Coloração Harmoniosa*

Júlio C. S. Araújo[1], Ana Beatriz da S. Martins[1], Marcio C. Santos[2]

[1]Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, Brasil

[2]Campus de Russas, Universidade Federal do Ceará, Russas - CE, Brasil

beatrizm@alu.ufc.br, julio@mat.ufc.br, marciocs@ufc.br

Abstract. *A k-coloring $c\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ is a* line-distinguishing coloring *if each pair of distinct edges have different sets of colors in their endpoints. The* line-distinguishing chromatic number *of G is $\lambda(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G$ admits a line distinguishing k-coloring$\}$. If a line-distinguishing coloring c is proper, then c is an harmonious coloring. The* harmonious chromatic number*, denoted by $\mathrm{h}(G)$, is the minimum $k \in \mathbb{N}$ such that G has a harmonious k-coloring. In this paper, we first present a sufficient and necessary condition for* $\mathrm{h}(G)$ *to be k, for any graph G and $k \in \mathbb{N}$. Then, we present Integer-Programming formulations to compute* $\mathrm{h}(G)$ *and some preliminary tests on random graphs with distinct edge densities.*

Resumo. *Uma k-coloração $c\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ é uma coloração* linha-distinguível *se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades. O* número cromático linha-distinguível *de G é $\lambda(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G$ tem uma k-coloração linha-distinguível$\}$. Se uma coloração linha-distinguível c é própria, então c é uma* coloração harmoniosa. *O* número cromático harmonioso*, denotado por* $\mathrm{h}(G)$*, é o menor $k \in \mathbb{N}$ tal que G tem uma k-coloração harmoniosa. Neste trabalho, apresentamos uma condição necessária e suficiente para* $\mathrm{h}(G)$ *ser k, para um grafo arbitrário e $k \in \mathbb{N}$. Após isso, apresentamos formulações de programação inteira para computar* $\mathrm{h}(G)$ *e alguns testes preliminares em grafos aleatórios com densidades de arestas distintas.*

1. Introdução

Para definições não apresentadas neste texto, vide [West 2001, Garey and Johnson 1979]. Considere que todos os grafos estudados aqui são finitos e simples. Dado um grafo G, uma *k-coloração* de G é uma função $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$; c será *própria* se $c(u) \neq c(v)$, sempre que $uv \in E(G)$. O *número cromático* de G é $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G$ admite uma k-coloração própria$\}$. O problema de *Coloração de Vértices* consiste em determinar $\chi(G)$, para um dado grafo G. Se c é uma coloração de um grafo G, para todos $u, v \in V(G)$, definimos a *cor de uma aresta* $e = uv \in E(G)$ como $c(e) = \{c(u), c(v)\}$. Dizemos que uma k-coloração é *harmônica* ou *linha-distinguível* (definida com a terminologia *line-distinguishing* em [Lee and Mitchem 1987]) quando, para quaisquer duas arestas distintas e_1 e e_2, temos $c(e_1) \neq c(e_2)$. Note que tal coloração não é necessariamente própria. Em [Lee and Mitchem 1987], também é definido *número cromático harmônico* ou *número cromático linha-distinguível* (também conhecido na literatura por *line-distinguishing chromatic number*) de G como $\lambda(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G$ admite uma k-coloração linha-distinguível$\}$.

*Financiado por CNPq 437841/2018-9 e Funcap PNE-0112-00061.01.00/16 e 186-155.01.00/21.

Uma *coloração harmoniosa* é uma coloração linha-distinguível e própria. O *número cromático harmonioso de G* é $\mathrm{h}(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G$ admite uma k-coloração harmoniosa$\}$.

Dados um grafo G e $k \in \mathbb{N}$, decidir se $\lambda(G) \leq k$ ou se $\mathrm{h}(G) \leq k$ são problemas NP-completos [Hopcroft and Krishnamoorthy 1983, Edwards and McDiarmid 1995]. Na Seção 2, apresentamos uma caracterização de grafos com número cromático harmonioso igual a k. Apesar de simples, não encontramos tal resultado na literatura até o momento. Na Seção 3, apresentamos modelos de Programação Inteira para encontrar o número cromático harmonioso e resultados preliminares de execução destes modelos em instâncias geradas aleatoriamente. Há na literatura uma monografia a respeito de formulações para o número cromático linha-distinguível [de Oliveira 2019], mas acreditamos que este é o primeiro trabalho a propor formulações para o número cromático harmonioso. Deve-se ressaltar que nossas formulações não apenas incluem uma restrição adicional para tornar a coloração própria. Elas também modelam a restrição de ser linha-distinguível de modo distinto do que o apresentado em [de Oliveira 2019].

2. Resultados gerais

Em [Miller and Pritikin 1991], é provado que $\mathrm{h}(G) = n(G)$ se $diam(G) \leq 2$. Notamos que:

Proposição 1 $\mathrm{h}(G) = n(G)$ *se, e somente se,* $diam(G) \leq 2$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $diam(G) > 2$, então existem $u, v \in V(G)$ tais que $dist(u, v) \geq 3$. Assim, seja $V(G) = \{u,\ v,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n(G)-2}\}$; tomando $c(u) = c(v) = 1$ e $c(w_i) = i + 1,\ \forall w_i \neq v,\ w_i \neq u$, temos uma coloração harmoniosa com $n(G) - 1$ cores.

$(\Leftarrow)$ Como observado em [Miller and Pritikin 1991], se $\mathrm{diam}(G) \leq 2$ então todo par de vértices $u, v \in V(G)$ ou tem um vizinho em comum, e portanto devem receber cores distintas já que a coloração deve ser linha-distinguível, ou é formado por vértices adjacentes que também devem receber cores distintas já que a coloração deve ser própria. □

É folclore que $\chi(G) = p$ *se, e somente se, existe sequência de identificações de vértices não adjacentes que, quando aplicadas a G, resultam em* K_p. Tal fato ajudou a visualizar que:

Teorema 1 *Dados um grafo G e $k \in \mathbb{N}$, então* $\mathrm{h}(G) = k$ *se, e somente se, existe sequência iterativa e exaustiva de identificações de vértices à distância pelo menos 3 que resulta em um grafo H tal que $diam(H) \leq 2$ e $n(H) = k$.*

3. Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\mathrm{h}(G) \leq k$. Definimos uma variável $x_{v,i}$ para cada $v \in V$ e $i \leq k$ tal que $x_{v,i} = 1$ representa que v recebe a cor i e $x_{v,i} = 0$, caso contrário. Para cada $1 \leq i \leq k$, definimos uma variável binária w_i que representa quando a cor i é usada ou não. O primeiro modelo é similar ao mais clássico para Coloração de Vértices.

A função objetivo consiste em minimizar o número de cores utilizadas, portanto, será: $\min \sum_{i=1}^{k} w_i$. É necessário garantir que cada vértice receba uma cor, e que se uma cor i for usada por um vértice v, a variável w_i seja igual a 1. Para tanto, temos as seguintes restrições:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} x_{v,i} \geq 1 \quad v \in V(G); \qquad w_i \geq x_{v,i} \quad i \in \{1, \ldots, k\}, \forall v \in V(G).$$

Para forçar que a coloração seja própria e as variáveis sejam binárias, adicionamos:

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq w_i \quad i \in [k], uv \in E(G); \qquad x_{v,i}, w_i \in \{0, 1\} \quad v \in V(G), i \in [k].$$

Por último, adicionamos restrições para forçar que a coloração seja harmoniosa. Primeiro, garantimos que não hajam vértices à distância 2 com mesma cor. Ademais, é necessário garantir que não haja outro par de arestas com mesmas cores em suas extremidades.

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq w_i \quad i \in [k] \;\; u, v \in V(N(v) \cap N(u) \neq \emptyset);$$

$$\sum_{w \in N(u)} x_{w,j} + \sum_{l \in N(v)} x_{l,j} \leq 3 - x_{v,i} - x_{u,i} \quad u, v \in V(G) \;\; uv \in \bar{E}(G) \;\; i \in [k].$$

Modelo por representantes. Outro modelo para Coloração de Vértices segue a ideia de escolher um representante por cor [Campêlo et al. 2008]. Define-se uma variável binária x_{uv}, para todo $u \in V(G)$ e $v \in \overline{N_{G^2}}(u) \cup \{u\}$ (i.e. v está à distância maior que 2 de u), indicando quando o vértice u é ou não o representante da cor dada ao vértice v. Desse modo, a função objetivo será: $\min \sum_{v \in V} x_{vv}$. Como antes, é necessário garantir que cada vértice receba uma cor, e que se um vértice v for o representante da cor de u, então v deve ser representante de si mesmo:

$$\textstyle\sum_{u \in (\overline{N_{G^2}}(v) \cup \{v\})} x_{uv} \geq 1 \quad v \in V(G); \qquad x_{vu} \leq x_{vv} \quad v \in V(G), u \in \overline{N_{G^2}}(v).$$

Também forçamos a coloração a ser própria e as variáveis a serem binárias:

$$x_{vu} + x_{vw} \leq x_{vv} \quad v \in V(G) \;\; u, w \in \overline{N}_{G^2}(v) \; (uw \in E(G));$$

$$x_{vu} \in \{0, 1\} \quad v \in V(G), u \in \overline{N_{G^2}}(v) \cup \{v\}.$$

Para garantir que a coloração seja harmoniosa, primeiro garantimos que não haja dois vértices de mesma cor à distância dois. Então, evitamos que outros pares de arestas recebam as mesmas cores em suas extremidades (considere $N(\{u, w\}) = N(u) \cup N(w)$):

$$\textstyle\sum_{z \in \overline{N_{G^2}}(v) \cap N(u)} x_{vz} \leq x_{vv} \quad u, v \in V(G);$$

$$\sum_{l \in \overline{N_{G^2}}(v) \cap N(\{u,w\})} x_{vl} \leq 3 - x_{zu} - x_{zw} \quad v \in V(G), \; uw \notin E(G^2), \; z \in \overline{N_{G^2}}(\{u, w\}).$$

Modelo assimétrico por representantes O modelo anterior possui diversas soluções simétricas, correspondendo à mesma coloração, apenas trocando o representante de cada cor. Para evitar tal problema, é possível assumir uma ordem total qualquer em $V(G)$ e reescrever o modelo para exigir que o representante de uma cor seja o elemento mínimo, com respeito à ordem, entre os vértices de tal cor. Por restrições de espaço, tal modelo não é incluído aqui.

4. Resultados Computacionais

Para testes preliminares, usamos a linguagem de programação Julia para executar instâncias geradas aleatoriamente no Gurobi versão 9.0. O rótulo GRAPH_X_Y_1.col indica que foi uma instância com X vértices em que cada aresta foi incluída com probabilidade Y. Os testes foram feitos em um computador de processador i7 com 20 Gb de memória RAM usando o Ubuntu 20.04. A Tabela 1 apresenta um resumo. Note que formulação assimétrica de representantes alcançou a solução ótima em todas as intâncias dadas e bem mais rapidamente que as demais.

É interessante analisar o comportamento tão eficiente de tal formulação para este problema nessas instâncias mesmo para grafos com 50 vértices. Note que instâncias com baixa densidade demandaram mais tempo. Esse fato não é surpreendente já que determinar o número cromático harmonioso é NP-difícil mesmo para florestas com três árvores de raio 2 [Edwards and McDiarmid 1995]. É necessário fazer uma análise mais extensiva de instâncias para verificar se o padrão visto para grafos com 50 vértices se repete: é demandado mais tempo quando se tem poucas arestas, ou em excesso. Também temos ideias de heuristicas cujo desempenho precisa ser comparado ao uso de tais formulações.

	Representantes		Padrão		Rep. Assimétrico	
Instância	GAP	Tempo	GAP	Tempo	GAP	Tempo
GRAPH_10_0.20_1.col	0.0	0.277	0.0	0.071	0.0	0.002
GRAPH_20_0.20_1.col	0.0	190.156	20.0	1800.032	0.0	0.29
GRAPH_30_0.20_1.col	28.571	1800.087	40.0	1800.049	0.0	0.388
GRAPH_40_0.20_1.col	65.0	1800.036	65.217	1800.227	0.0	17.422
GRAPH_50_0.20_1.col	30.0	1800.109	93.939	1801.281	0.0	1.465
GRAPH_10_0.40_1.col	0.0	0.001	0.0	3.841	0.0	0.001
GRAPH_20_0.40_1.col	0.0	0.0	15.789	1800.046	0.0	0.0
GRAPH_30_0.40_1.col	0.0	0.001	0.0	1006.648	0.0	0.0
GRAPH_40_0.40_1.col	0.0	0.0	95.0	1800.598	0.0	0.0
GRAPH_50_0.40_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	0.533
GRAPH_10_0.60_1.col	0.0	0.0	0.0	0.691	0.0	0.0
GRAPH_20_0.60_1.col	0.0	0.0	0.0	138.575	0.0	0.0
GRAPH_30_0.60_1.col	0.0	0.0	93.333	1800.117	0.0	0.0
GRAPH_40_0.60_1.col	0.0	0.0	95.0	1800.499	0.0	0.0
GRAPH_50_0.60_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	0.036
GRAPH_10_0.80_1.col	0.0	0.0	0.0	0.702	0.0	0.0
GRAPH_20_0.80_1.col	0.0	0.0	0.0	268.858	0.0	0.0
GRAPH_30_0.80_1.col	0.0	0.0	93.333	2547.575	0.0	0.0
GRAPH_40_0.80_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	0.0
GRAPH_50_0.80_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	1.173

Tabela 1. Comparação entre as formulações

Referências

Campêlo, M., Campos, V. A., and Corrêa, R. C. (2008). On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 156(7):1097–1111. GRACO 2005.

de Oliveira, H. C. (2019). Coloração harmônica de grafos: uma abordagem usando programação inteira. Tese de conclusão de curso, Campus de Russas, Universidade Federal do Ceará, Russas.

Edwards, K. and McDiarmid, C. (1995). The complexity of harmonious colouring for trees. *Discret. Appl. Math.*, 57(2-3):133–144.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences)*. W. H. Freeman, first edition edition.

Hopcroft, J. E. and Krishnamoorthy, M. S. (1983). On the harmonious coloring of graphs. *SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods*, pages 306—-311.

Lee, S.-M. and Mitchem, J. (1987). An upper bound for the harmonious chromatic number of a graph. *Journal of Graph Theory*, 11(4):565–567.

Miller, Z. and Pritikin, D. (1991). The harmonious coloring number of a graph. *Discrete Mathematics*, 93:211–228.

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education.