

k -independência em prismas complementares é NP-completo

Otávio S. Mortosa¹, Márcia R. Cappelle¹, Erika Coelho¹

¹Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Goiânia – GO – Brazil

{otaviomortosa,marcia,erikamorais}@inf.ufg.br

Abstract. A set $S \subseteq V(G)$ of a graph G is k -independent if every vertex in S has at most $k - 1$ neighbors in S , where $k \in \mathbb{Z}^+$. The k -independence number is the cardinality of a maximum k -independent set of a graph G . We present bounds for k -independence on complementary prisms and we show that deciding whether a complementary prism graph has a k -independent set of cardinality at least ℓ is a NP-complete problem, where $\ell \in \mathbb{Z}^+$.

Resumo. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ de um grafo G é k -independente se cada um de seus vértices é adjacente a no máximo $k - 1$ vértices do conjunto S , onde $k \in \mathbb{Z}^+$. O número de k -independência é a cardinalidade de um maior conjunto k -independente em um grafo G . Apresentamos limites para a k -independência em prismas complementares e mostramos que decidir se um grafo prisma complementar tem um conjunto k -independente de ordem pelo menos ℓ é um problema NP-completo, onde $\ell \in \mathbb{Z}^+$.

1. Introdução

Consideramos grafos finitos, simples e não direcionados. Para um grafo G , seus conjuntos de vértices e arestas são denotados por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Um conjunto independente $S \subseteq V(G)$ é tal que os vértices em S não são adjacentes entre si. O número de independência de um grafo G , denotado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade máxima de um conjunto independente de G . O conceito de conjunto independente foi generalizado, em [Fink and Jacobson 1985], da seguinte forma. Para $k \in \mathbb{Z}^+$, um conjunto $S \subseteq V(G)$ é k -independente se o grau máximo dos vértices do subgrafo induzido por S é no máximo $k - 1$. A cardinalidade máxima de um conjunto k -independente em um grafo G é denotada por $\alpha_k(G)$, chamada de número de k -independência. Chamamos de conjunto- $\alpha_k(G)$ um conjunto k -independente de G de cardinalidade máxima. Em particular, $\alpha_1(G) = \alpha(G)$ é o número de independência clássico de G . Observa-se que um conjunto j -independente é também um conjunto k -independente, para $k \geq j$ e $k, j \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, todo conjunto com k vértices é k -independente.

Limites inferiores e superiores justos para α_k nos produtos lexicográfico, forte, cartesiano e direto foram apresentados em [Mao et al. 2018]. Diversos resultados sobre k -independência foram reunidos em [Chellali et al. 2012].

O prisma complementar $G\overline{G}$ de um grafo G é um grafo formado pela união disjunta de G e \overline{G} adicionando-se arestas do emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes (com o mesmo rótulo) de G e \overline{G} . Resultados sobre k -independência nos prismas complementares foram apresentados em [Mortosa and Cappelle 2021]. O prisma

complementar de C_5 , o grafo $C_5\overline{C_5}$, conhecido como Grafo de Petersen, pode ser visto na Figura 1.

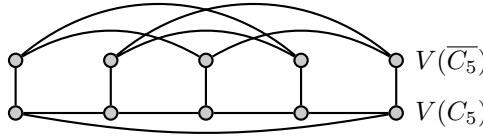


Figura 1. Grafo de Petersen, o prisma complementar de C_5 .

Decidir se um grafo tem um conjunto independente de tamanho pelo menos ℓ é NP-completo para grafos gerais [Karp 1972] e também para os prismas complementares [Duarte et al. 2017]. Dados um grafo G e inteiros positivos k e ℓ , o problema CONJUNTO k -INDEPENDENTE consiste em decidir se existe $S \subseteq V(G)$, um conjunto k -independente de ordem pelo menos ℓ . Este problema é NP-completo para grafos gerais [Jacobson and Peters 1989]. Mostramos que o problema CONJUNTO k -INDEPENDENTE permanece NP-completo para os prismas complementares. Além disso, apresentamos limites superior e inferior para a cardinalidade máxima de um conjunto k -independente de um prisma complementar $G\overline{G}$.

Simplificando nossa discussão, dizemos simplesmente G e \overline{G} para referirmos aos subgrafos cópias de G e \overline{G} em $G\overline{G}$, respectivamente. Além disso, para um vértice v de G , diz-se que \overline{v} é o seu vértice correspondente em \overline{G} , e para um conjunto $X \subseteq V(G)$, diz-se que \overline{X} é o seu conjunto de vértices correspondente em $V(\overline{G})$. Se $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G[S]$ o subgrafo de G induzido por S e por $d_S(v)$ o grau de v em $G[S]$. O grau máximo dos vértices de G é denotado por $\Delta(G)$.

2. Resultados

Apresentamos no Teorema 1 limites para $\alpha_k(G\overline{G})$ de um grafo G qualquer e, na Proposição 1, um limite superior mais justo, diante de algumas restrições.

Teorema 1 *Seja $k \geq 2$. Para um grafo G qualquer, $\alpha_{k-1}(G) + \alpha_{k-1}(\overline{G}) \leq \alpha_k(G\overline{G}) \leq \alpha_k(G) + \alpha_k(\overline{G})$.*

Prova. Para o limite inferior, sejam S um conjunto- $\alpha_{k-1}(G)$ e \overline{T} um conjunto- $\alpha_{k-1}(\overline{G})$. Para vértices quaisquer $v \in S$ e $\overline{u} \in \overline{T}$, temos que $d_S(v) \leq k-2$ e $d_{\overline{T}}(\overline{u}) \leq k-2$. Assim, em $G\overline{G}$, um vértice $v \in S \cup \overline{T}$ satisfaz $d_{S \cup \overline{T}}(v) \leq (k-2) + 1 = k-1$. Consequentemente, $S \cup \overline{T}$ é um conjunto k -independente de $G\overline{G}$. Como S e \overline{T} são conjuntos disjuntos em $G\overline{G}$, $|S \cup \overline{T}| = |S| + |\overline{T}| = \alpha_{k-1}(G) + \alpha_{k-1}(\overline{G})$. Logo $\alpha_k(G\overline{G}) \geq \alpha_{k-1}(G) + \alpha_{k-1}(\overline{G})$. Para o limite superior, sejam I um conjunto- $\alpha_k(G\overline{G})$, S os vértices de I em G e \overline{T} os vértices de I em \overline{G} . Como $|S| \leq \alpha_k(G)$ e $|\overline{T}| \leq \alpha_k(\overline{G})$, temos que $\alpha_k(G\overline{G}) = |S| + |\overline{T}| \leq \alpha_k(G) + \alpha_k(\overline{G})$, e o limite superior é mantido. \square

Proposição 1 *Sejam $k \geq 2$, $n \geq k$ e um grafo G de ordem n . Se $\Delta(G) \leq k-2$ e \overline{G} possui \overline{T} , um conjunto- $\alpha_k(\overline{G})$, que contém um vértice \overline{v} com $k-1$ vizinhos em \overline{T} , então $\alpha_k(G\overline{G}) \leq n + \alpha_k(\overline{G}) - 1$.*

Prova. Pelo Teorema 1, $\alpha_k(G\bar{G}) \leq \alpha_k(G) + \alpha_k(\bar{G})$. Como $\Delta(G) \leq k - 2$, $\alpha_k(G) = n$. Para uma contradição, suponha que I é um conjunto k -independente maximal de $G\bar{G}$ com $|I| = n + \alpha_k(\bar{G})$. O conjunto I contém os n vértices de $V(G)$. Chamaremos o conjunto dos n vértices de G de S . Seja $I \cap V(\bar{G}) = \bar{T}$ os vértices de I em \bar{G} . Logo, $|\bar{T}| = \alpha_k(\bar{G})$. Pela hipótese, \bar{T} contém um vértice \bar{v} com $k - 1$ vizinhos em \bar{T} . Assim, como o seu correspondente v em G está no conjunto I , \bar{v} possui k vizinhos em I . Temos uma contradição, pois I não é k -independente. Portanto, $\alpha_k(G\bar{G}) \leq n + \alpha_k(\bar{G}) - 1$. \square

Finalmente, mostramos que o problema CONJUNTO k -INDEPENDENTE permanece NP-completo para os prismas complementares. Para a redução utilizada nesta prova, apresentamos uma generalização para a redução usada em [Duarte et al. 2017], para $k = 1$. Portanto, consideramos a seguir que $k \geq 2$.

Teorema 2 *O problema CONJUNTO k -INDEPENDENTE permanece NP-completo mesmo restrito à classe dos grafos prismas complementares.*

Prova. É possível verificar em tempo polinomial se um dado conjunto $V' \subseteq V(G\bar{G})$ é um conjunto k -independente de $G\bar{G}$. Logo, CONJUNTO k -INDEPENDENTE está em NP. Apresentamos uma redução de CONJUNTO k -INDEPENDENTE para esse problema.

Dado um grafo G de ordem $n > k$, construímos o grafo H , que é a união disjunta de G e o grafo multipartido completo $K_{m_1, m_2, \dots, m_{n+1}}$, onde $m_1 = m_2 = \dots = m_{n+1} = 2k - 1$. Seja $H\bar{H}$ o prisma complementar de H . A construção de $H\bar{H}$ é exemplificada na Figura 2. Seja $K = V(K_{m_1, m_2, \dots, m_{n+1}})$, ou seja, K é um conjunto de $(2k - 1)(n + 1)$ vértices de H . Vamos mostrar que, para inteiros ℓ' e k , G possui um conjunto k -independente de ordem pelo menos ℓ' se, e somente se, o prisma complementar $H\bar{H}$ tem um conjunto k -independente de ordem pelo menos $\ell = kn + 3k - 2 + \ell'$. Primeiro, suponha que I é um conjunto k -independente de G de ordem pelo menos ℓ' . Sejam K^1, \dots, K^{2k-1} os conjuntos de vértices de cada parte de $H[K]$ e $\bar{K}^1, \dots, \bar{K}^{2k-1}$ os conjuntos de vértices correspondentes em \bar{K} . Seja $D \subseteq K \cup \bar{K}$ contendo $2k - 1$ vértices de K^1 , $k - 1$ vértices de \bar{K}^1 e k vértices de cada um dos conjuntos $\bar{K}^2, \dots, \bar{K}^{2k-1}$. Ou seja, $|D \cap \bar{K}| = kn + k - 1$ e $|D \cap K| = 2k - 1$. Cada vértice em $H[D]$ tem grau no máximo $k - 1$. Logo, $I \cup D$ é um conjunto k -independente de $H\bar{H}$ de ordem $kn + k - 1 + 2k - 1 + \ell' = kn + 3k - 2 + \ell'$.

Agora, suponha que $H\bar{H}$ possui um conjunto k -independente J de ordem pelo menos $kn + 3k - 2 + \ell'$. Vamos mostrar que (i) $|J \cap K| \leq 2k - 1$, (ii) $J \cap V(\bar{G}) = \emptyset$ e (iii) $|J \cap (K \cup \bar{K})| \leq kn + 3k - 2$. Para provar (i), por contradição, assumamos que $|J \cap K| > 2k - 1$. Logo, J tem vértices em pelo menos duas partes de $H[K]$. Se J contém todos os k vértices de uma parte de $H[K]$, digamos K^i , um vértice u de uma outra parte de $H[K]$ que está em J tem $d_J(u) \geq k$, uma contradição, já que J é um conjunto k -independente. Se J contém menos de k vértices de K^i , então J contém pelo menos k vértices que estão em outras partes de $H[K]$. Logo, para um vértice $u \in K^i$, $d_J(u) \geq k$, o que também resulta em uma contradição. Portanto, $|J \cap K| \leq 2k - 1$. Para provar (ii), por contradição, assumamos que $J \cap V(\bar{G}) \neq \emptyset$. Se $J \cap \bar{K} = \emptyset$, então J pode conter no máximo todos os $2n$ vértices de $V(G) \cup V(\bar{G})$, além de no máximo $2k - 1$ vértices de K , por (i). Note-se que $k \geq 2$, $n > k$ e $\ell' \geq k$. Portanto, tem-se que $|J| \leq 2n + 2k - 1 \leq kn + 2k - 1 < kn + 2k + (k - 2) + \ell' = kn + 3k - 2 + \ell'$. Se $J \cap \bar{K} \neq \emptyset$, tem-se que $|J \cap (V(\bar{G}) \cup \bar{K})| \leq 2k - 2$, já que todos os vértices em

$V(\overline{G})$ são adjacentes a todos os vértices em \overline{K} , o que implica em $|V(\overline{G}) \cap J| \leq k - 1$ e $|\overline{K} \cap J| \leq k - 1$. Além disso, $|J \cap V(G)| \leq n$ e, por (i), $|J \cap K| \leq 2k - 1$. Portanto, tem-se que $|J| \leq 2k - 1 + 2k - 2 + n = (n + k) + 3k - 3 < 2n + 3k - 2 < kn + 3k - 2 + \ell'$. Logo, qualquer combinação de vértices de J contendo pelo menos um vértice de $V(\overline{G})$, resulta em cardinalidade menor do que $kn + 3k - 2 + \ell'$, uma contradição. Portanto, $J \cap V(\overline{G}) = \emptyset$. Para provar (iii), por contradição, suponha que $|J \cap (K \cup \overline{K})| \geq kn + 3k - 1$. Como $|J \cap K| \leq 2k - 1$, tem-se que $|J \cap \overline{K}| \geq kn + k = k(n + 1)$. Se $|J \cap K| = 2k - 1$, existe i tal que $K^i \subseteq J$ e $v \in K^i$ tal que seu correspondente $\overline{v} \in \overline{K}^i$ também pertence a J , o que implica que $d_J(\overline{v}) = k$. Se $|J \cap K| < 2k - 1$, tem-se que $|J \cap \overline{K}| \geq kn + k + 1 = k(n + 1) + 1$. Logo, há pelo menos uma clique \overline{K}^i de \overline{K} tal que $|\overline{K}^i \cap J| \geq k + 1$, o que contradiz que J seja k -independente. Portanto $|J \cap (K \cup \overline{K})| \leq kn + 3k - 2$.

Por (ii) e (iii), conclui-se que $J - (K \cup \overline{K})$ é um conjunto k -independente de G de ordem no mínimo ℓ' . Portanto, o problema CONJUNTO k -INDEPENDENTE permanece NP-completo mesmo restrito à classe dos prismas complementares. \square

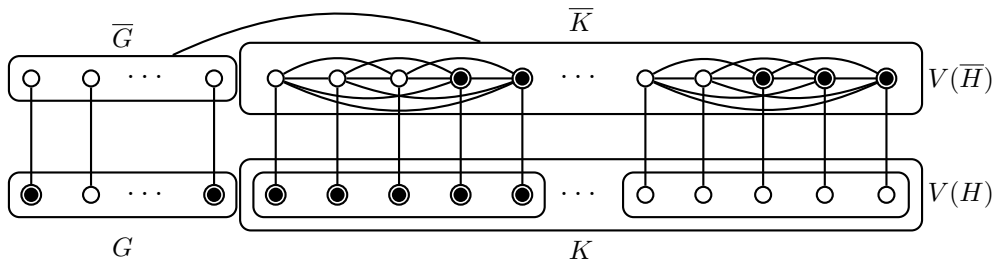


Figura 2. Exemplo de $H\overline{H}$, com $k = 3$. Os vértices de um conjunto k -independente estão em destaque. As arestas de G , \overline{G} e K foram omitidas.

Referências

- Chellali, M., Favaron, O., Hansberg, A., and Volkmann, L. (2012). k -domination and k -independence in graphs: A survey. *Graphs Combin.*, 28(1):1–55.
- Duarte, M. A., Penso, L., Rautenbach, D., and dos Santos Souza, U. (2017). Complexity properties of complementary prisms. *J. Comb. Optim.*, 33(2):365–372.
- Fink, J. F. and Jacobson, M. S. (1985). On n -domination, n -dependence and forbidden subgraphs. In *Graph theory with applications to algorithms and computer science*, pages 301–311.
- Jacobson, M. S. and Peters, K. (1989). Complexity questions for n -domination and related parameters. *Congr. Numer.*, 68:7–22.
- Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*, pages 85–103. Springer.
- Mao, Y., Cheng, E., Wang, Z., and Guo, Z. (2018). The k -independence number of graph products. *The Art of Discrete and Appl. Math.*, 1(1):P1–01.
- Mortosa, O. S. and Cappelle, M. R. (2021). k -independence on complementary prism graphs. *Matemática Contemporânea*, 48:211–220.