

# Bipartizando Grafos Livres de $P_6$ pela Remoção de um Emparelhamento\*

Carlos V.G.C. Lima<sup>1</sup>, Cícero S. Morais<sup>1†</sup>

<sup>1</sup>Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri, Brasil

vinicius.lima@ufca.edu.br, samuel.santos@aluno.ufca.edu.br

**Abstract.** Given a graph  $G = (V, E)$ , a bipartizing matching  $M \subseteq E(G)$  of  $G$  is a matching whose removal eliminates all the odd cycles of  $G$  (or equivalently, whether  $G - M$  is bipartite). We study the problem of determining whether  $G$  admits a bipartizing matching. This problem is equivalent to determine whether  $G$  admits a  $(2, 1)$ -coloring, which is a 2-coloring of  $V(G)$  such that each color class induces a graph of maximum degree at most 1. In this paper, we extend the result of Lima et al. (2021) about  $P_5$ -free graphs by showing a polynomial-time algorithm that decides whether a  $P_6$ -free graph admits a bipartizing matching.

**Resumo.** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um emparelhamento bipartizante  $M \subseteq E(G)$  de  $G$  é um emparelhamento cuja remoção elimina todos os ciclos ímpares de  $G$  (ou equivalentemente, se  $G - M$  é bipartido). Estudamos o problema de determinar se  $G$  admite um emparelhamento bipartizante. Este problema é equivalente ao de determinar se  $G$  admite uma  $(2, 1)$ -coloração, que é uma 2-coloração de  $V(G)$  tal que cada classe de cor induz um grafo de grau máximo igual a 1. Neste trabalho, estendemos o resultado de Lima et al. (2021) sobre grafos livres de  $P_5$ , apresentando um algoritmo polinomial que decide se um grafo livre de  $P_6$  admite um emparelhamento bipartizante.

## 1. Introdução

Neste trabalho, todos os grafos são considerados finitos e simples. Utilizamos as noções e notações de Teoria dos Grafos e complexidade que podem ser encontradas em [Bondy and Murty 2008]. Dado um grafo  $G = (V, E)$  e uma propriedade  $\Pi$  sobre grafos, o *problema de deleção de arestas* consiste em determinar o número mínimo de arestas requerido a serem removidas para se obter um grafo satisfazendo  $\Pi$  [Burzyn et al. 2006]. Dado um inteiro  $k \geq 0$ , o *problema de decisão de deleção de arestas* questiona se existe um conjunto  $F \subseteq E(G)$  com  $|F| \leq k$ , tal que o grafo obtido pela remoção de  $F$  satisfaz  $\Pi$ . Ambas as versões tem recebido grande atenção no estudo de suas complexidades, onde podemos citar [Yannakakis 1981, Burzyn et al. 2006, Natanzon et al. 2001, Alon and Stav 2009, Guillemot et al. 2012] e as referências internas para aplicações.

Em [Furmańczyk et al. 2015], os autores consideraram a *bipartização* (obtenção de um grafo bipartido) em grafos cúbicos através da remoção de um conjunto independente. Neste trabalho consideramos a versão análoga com respeito a remoção de arestas, onde tais arestas possuem uma propriedade específica: elas formam um *emparelhamento*,

---

\*Este trabalho tem o apoio do projeto CNPq Universal [422912/2021-2].

†Bolsista PIBIC/CNPq, EDITAL 03/2021/PRPI/UFCA - CHAMADA PICT UFCA/FUNCAP/CNPQ.

um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes. Além disso, nossa propriedade desejada é a de que o grafo resultante seja bipartido. Dado um grafo  $G = (V, E)$ , dizemos que um emparelhamento  $M \subseteq E(G)$  é *bipartizante* se  $G - M$  é bipartido. Ao contrário das versões de otimização e de decisão do problema de remoção de arestas, existem grafos que não admitem tais emparelhamentos, como o grafo completo com 5 vértices,  $K_5$ .

De fato, [Lima et al. 2021] mostraram que decidir se um grafo admite um emparelhamento bipartizante é NP-completo, mesmo para grafos planares com grau máximo 4. Por outro lado, o problema é polinomial para grafos com grau máximo no máximo 3, grafos livres de *garra* ( $K_{1,3}$ ) e *pata* ( $K_{1,3} + e$ ), grafos que possuem apenas triângulos como ciclos ímpares e grafos que admitem conjunto dominante de tamanho pequeno [Lima et al. 2021]. Como  $K_5$  não admite um emparelhamento bipartizante e o problema é fechado para subgrafos, então grafos que possuem um emparelhamento bipartizante têm clique máxima de tamanho no máximo 4. Este último fato junto à caracterização de grafos livres de  $P_5$  [Camby and Schaudt 2016] e o resultado de [Lima et al. 2021] sobre a existência de algoritmo polinomial para grafos com conjunto dominante pequeno, mostram que também é possível obter um algoritmo polinomial para grafos livres de  $P_5$ . No mesmo artigo também é provado que o problema é FPT quando parametrizado pela *clique-width*, o que gera um algoritmo polinomial para grafos cordais. Além disso, é apresentado um algoritmo FPT quando parametrizado pelo tamanho de uma cobertura mínima e também quando parametrizado pelo número de diversidade de vizinhança.

De fato, determinar a existência de um emparelhamento bipartizante é equivalente a decidir se um grafo admite uma 2-coloração imprópria dos vértices onde cada classe de cor induz um subgrafo cujo grau máximo é no máximo 1. De modo geral, uma  $(k, d)$ -coloração de  $G = (V, E)$  é uma  $k$ -coloração de  $V(G)$  em que cada classe de cor induz um grafo de grau máximo no máximo  $d$  [Borodin et al. 2013]. Logo um grafo admite um emparelhamento bipartizante se e somente se admite uma  $(2, 1)$ -coloração.

Versões similares do problema foram estudadas na literatura, como a de determinar se um dado grafo admite um emparelhamento cuja remoção gera uma floresta, ou seja, um grafo acíclico [Protti and Souza 2018, Lima et al. 2017]. De fato, aplicações do problema de obter um emparelhamento bipartizante surgem dos algoritmos distribuídos ou concorrentes e seus grafos de dependências entre os processos. Eliminar dependências específicas entre alguns processos pode levar a computação a sair de um estado de *deadlock*, por exemplo. Ao mesmo tempo, não é desejável eliminar muitos recursos já obtidos por cada processo, o que leva ao questionamento se é possível eliminar algumas dependências (arestas) de modo que cada processo perca uma quantidade limitada de recursos já disponíveis para executar sua computação. A eliminação destes ciclos de dependências é o objetivo nestes casos, dando origem as versões de eliminação de alguns ou de todos os ciclos, com a restrição de que cada vértice perca uma pequena quantidade de arestas.

Neste trabalho mostramos que o problema de determinar se um grafo livre de  $P_6$  admite um emparelhamento bipartizante admite um algoritmo polinomial, estendendo o resultado de [Lima et al. 2021] para grafos livres de  $P_5$ .

## 2. Algoritmo Polinomial para Grafos Livres de $P_6$

Em [van 't Hof and Paulusma 2010] os autores apresentam uma caracterização dos grafos livres de  $P_6$ , ou seja, os grafos que não admitem  $P_6$  como subgrafo induzido. Note que

esta classe contém os grafos livres de  $P_5$ . Um conjunto dominante  $D \subseteq V(G)$  de um grafo  $G = (V, E)$  é um conjunto de vértices tal que todo vértice  $u \in V(G) \setminus D$  possui algum vizinho  $v \in D$ , nesse caso dizemos que  $v$  domina  $u$  e que  $u$  é dominado por  $v$ .

**Teorema 1.** [van 't Hof and Paulusma 2010] Um grafo  $G = (V, E)$  é livre de  $P_6$  se e somente se todo subgrafo conexo induzido  $H$  de  $G$  possui um conjunto dominante  $D$  tal que  $D$  é isomorfo a  $C_6$  ou  $D$  possui um subgrafo gerador bipartido completo.

Além disso, eles apresentam um algoritmo que encontra tal conjunto dominante para  $G$  em tempo  $O(n^3)$ . O resultado de [Lima et al. 2021], para o caso em que o conjunto dominante é isomorfo a um  $C_6$ , se aplica. De fato, [Lima et al. 2021] apresentam um algoritmo XP cujo parâmetro é o tamanho do conjunto dominante. Dessa forma, podemos supor que  $G$  é um grafo conexo livre de  $P_6$  e que possui um conjunto dominante  $D$  que contém um subgrafo gerador bipartido completo  $H_D$  de tamanho não limitado.

Sejam  $A_D$  e  $B_D$  as partes de  $V(H_D)$  que definem sua bipartição como descrito pelo Teorema 1, para algum conjunto dominante  $D$  de  $G$ . A seguir, apresentamos um algoritmo polinomial para grafos livres de  $P_6$ . A ideia consiste em estender uma pré-coloração de  $H_D$  de modo que  $A_D$  e  $B_D$  recebam cores distintas, obtendo assim uma  $(2, 1)$ -coloração de  $G$ . Se tal extensão não for possível, então  $G$  não admite uma  $(2, 1)$ -coloração.

**Lema 2.** Suponha  $|A_D| \geq 2$  e  $|B_D| \geq 2$ . Se  $G$  admite uma  $(2, 1)$ -coloração, então podemos estender a coloração em que  $A_D$  é colorido com a cor 1 e  $B_D$  é colorido com a cor 2 a uma  $(2, 1)$ -coloração de  $G$ .

Note que, se  $|A_D| = 1$  (resp.  $|B_D| = 1$ ), podemos transferir um vértice de  $B_D$  (resp.  $A_D$ ) para  $A_D$  (resp.  $B_D$ ) obtendo um novo conjunto dominante  $D'$  particionado em dois conjuntos satisfazendo a condição do Lema 2. A seguir, mostramos como estender a  $(2, 1)$ -coloração de  $H_D$  para os demais vértices, iterativamente, caso alguma tal coloração exista. Caso este procedimento falhe, então o Lema 2 garante que  $G$  não admite uma  $(2, 1)$ -coloração. Considere  $V(G) \setminus D = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  e seja  $D^0 = D$  e  $D^i = D^{i-1} \cup \{v_i\}$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Para cada vértice  $v_i \in V(G) \setminus D$ ,  $1 \leq i \leq k$ , se:

- $\Delta(G[A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$  e  $\Delta(G[B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \leq 1$ , então  $B_{D^i} \leftarrow B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$ ;
- $\Delta(G[A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \leq 1$  e  $\Delta(G[B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$ , então  $A_{D^i} \leftarrow A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$ ;
- $\Delta(G[A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$  e  $\Delta(G[B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$ , então  $G$  não admite uma  $(2, 1)$ -coloração, pelo Lema 2;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$ ,  $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \emptyset$  e  $u$  é saturado em  $G[A_{D^{i-1}}]$ , então  $B_{D^i} \leftarrow B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$ ;
- $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$ ,  $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \emptyset$  e  $u$  é saturado em  $G[B_{D^{i-1}}]$ , então  $A_{D^i} \leftarrow A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$ ;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$ ,  $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{w\}$  e  $u$  é saturado em  $G[A_{D^{i-1}}]$ , mas  $w$  não é saturado em  $G[B_{D^{i-1}}]$ , então  $B_{D^i} \leftarrow B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$ ;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$ ,  $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{w\}$  e  $w$  é saturado em  $G[B_{D^{i-1}}]$ , mas  $u$  não é saturado em  $G[A_{D^{i-1}}]$ , então  $A_{D^i} \leftarrow A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$ ;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$ ,  $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{w\}$ , tal que  $u$  é saturado em  $G[A_{D^{i-1}}]$  e  $w$  é saturado em  $G[B_{D^{i-1}}]$ , então  $G$  não admite uma  $(2, 1)$ -coloração;

Note que nos passos acima os vértices são alocados de forma imperativa e segura. Sejam  $A'$  e  $B'$  os novos conjuntos obtidos de  $A_D$  e  $B_D$  pelos passos acima, respectivamente. Podemos classificar os vértices de  $V' = V(G) \setminus \{A' \cup B'\}$  como:  $X = \{u \in V' : d_{G[A' \cup \{u\}]}(u) = 1 \text{ e } d_{G[B' \cup \{u\}]}(u) = 0\}$ ;  $Y = \{u \in V' : d_{G[A' \cup \{u\}]}(u) = 0 \text{ e } d_{G[B' \cup \{u\}]}(u) = 1\}$ ; e  $Z = \{u \in V' : d_{G[A' \cup \{u\}]}(u) = 1 \text{ e } d_{G[B' \cup \{u\}]}(u) = 1\}$ . Além disso, cada vizinho  $w \in (A' \cup B')$  de  $u \in V'$  é não saturado em sua própria parte e pertence a  $D$ .

**Teorema 3.** Se  $G$  admite uma  $(2, 1)$ -coloração, então podemos alocar os vértices de  $Z \cup X \cup Y$  corretamente na bipartição de  $G[V(G) \setminus \{Z \cup X \cup Y\}]$  em tempo polinomial.

### 3. Conclusões e Trabalhos Futuros

Apresentamos um algoritmo polinomial para determinar se um grafo livre de  $P_6$  admite um emparelhamento bipartizante, estendendo o resultado de [Lima et al. 2017] para grafos livres de  $P_5$ . Porém, permanece aberto a determinação de um algoritmo FPT parametrizado pelo tamanho do conjunto dominante. Também se encontra pouco explorada a versão de otimização deste problema, onde busca-se minimizar o número de arestas do emparelhamento a serem removidas.

### Referências

- Alon, N. and Stav, U. (2009). Hardness of edge-modification problems. *Theoretical Computer Science*, 410(47–49):4920 – 4927.
- Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London.
- Borodin, O., Kostochka, A., and Yancey, M. (2013). On 1-improper 2-coloring of sparse graphs. *Discrete Mathematics*, 313(22):2638–2649.
- Burzyn, P., Bonomo, F., and Durán, G. (2006). Np-completeness results for edge modification problems. *Discrete Applied Mathematics*, 154(13):1824–1844.
- Camby, E. and Schaudt, O. (2016). A new characterization of  $P_k$ -free graphs. *Algorithmica*, 75(1):205–217.
- Furmańczyk, H., Kubale, M., and Radziszowski, S. (2015). On bipartization of cubic graphs by removal of an independent set. *Discrete Applied Mathematics*. In Press, Corrected Proof.
- Guillemot, S., Havet, F., Paul, C., and Perez, A. (2012). On the (non-)existence of polynomial kernels for  $p$ -free edge modification problems. *Algorithmica*, 65(4):900–926.
- Lima, C., Rautenbach, D., Souza, U., and Szwarcfiter, J. (2021). On the computational complexity of the bipartizing matching problem. In Press.
- Lima, C. V., Rautenbach, D., Souza, U. S., and Szwarcfiter, J. L. (2017). Decycling with a matching. *Information Processing Letters*, 124:26–29.
- Natanzon, A., Shamir, R., and Sharan, R. (2001). Complexity classification of some edge modification problems. *Discrete Applied Mathematics*, 113(1):109–128. Selected Papers: 12th Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science.
- Protti, F. and Souza, U. S. (2018). Decycling a graph by the removal of a matching: new algorithmic and structural aspects in some classes of graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 20 no. 2.
- van ’t Hof, P. and Paulusma, D. (2010). A new characterization of  $p_6$ -free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 158(7):731–740. Third Workshop on Graph Classes, Optimization, and Width Parameters Eugene, Oregon, USA, October 2007.
- Yannakakis, M. (1981). Edge-deletion problems. *SIAM Journal on Computing*, 10(2):297–309.