k-independência em prismas complementares é NP-completo

Otávio S. Mortosa [1], Márcia R. Cappelle [1], Erika Coelho [1]

[1]Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Goiânia – GO – Brazil

{otaviomortosa,marcia,erikamorais}@inf.ufg.br

Abstract. *A set $S \subseteq V(G)$ of a graph G is k-independent if every vertex in S has at most $k-1$ neighbors in S, where $k \in \mathbb{Z}^+$. The k-independence number is the cardinality of a maximum k-independent set of a graph G. We present bounds for k-independence on complementary prisms and we show that deciding whether a complementary prism graph has a k-independent set of cardinality at least ℓ is a* NP-complete *problem, where $\ell \in \mathbb{Z}^+$.*

Resumo. *Um conjunto $S \subseteq V(G)$ de um grafo G é k-independente se cada um de seus vértices é adjacente a no máximo $k-1$ vértices do conjunto S, onde $k \in \mathbb{Z}^+$. O número de k-independência é a cardinalidade de um maior conjunto k-independente em um grafo G. Apresentamos limites para a k-independência em prismas complementares e mostramos que decidir se um grafo prisma complementar tem um conjunto k-independente de ordem pelo menos ℓ é um problema* NP-completo*, onde $\ell \in \mathbb{Z}^+$.*

1. Introdução

Consideramos grafos finitos, simples e não direcionados. Para um grafo G, seus conjuntos de vértices e arestas são denotados por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Um *conjunto independente* $S \subseteq V(G)$ é tal que os vértices em S não são adjacentes entre si. O *número de independência* de um grafo G, denotado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade máxima de um conjunto independente de G. O conceito de conjunto independente foi generalizado, em [Fink and Jacobson 1985], da seguinte forma. Para $k \in \mathbb{Z}^+$, um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *k-independente* se o grau máximo dos vértices do subgrafo induzido por S é no máximo $k-1$. A cardinalidade máxima de um conjunto k-independente em um grafo G é denotada por $\alpha_k(G)$, chamada de *número de k-independência*. Chamamos de conjunto-$\alpha_k(G)$ um conjunto k-independente de G de cardinalidade máxima. Em particular, $\alpha_1(G) = \alpha(G)$ é o número de independência clássico de G. Observa-se que um conjunto j-independente é também um conjunto k-independente, para $k \geq j$ e $k, j \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, todo conjunto com k vértices é k-independente.

Limites inferiores e superiores justos para α_k nos produtos lexicográfico, forte, cartesiano e direto foram apresentados em [Mao et al. 2018]. Diversos resultados sobre k-independência foram reunidos em [Chellali et al. 2012].

O *prisma complementar* $G\overline{G}$ de um grafo G é um grafo formado pela união disjunta de G e $\overline{G}$ adicionando-se arestas do emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes (com o mesmo rótulo) de G e $\overline{G}$. Resultados sobre k-independência nos prismas complementares foram apresentados em [Mortosa and Cappelle 2021]. O prisma complementar de C_5, o grafo $C_5\overline{C_5}$, conhecido como Grafo de Petersen, pode ser visto na Figura 1.

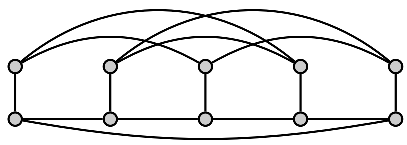

Figura 1. Grafo de Petersen, o prisma complementar de C_5.

Decidir se um grafo tem um conjunto independente de tamanho pelo menos ℓ é NP-completo para grafos gerais [Karp 1972] e também para os prismas complementares [Duarte et al. 2017]. Dados um grafo G e inteiros positivos k e ℓ, o problema CONJUNTO k-INDEPENDENTE consiste em decidir se existe $S \subseteq V(G)$, um conjunto k-independente de ordem pelo menos ℓ. Este problema é NP-completo para grafos gerais [Jacobson and Peters 1989]. Mostramos que o problema CONJUNTO k-INDEPENDENTE permanece NP-completo para os prismas complementares. Além disso, apresentamos limites superior e inferior para a cardinalidade máxima de um conjunto k-independente de um prisma complementar $G\overline{G}$.

Simplificando nossa discussão, dizemos simplesmente G e $\overline{G}$ para referirmos aos subgrafos cópias de G e $\overline{G}$ em $G\overline{G}$, respectivamente. Além disso, para um vértice v de G, diz-se que $\overline{v}$ é o seu vértice correspondente em $\overline{G}$, e para um conjunto $X \subseteq V(G)$, diz-se que $\overline{X}$ é o seu conjunto de vértices correspondente em $V(\overline{G})$. Se $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G[S]$ o subgrafo de G induzido por S e por $d_S(v)$ o grau de v em $G[S]$. O grau máximo dos vértices de G é denotado por $\Delta(G)$.

2. Resultados

Apresentamos no Teorema 1 limites para $\alpha_k(G\overline{G})$ de um grafo G qualquer e, na Proposição 1, um limite superior mais justo, diante de algumas restrições.

Teorema 1 *Seja $k \geq 2$. Para um grafo G qualquer, $\alpha_{k-1}(G) + \alpha_{k-1}(\overline{G}) \leq \alpha_k(G\overline{G}) \leq \alpha_k(G) + \alpha_k(\overline{G})$.*

Prova. Para o limite inferior, sejam S um conjunto-$\alpha_{k-1}(G)$ e $\overline{T}$ um conjunto-$\alpha_{k-1}(\overline{G})$. Para vértices quaisquer $v \in S$ e $\overline{u} \in \overline{T}$, temos que $d_S(v) \leq k-2$ e $d_{\overline{T}}(\overline{u}) \leq k-2$. Assim, em $G\overline{G}$, um vértice $v \in S \cup \overline{T}$ satisfaz $d_{S\cup\overline{T}}(v) \leq (k-2)+1 = k-1$. Consequentemente, $S \cup \overline{T}$ é um conjunto k-independente de $G\overline{G}$. Como S e $\overline{T}$ são conjuntos disjuntos em $G\overline{G}$, $|S \cup \overline{T}| = |S| + |\overline{T}| = \alpha_{k-1}(G) + \alpha_{k-1}(\overline{G})$. Logo $\alpha_k(G\overline{G}) \geq \alpha_{k-1}(G) + \alpha_{k-1}(\overline{G})$. Para o limite superior, sejam I um conjunto-$\alpha_k(G\overline{G})$, S os vértices de I em G e $\overline{T}$ os vértices de I em $\overline{G}$. Como $|S| \leq \alpha_k(G)$ e $|\overline{T}| \leq \alpha_k(\overline{G})$, temos que $\alpha_k(G\overline{G}) = |S| + |\overline{T}| \leq \alpha_k(G) + \alpha_k(\overline{G})$, e o limite superior é mantido. $\square$

Proposição 1 *Sejam $k \geq 2$, $n \geq k$ e um grafo G de ordem n. Se $\Delta(G) \leq k-2$ e $\overline{G}$ possui $\overline{T}$, um conjunto-$\alpha_k(\overline{G})$, que contém um vértice $\overline{v}$ com $k-1$ vizinhos em $\overline{T}$, então $\alpha_k(G\overline{G}) \leq n + \alpha_k(\overline{G}) - 1$.*

Prova. Pelo Teorema 1, $\alpha_k(G\overline{G}) \leq \alpha_k(G) + \alpha_k(\overline{G})$. Como $\Delta(G) \leq k-2$, $\alpha_k(G) = n$. Para uma contradição, suponha que I é um conjunto k-independente maximal de $G\overline{G}$ com $|I| = n + \alpha_k(\overline{G})$. O conjunto I contém os n vértices de $V(G)$. Chamaremos o conjunto dos n vértices de G de S. Seja $I \cap V(\overline{G}) = \overline{T}$ os vértices de I em $\overline{G}$. Logo, $|\overline{T}| = \alpha_k(\overline{G})$. Pela hipótese, $\overline{T}$ contém um vértice $\overline{v}$ com $k-1$ vizinhos em $\overline{T}$. Assim, como o seu correspondente v em G está no conjunto I, $\overline{v}$ possui k vizinhos em I. Temos uma contradição, pois I não é k-independente. Portanto, $\alpha_k(G\overline{G}) \leq n + \alpha_k(\overline{G}) - 1$. $\square$

Finalmente, mostramos que o problema CONJUNTO k-INDEPENDENTE permanece NP-completo para os prismas complementares. Para a redução utilizada nesta prova, apresentamos uma generalização para a redução usada em [Duarte et al. 2017], para $k = 1$. Portanto, consideramos a seguir que $k \geq 2$.

Teorema 2 *O problema* CONJUNTO k-INDEPENDENTE *permanece* NP-completo *mesmo restrito à classe dos grafos prismas complementares.*

Prova. É possível verificar em tempo polinomial se um dado conjunto $V' \subseteq V(G\overline{G})$ é um conjunto k-independente de $G\overline{G}$. Logo, CONJUNTO k-INDEPENDENTE está em NP. Apresentamos uma redução de CONJUNTO k-INDEPENDENTE para esse problema.

Dado um grafo G de ordem $n > k$, construímos o grafo H, que é a união disjunta de G e o grafo multipartido completo $K_{m_1,m_2,\ldots,m_{n+1}}$, onde $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n+1} = 2k-1$. Seja $H\overline{H}$ o prisma complementar de H. A construção de $H\overline{H}$ é exemplificada na Figura 2. Seja $K = V(K_{m_1,m_2,\ldots,m_{n+1}})$, ou seja, K é um conjunto de $(2k-1)(n+1)$ vértices de H. Vamos mostrar que, para inteiros ℓ' e k, G possui um conjunto k-independente de ordem pelo menos ℓ' se, e somente se, o prisma complementar $H\overline{H}$ tem um conjunto k-independente de ordem pelo menos $\ell = kn+3k-2+\ell'$. Primeiro, suponha que I é um conjunto k-independente de G de ordem pelo menos ℓ'. Sejam $K^1, \ldots, K^{2k-1}$ os conjuntos de vértices de cada parte de $H[K]$ e $\overline{K}^1, \ldots, \overline{K}^{2k-1}$ os conjuntos de vértices correspondentes em $\overline{K}$. Seja $D \subseteq K \cup \overline{K}$ contendo $2k-1$ vértices de K^1, $k-1$ vértices de $\overline{K}^1$ e k vértices de cada um dos conjuntos $\overline{K}^2, \ldots, \overline{K}^{2k-1}$. Ou seja, $|D \cap \overline{K}| = kn+k-1$ e $|D \cap K| = 2k-1$. Cada vértice em $H[D]$ tem grau no máximo $k-1$. Logo, $I \cup D$ é um conjunto k-independente de $H\overline{H}$ de ordem $kn + k - 1 + 2k - 1 + \ell' = kn + 3k - 2 + \ell'$.

Agora, suponha que $H\overline{H}$ possui um conjunto k-independente J de ordem pelo menos $kn + 3k - 2 + \ell'$. Vamos mostrar que (i) $|J \cap K| \leq 2k-1$, (ii) $J \cap V(\overline{G}) = \emptyset$ e (iii) $|J \cap (K \cup \overline{K})| \leq kn + 3k - 2$. Para provar (i), por contradição, assuma que $|J \cap K| > 2k-1$. Logo, J tem vértices em pelo menos duas partes de $H[K]$. Se J contém todos os k vértices de uma parte de $H[K]$, digamos K^i, um vértice u de uma outra parte de $H[K]$ que está em J tem $d_J(u) \geq k$, uma contradição, já que J é um conjunto k-independente. Se J contém menos de k vértices de K^i, então J contém pelo menos k vértices que estão em outras partes de $H[K]$. Logo, para um vértice $u \in K^i$, $d_J(u) \geq k$, o que também resulta em uma contradição. Portanto, $|J \cap K| \leq 2k-1$. Para provar (ii), por contradição, assuma que $J \cap V(\overline{G}) \neq \emptyset$. Se $J \cap \overline{K} = \emptyset$, então J pode conter no máximo todos os $2n$ vértices de $V(G) \cup V(\overline{G})$, além de no máximo $2k-1$ vértices de K, por (i). Note-se que $k \geq 2$, $n > k$ e $\ell' \geq k$. Portanto, tem-se que $|J| \leq 2n + 2k - 1 \leq kn + 2k - 1 < kn + 2k + (k-2) + \ell' = kn + 3k - 2 + \ell'$. Se $J \cap \overline{K} \neq \emptyset$, tem-se que $|J \cap (V(\overline{G}) \cup \overline{K})| \leq 2k-2$, já que todos os vértices em

$V(\overline{G})$ são adjacentes a todos os vértices em $\overline{K}$, o que implica em $|V(\overline{G}) \cap J| \leq k-1$ e $|\overline{K} \cap J| \leq k-1$. Além disso, $|J \cap V(G)| \leq n$ e, por (i), $|J \cap K| \leq 2k-1$. Portanto, tem-se que $|J| \leq 2k-1+2k-2+n = (n+k)+3k-3 < 2n+3k-2 < kn+3k-2+\ell'$. Logo, qualquer combinação de vértices de J contendo pelo menos um vértice de $V(\overline{G})$, resulta em cardinalidade menor do que $kn+3k-2+\ell'$, uma contradição. Portanto, $J \cap V(\overline{G}) = \emptyset$. Para provar (iii), por contradição, suponha que $|J \cap (K \cup \overline{K})| \geq kn+3k-1$. Como $|J \cap K| \leq 2k-1$, tem-se que $|J \cap \overline{K}| \geq kn+k = k(n+1)$. Se $|J \cap K| = 2k-1$, existe i tal que $K^i \subseteq J$ e $v \in K^i$ tal que seu correspondente $\overline{v} \in \overline{K}^i$ também pertence a J, o que implica que $d_J(\overline{v}) = k$. Se $|J \cap K| < 2k-1$, tem-se que $|J \cap \overline{K}| \geq kn+k+1 = k(n+1)+1$. Logo, há pelo menos uma clique $\overline{K}^i$ de $\overline{K}$ tal que $|\overline{K}^i \cap J| \geq k+1$, o que contradiz que J seja k-independente. Portanto $|J \cap (K \cup \overline{K})| \leq kn+3k-2$.

Por (ii) e (iii), conclui-se que $J - (K \cup \overline{K})$ é um conjunto k-independente de G de ordem no mínimo ℓ'. Portanto, o problema CONJUNTO k-INDEPENDENTE permanece NP-completo mesmo restrito à classe dos prismas complementares. □

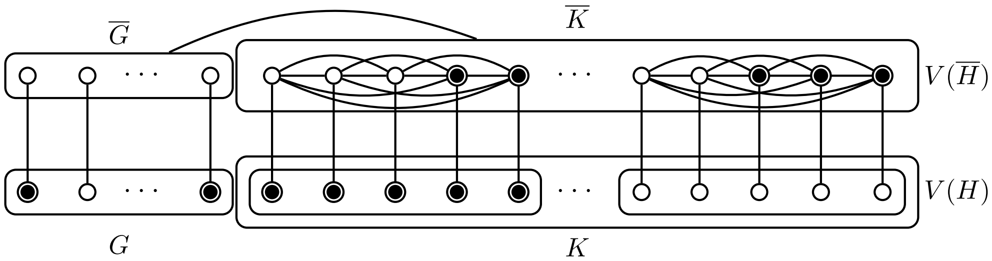

Figura 2. Exemplo de $H\overline{H}$, com $k = 3$. Os vértices de um conjunto k-independente estão em destaque. As arestas de G, $\overline{G}$ e K foram omitidas.

Referências

Chellali, M., Favaron, O., Hansberg, A., and Volkmann, L. (2012). k-domination and k-independence in graphs: A survey. *Graphs Combin.*, 28(1):1–55.

Duarte, M. A., Penso, L., Rautenbach, D., and dos Santos Souza, U. (2017). Complexity properties of complementary prisms. *J. Comb. Optim*, 33(2):365–372.

Fink, J. F. and Jacobson, M. S. (1985). On n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs. In *Graph theory with applications to algorithms and computer science*, pages 301–311.

Jacobson, M. S. and Peters, K. (1989). Complexity questions for n-domination and related parameters. *Congr. Numer.*, 68:7–22.

Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*, pages 85–103. Springer.

Mao, Y., Cheng, E., Wang, Z., and Guo, Z. (2018). The k-independence number of graph products. *The Art of Discrete and Appl. Math.*, 1(1):P1–01.

Mortosa, O. S. and Cappelle, M. R. (2021). k-independence on complementary prism graphs. *Matemática Contemporânea*, 48:211–220.