linear Inteira. Podemos formular o problema usando ideias baseadas em fluxos e eliminação de subciclos. Os trabalhos futuros incluem a avaliação experimental de tais formulações, bem como possíveis melhorias, com a investigação de desigualdades válidas, por exemplo.

## References


Bodlaender, H. L., Cygan, M., Kratsch, S., and Nederlof, J. (2013). Deterministic single exponential time algorithms for connectivity problems parameterized by treewidth. *Inf. Comput.*, 243:86–111.

Jin, Z., Kano, M., Li, X., and Wei, B. (2006). Partitioning 2-edge-colored complete multipartite graphs into monochromatic cycle, paths and trees. *Journal of Combinatorial Optimization*, 11(4):445–454.

Jin, Z. and Li, X. (2004). The complexity for partitioning graphs by monochromaic trees, cycles and paths. *International Journal of Computer Mathematics*, 81(11):1357–1362.

Jin, Z. and Li, X. (2008). Vertex partitions of r-edge-colored graphs. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 23(1):120–126.